SOLUTIONS SINGULIÈRES ET GUIDAGE DU PHOTON D'APRÈS LA THÉORIE DE LA FUSION (*)

THIOUNN MUMM
(Institut Henri Poincaré — 11, rue Pierre Curie, Paris V)

RÉSUMÉ — La première partie de cet exposé reprend brièvement quelques points de la théorie de la double solution et de la théorie de la fusion de M. Louis de Broglie. On écrit alors les solutions singulières des équations du photon, obtenues par la fusion de deux solutions des équations de Dirac, et on montre que, sous des conditions très simples, ces solutions obéissent au théorème du guidage. Dans la dernière partie ces résultats sont illustrés par un exemple.

1. *THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION ET GUIDAGE D'UNE PARTICULE*

Dans sa théorie de la double solution [1], M. L. DE BROGLIE admet que la fonction d'onde Ψ, considérée usuellement en Mécanique ondulatoire, ne fournit qu'une représentation statistique des propriétés de la particule, la véritable onde physique devant être une onde u dont l'amplitude est très grande à l'endroit où se trouve localisé le corpuscule. En dehors de cette région, l'onde u se réduit à une onde regulière qui coincide sensiblement (à une constante de normalisation près) avec l'onde Ψ ordinaire.

Précisons quelque peu ces hypothèses. Soit pour fixer les idées, l'équation d'onde

$$A(\Psi) = \square \Psi - K^2 \Psi = 0 . \tag{1}$$

(*) Reçu le 5 juin 1966.

Ψ doit vérifier cette équation en tout point de l'espace, u ne la vérifie que dans le complémentaire de la région où son amplitude est très grande. Dans la région «singulière» elle-même, u doit vérifier une équation du genre

$$A\ (u) = T\ (u) \tag{2}$$

où $T\ (u)$ est un second membre dont la forme exacte reste pour l'instant inconnue. Il semble naturel de supposer que les dimensions de la région singulière sont de l'ordre de 10^{-13} cm, qui est l'ordre de grandeur généralement admis pour le «rayon» des particules connues.

Ignorant $T\ (u)$, il ne nous est pas possible de connaître la forme exacte de u. Mais on peut espérer en obtenir une forme approchée en considérant des ondes u', possédant une singularité du type pôle et qui vérifient l'équation (1) partout, sauf au voisinage du point singulier. Nous admettrons donc que u' donne une bonne représentation de u partout en dehors d'une boule de rayon 10^{-13} cm entourant le pôle de u'; étant donné qu'à l'intérieur de cette boule on doit remplacer u' par u, la véritable fonction d'onde u ne présente nulle part d'amplitude infinie. De ce fait, la divergence éventuelle de l'intégrale de u' prise dans un domaine comprenant le point singulier ne soulève pour nous aucune difficulté.

Dans ce qui suit nous ne considérons que des ondes de type u' et nous les appellerons solutions singulières de l'équation (1) au sens de DE BROGLIE.

Précisons notre pensée par quelques exemples. Le potentiel retardé de Liénard-Wiéchert et celui de Lorentz présentent tous deux une singularité du type pôle et sont solutions de l'équation

$$\Box\ \Psi = 0 \tag{3}$$

en dehors d'un voisinage de ce pôle. Ce sont donc des solutions singulières au sens de DE BROGLIE de l'équation (3). Nous savons que ces deux potentiels sont chacun en tout point de l'espace solutions distributions d'une équation du type (2), où le second membre est lui-même une distribution. Par exemple, pour le potentiel retardé de Lorentz on aura

$$T\ (u) = -4\ \pi\ \delta \tag{2'}$$

où δ désigne la distribution de Dirac.

On observera que les intégrales des dérivées partielles premières de ces deux potentiels sont encore convergentes dans tout domaine fini de l'espace, mais il n'en sera plus de même pour leurs dérivées d'une ordre plus élevé. Toutes ces dérivées partielles ne sont pas des solutions distributions des équations de type (2) à second membre distribution. Cependant, nous les considérons comme des solutions singulières des équations (3) au sens de DE BROGLIE.

Étudions maintenant comment l'onde Ψ habituelle exprimant des repartitions de probabilités est reliée à l'onde u, de façon telle que la particule semble décrire l'une des lignes définies par le théorème du guidage et calculées à partir de Ψ. M. L. DE BROGLIE pose en principe l'existance «d'un raccordement entre les lignes de courant de l'onde extérieure avec les lignes de courant intérieures à la très petite région de hautes valeurs du champ: celle-ci, c'est-à-dire le corpuscule, se trouve ainsi emprisonnée dans un tube très délié de lignes de courant du champ extérieur et la formule de guidage en résulte immédiatement» [2].

Ainsi, pour chaque sorte de corpuscule, le théorème de guidage de M. L. de Broglie stipule que si:

a) Ψ est une solution de type usuelle des équations décrivant le corpuscule.

b) $\Gamma_n(t)$ est à chaque instant t l'ensemble des lignes tangentes en tout point au vecteur courant, défini à l'aide de Ψ. Les $\Gamma_n(t)$ sont les lignes de courant et, en régime permanente, sont indépendants de t.

c) M est un point décrivant une trajectoire Γ qui à chaque instant t est tangente à la courbe Γ_n passant par ce point. Ainsi, à tout instant t, le quadrivecteur vitesse de M est colinéaire à celui de $\Gamma_n(t)$ au point de coincidence. En régime permanent Γ est tout simplement l'une des courbes Γ_n.

Alors, il existe une solution singulière u de l'équation (2), dont la singularité mobile est concentrée sur M, parcourt Γ suivant la même loi que M, et de façon telle que le quadrivecteur courant en ce point à l'instant t calculé à partir de u soit colinéaire à celui calculé à partir de Ψ.

Mais, ignorant la forme exacte de l'équation (2), et ayant admis que les fonctions d'onde u' donnent une bonne représentation de u à l'extérieur de la région singulière et sur sa frontière dans les conditions énumérées ci-dessus, les quadrivecteurs courant calculés respectivement à partir des ondes Ψ et des ondes u' doivent être colinéaires au voisinage du point singulier M. Effectivement, dans la suite de cet exposé nous montrerons qu'il existent des solutions du type u' qui obéissent au théorème de guidage de M. L. de Broglie.

2. *SOLUTIONS SINGULIÈRES ET THÉORÈME DE GUIDAGE DANS LE CAS DES ÉQUATIONS DE DIRAC*

Indiquons d'abord une classe de solutions singulières de l'équation (1).

Soit Ψ une solution du type usuelle, Γ une courbe définie comme ci-dessus et v^σ les composantes du quadrivecteur vitesse de M, calculées à partir de Ψ. Définissons une quantité algébrique scalaire D, que nous astreindrons à être nulle constamment en M et à vérifier une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre [5]. Par exemple, dans le cas où Γ est confondu avec l'axe Oz, parcouru par M avec une vitesse constante v, nous pouvons prendre

$$D = r' = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - vt)^2}{1 - v^2/c^2}} \tag{4}$$

Mais nous pourrions aussi choisir pour D le denominateur du potentiel de Liénard-Wiéchert ou bien d'autres fonctions encore.

Si nous dérivons maintenant D suivant Γ, nous trouvons aisément, du fait que D est nul au point $M(t)$:

$$[\partial\sigma D dx^\sigma]_{M(t)} = ds\left[\partial\sigma\, D\, \frac{dx^\sigma}{ds}\right]_{M(t)} = ds\, [\partial_\sigma D v^\sigma]_{M(t)} = 0 \tag{5}$$

où ds est l'élément d'arc de Γ. On montre alors qu'il existe une solution singulière de l'équation (1), de type u' et de la forme

$$u' = \frac{\omega}{D} + U \tag{6}$$

ω étant une fonction non nulle en $M(t)$ et continue; ses dérivées premières et secondes sont également continues. U est continue et ses dérivées premières sont continues partout, sauf peut-être en $M(t)$.

Prenons maintenant les équations de Dirac pour un corpuscule numéroté l et de masse m_l:

$$k_l \varphi_l = \gamma^\sigma\, \partial_\sigma \varphi_l \tag{7}$$

on aura $k_l = \dfrac{2\pi}{h} m_l c$ et les γ^σ sont les matrices de Von Neumann; φ_l est la matrice colonne

$$\varphi_l = \begin{vmatrix} \varphi_{l1} \\ \varphi_{l2} \\ \varphi_{l3} \\ \varphi_{l4} \end{vmatrix} \tag{8}$$

Nous adoptons la convention des indices muets, en désignant par des lettres grecques les indices susceptibles de varier de 1 à 4 et par des lettres latines les indices susceptibles de varier de 1 à 3. Nous utilisons un système d'unités tel que $c = 1$ et, pour les calculs explicites, nous choisissons les γ^σ de manière que (7) s'écrive

$$\begin{gathered} k_l\,\varphi_{l1} = (\partial_1 + i\partial_2)\,\varphi_{l3} - (\partial_3 - \partial_4)\,\varphi_{l4};\ k_l\,\varphi_{l3} = (\partial_1 - i\partial_2)\,\varphi_{l1} - (\partial_3 - \partial_4)\varphi_{l2} \\ k_l\,\varphi_{l2} = -(\partial_3 + \partial_4)\,\varphi_{l3} - (\partial_1 - i\partial_2)\,\partial_{l4};\ k_l\,\varphi_{l4} = -(\partial_3 + \partial_4)\,\varphi_{l1} - (\partial_1 + i\partial_2)\varphi_{l2} \end{gathered} \tag{7'}$$

Nous savons déjà qu'il existe une solution des équations (7) présentant une singularité en M, mobile suivant Γ, et de la forme

$$\varphi_l = \gamma^\sigma \partial_\sigma u_l + k_l u_l \tag{9}$$

avec

$$u_l = |\, u_{l\sigma} \,| = \begin{vmatrix} u_{l\,1} \\ u_{l\,2} \\ u_{l\,3} \\ u_{l\,4} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

chacun des $u_{l\sigma}$ étant une solution singulière du type (6) de l'équation (1) avec $k = k_l$, soit

$$u_{l\sigma} = \frac{\omega_{l\sigma}}{D} + U_{l\sigma} \tag{11}$$

$\omega_{l\sigma}$ et $u_{l\sigma}$ ayant les mêmes propriétés que ω et U respectivement.

En effet, si nous introduisons (9) dans (7), on peut montrer qu'en raison des propriétés des γ^σ, on obtient:

$$[\,\square - k_l^2\,]\, u_{l\sigma} = 0 \tag{12}$$

Calculons alors le vecteur courant de Dirac au voisinage du point singulier

$$j_l^\mu = -\varphi_l^* \gamma^4 \gamma^\mu \varphi_l \sim \frac{1}{D^4} [(X^\rho X_\rho) \lambda_l^\mu - 2 X^\mu (\lambda_l^\beta X_\beta)] \tag{13}$$

où le signe ~ désigne l'équivalence au sens des valeurs principales et où nous posons en outre

$$\lambda_l^\sigma = -\Omega_l^* \gamma^4 \gamma^\sigma \Omega_l \text{ avec } \Omega_l = |\omega_{l\sigma}| = \begin{vmatrix} \omega_{l1} \\ \omega_{l2} \\ \omega_{l3} \\ \omega_{l4} \end{vmatrix}$$

$$X_\rho = \partial_\rho D \tag{14}$$

Le théorème de guidage s'exprime dans ce cas par

$$[j_l^\mu]_{M(t)} \sim \frac{1}{D^4} \rho_l v^\mu \tag{15}$$

et il est facile de montrer, grâce à la relation (5), que (15) entraîne

$$\lambda_l^\mu = \rho'_l v^\mu \tag{16}$$

Nous savons en effet que, pour des vitesses de la particule inférieures à c, $X^\rho X_\rho$ est différent de zéro; alors, en multipliant (13) par X_μ et en sommant:

$$j_l^\mu X_\mu \sim \frac{1}{D^4} \left[-X^\rho X_\rho \left(\lambda_l^\beta X_\beta \right) \right]$$

Mais (5) et (15) montrent que la partie entre crochets doit être nulle en $M(t)$ et il est donc nécessaire que nous ayons

$$[\lambda_l^\beta X_\beta]_{M(t)} = 0$$

ou, ce qui revient au même, par comparaison avec (5), la relation (16) [5].

Nous vérifions reciproquement que la condition (16) suffit à assurer la validité du théorème de guidage, car (13) s'écrit alors

$$[j_l^{\mu}]_{M(t)} \sim \frac{1}{D^4}(X^{\rho}X_{\rho})\,\rho\,v^{\mu} \tag{13'}$$

Explicitons les conditions (16), en tenant compte du choix des matrices γ^{σ}:

$$(16')\qquad \begin{aligned} \lambda_l^1 &= \omega_{l1}\,\bar\omega_{l2} + \bar\omega_{l1}\,\omega_{l2} + \omega_{l3}\,\bar\omega_{l4} + \bar\omega_{l3}\,\omega_{l4} = \rho_l'\,v^1 \\ \lambda_l^2 &= -\,i\,[\omega_{l1}\,\bar\omega_{l2} - \bar\omega_{l1}\,\omega_{l2} - \omega_{l3}\,\bar\omega_{l4} + \bar\omega_{l3}\,\omega_{l4}] = \rho_l'\,v^2 \\ \lambda_l^3 &= \omega_{l1}\,\bar\omega_{l1} - \omega_{l2}\,\bar\omega_{l2} + \omega_{l3}\,\bar\omega_{l3} - \omega_{l4}\,\bar\omega_{l4}] = \rho_l'\,v^3 \\ \lambda_l^4 &= \omega_{l1}\,\bar\omega_{l1} + \omega_{l2}\,\bar\omega_{l2} + \omega_{l3}\,\bar\omega_{l3} + \omega_{l4}\,\bar\omega_{l4} = \rho_l'\,v^4 \end{aligned}$$

Nous nous proposons de calculer ω_{l1} et ω_{l2} en fonction des ω_{l3}, ω_{l4} et v^{σ}. Pour cela (16') est équivalent à

$$(16'')\qquad \begin{aligned} \omega_{l1}\,\bar\omega_{l2} + \bar\omega_{l3}\,\omega_{l4} &= \frac{\rho_l'}{2}\,(v^1 + i\,v^2) \\ \bar\omega_{l1}\,\omega_{l2} + \omega_{l3}\,\bar\omega_{l4} &= \frac{\rho_l'}{2}\,(v^1 - i\,v^2) \\ \omega_{l1}\,\bar\omega_{l1} + \omega_{l3}\,\bar\omega_{l3} &= \frac{\rho_l'}{2}\,(v^3 + v^4) \\ \omega_{l2}\,\bar\omega_{l2} + \omega_{l4}\,\bar\omega_{l4} &= \frac{\rho_l'}{2}\,(v^3 - v^4) \end{aligned}$$

La première et la quatrième égalités (16'') donnent

$$\frac{\omega_{l1}}{\omega_{l2}} = \frac{\rho_l'\,(v^1 + i\,v^2) - 2\,\bar\omega_{l3}\,\omega_{l4}}{\rho_l'\,(v^4 - v^3) - 2\,\bar\omega_{l4}\,\omega_{l4}}$$

tandis que de la deuxième et de la troisième nous tirons

$$\frac{\omega_{l1}}{\omega_{l2}} = \frac{\rho_l'\,(v^3 + v^4) - 2\,\omega_{l3}\,\bar\omega_{l3}}{\rho_l'\,(v^1 - i\,v^2) - 2\,\omega_{l3}\,\bar\omega_{l4}}$$

et, donc,

$$(17)\qquad \begin{aligned} \omega_{l1} &= \chi\,[(v^1 + i\,v^2)\,\omega_{l3} - (v^3 + v^4)\,\omega_{l4}] \\ \omega_{l2} &= -\,\chi\,[(v^3 - v^4)\,\omega_{l3} + (v^1 - i\,v^2)\,\omega_{l4}] \end{aligned}$$

χ étant un coefficient qu'on détermine en portant ces valeurs (17) dans (16'). On trouve

$$\varkappa \bar{\varkappa} = 1 \tag{17'}$$

c'est-à-dire,

$$\varkappa = e^{i\delta_l} \tag{17''}$$

où δ_l est une fonction arbitraire des coordonnées x^σ de M.

3. *LA THÉORIE DE LA FUSION*

La théorie de la fusion [4] a pour objet d'obtenir les équations d'une particule de spin maximum $S = n/2$ à partir des équations de deux particules de spins respectivement $p/2$ et $q/2$ ($p + q = n$), n, p et q étant des nombres entiers positifs.

Nous allons appliquer la méthode générale à deux cas précis:

1) $n = 0$, alors $p = q = 0$; 2) $n = 2$ et $p = q = 1$.

1) Soient deux corpuscules sans spin, de masses m_l ($l = 1, 2$) et décrits par les équations

$$(\square - K_l^2)\varphi_l = 0\,; \quad K_l = 2\,\pi\, m_l\, c\,/\,h \tag{18}$$

Représentons la particule A, résultant de la fusion, par la fonction d'onde

$$\Psi = \varphi_1\, \varphi_2 \tag{19}$$

Ψ devant vérifier encore l'équation de la particule sans spin, c'est-à-dire

$$(\square - K^2)\, \Psi = 0\,, \tag{18'}$$

où K est une fonction des k_l qui reste à déterminer.

Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que (18') ait lieu est que

$$\frac{2\, g^{\sigma\sigma}\, \partial_\sigma\, \varphi_1\, \partial_\sigma\, \varphi_2}{\varphi_1\, \varphi_2} = f\,(k_1\,,\, k_2)\,, \tag{20}$$

$g^{\sigma\sigma}$ étant la matrice diagonale correspondante à l'opérateur de d'Alembert et f une fonction de deux variables.

Donnons deux exemples où la relation (20) est vérifiée:

a) Si les φ_l sont des solutions ondes planes, (20) est bien vérifiée pour

$$f(k_1, k_2) = 2\, k_1\, k_2 .$$

Alors,

$$K^2 = (k_1 + k_2)^2 ,$$

et on voit que la masse de la particule A est égale à la somme aritmétique de celles des particules composantes.

b) Prenons pour la particule 1 la solution *singulière*

$$\varphi_1 = (a/r)\ exp\,[r\sqrt{k_{,}^2 - k_1'^2} + i\ k_1'\ t]\ ;\ a,\ k_1' = C^{te},$$

avec

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

et pour la particule 2 une solution onde plane, soit

$$\varphi_2 = b\ exp\ [i\ k_2\ t]\ ;\ b = C^{te} .$$

Dans ces conditions,

$$\Psi = (a\, b/r)\ exp\,[r\sqrt{k_1^2 - k_1'^2} + i\,(k_1' + k_2)\, t]$$

et alors

$$f(k_1, k_2) = 2\, k_1'\, k_2$$

Donc,

$$K^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2\, k_1'\, k_2 \tag{21}$$

ou encore, si nous revenons aux masses propres

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\, \varepsilon_1\, m_2\ ;\ \varepsilon_1 = 2\pi\, k_1' / h \tag{21'}$$

La masse propre de la particule résultante n'est plus égale à la somme de celles des particules composantes.

Pour interpréter la relation (21), considérons dans le système de coordonnées du laboratoire la particule 2 au repos et la particule 1 ayant la quantité de mouvement p_1. Dans notre système d'unités où $c = 1$, l'énergie totale de la particule 1 est donc

$$\varepsilon_1^2 = m_1^2 + p_1^2$$

et l'énergie totale de l'ensemble des deux particules sera

$$E = \varepsilon_1 + m_2$$

D'autre part, nous savons que pour une particule isolée la masse propre est un invariant qui est reliée à son énergie et à sa quantité de mouvement par la relation

$$m^2 = \varepsilon^2 - p^2$$

Dans le cas d'un système de r particules, d'énergies et de quantités de mouvement respectivement ε_r et p_r, l'invariant correspondant à m est la quantité M donnée par

$$M^2 = (\Sigma\, \varepsilon_r)^2 - (\Sigma p_r)^2$$

et M peut donc être considéré comme la masse propre du système de r corpuscules. Elle est égale à l'énergie calculée par rapport au système de coordonnées du centre de masse des r particules.

Si nous revenons maintenant au cas des deux particules considerées plus haut, nous retrouvons bien la relation (21′) car

$$M^2 = (m_2 + \varepsilon_1)^2 - p_1^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\, \varepsilon_1\, m_2$$

Ainsi, la fusion entre une solution régulière et une solution singulière des équations d'onde permet eventuellement de tenir compte du defaut de masse de la particule résultante.

Nous venons de constater que la fusion est possible entre deux solutions de type usuel, comme entre une solution de type usuel et une solution singulière. On peut démontrer en outre que la fusion de deux solutions singulières est en général impossible.

2) En ce qui concerne la fusion de deux corpuscules de spin 1/2 pour former une particule de spin 1, nous allons exposer ci-dessous les points essentiels, en calculant effectivement les fonctions d'onde du photon.

4. *SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DU PHOTON D'APRÈS LA THÉORIE DE LA FUSION* [6]

Soient deux particules c_l ($l = 1, 2$), de spin 1/2 et de masse m_l, décrites par deux systèmes d'équations du type (7). Nous désignerons par $\varphi_{l\sigma}$ les deux spineurs qui représentent ces deux particules. Nous allons montrer que la particule de spin 1 résultant de la fusion peut être décrite par la matrice Φ de composantes

$$\Phi_{\alpha\beta} = \varphi_{1\alpha}\,\varphi_{2\beta} \tag{22}$$

Pour cela nous allons tout d'abord déduire de Φ les grandeurs de nature tensorielle sous une transformation de Lorentz. Introdusons donc les 16 matrices linéairement indépendantes qu'on peut définir à partir des γ^σ, c'est-à-dire,

la matrice unité I,
les 4 matrices γ^ρ,
les trois matrices $i\,\gamma^a\,\gamma^b$ avec $(a, b) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$,
les trois matrices $i\,\gamma^4\,\gamma^a$.
les quatre matrices $i\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta\,\gamma^\rho$ avec $(\alpha, \beta, \rho) = (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 1), (4, 2, 1)$,
et la matrice $\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\,\gamma^4$.

Nous devons ensuite déterminer une certaine matrice γ qui, du fait de notre choix des γ^σ, est ici [4]

$$\gamma = i\,\gamma^1\,\gamma^3 \tag{23}$$

et, en représentant par γ^n l'une des 16 matrices énumérées ci-dessus, il est alors possible de faire la décomposition unique suivante:

$$\Phi\,\gamma = \sum_{n=1}^{16} \Phi_n\,\gamma^n \tag{24}$$

D'après les variances tensorielles des γ^n, on peut identifier (à un facteur constant près que nous préciserons) les coefficients Φ_ρ des quatre γ^ρ aux quatre composantes du quadrivecteur potentiel et les coefficients des six $i\,\gamma^a\,\gamma^b$, $i\,\gamma^4\,\gamma^a$ aux composantes du tenseur champ électromagnétique. Les cinq autres coefficients correspondent à la description d'une particule de spin total $S = 0$, dont nous ne pouvons pas *a priori* affirmer l'existence réelle.

Dans le cas où les $\varphi_{l\sigma}$ sont des solutions ondes planes, on peut vérifier aisément que le quadrivecteur potentiel et le tenseur champ électromagnétique ainsi définis vérifient identiquement les équations de Maxwell; on retrouve bien les équations d'une particule de spin 1, notamment celles du photon. Mais, lorsque l'un des spineurs $\varphi_{l\sigma}$ est une solution singulière, la vérification des équations de Maxwell exige, en général, une condition supplémentaire que nous allons étudier.

En effet, écrivons explicitement les composantes du vecteur potentiel tirées de (24)

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha\,[\varphi_{11}\,\varphi_{24} + \varphi_{14}\,\varphi_{21} + \varphi_{12}\,\varphi_{23} + \varphi_{13}\,\varphi_{22}] \\ A_2 &= -i\,\alpha\,[\varphi_{11}\,\varphi_{24} + \varphi_{14}\,\varphi_{21} - \varphi_{12}\,\varphi_{23} - \varphi_{13}\,\varphi_{22}] \\ A_3 &= \alpha\,[\varphi_{11}\,\varphi_{23} + \varphi_{13}\,\varphi_{21} - \varphi_{12}\,\varphi_{24} - \varphi_{14}\,\varphi_{22}] \\ A_4 &= \alpha\,[\varphi_{11}\,\varphi_{23} + \varphi_{13}\,\varphi_{21} + \varphi_{12}\,\varphi_{24} + \varphi_{14}\,\varphi_{22}] \end{aligned} \tag{25}$$

avec [4]

$$\alpha = \frac{i\,h}{16\,\pi\,\sqrt{m_o}} \tag{26}$$

On désigne ici par m_o la masse de la particule résultante de la fusion qui, comme nous avons vu, n'est pas nécessairement la somme de celles des particules composantes.

Le calcul de la condition de Lorentz concernant la jauge ne présente aucune difficulté et, en tenant compte de (7), donne

$$J = \partial_\sigma A^\sigma = \alpha\,(k_1 - k_2)\,[\,\varphi_{11}\,\varphi_{22} - \varphi_{12}\,\varphi_{21} + \varphi_{13}\,\varphi_{24} - \varphi_{14}\,\varphi_{23}\,] \tag{27}$$

La jauge est donc nulle soit quand $k_1 = k_2$ soit quand le deuxième facteur du troisième membre de (27) est nul. Or, quand nous appliquons la théorie de la fusion à deux corpuscules, ceux-ci occupent (à 10^{-13} cm près) le même point au même instant; il faut alors que les deux spineurs qui représentent les deux corpuscules engendrent les mêmes lignes de courant et nous devons avoir en chaque point, d'après (16),

$$\lambda_l^\sigma = -\,\varphi_l^*\,\gamma^4\,\gamma^\sigma\,\varphi_l = \rho_l\,v^\sigma \tag{28}$$

ou, sous une forme équivalente, d'après (17),

$$\begin{aligned} \varphi_{l\,1} &= e^{i\delta_l}\,[\,(v^1 + iv^2)\,\varphi_{l\,3} - (v^3 + v^4)\,\varphi_{l\,4}\,] \\ \varphi_{l\,2} &= e^{i\delta_l}\,[\,(v^3 - v^4)\,\varphi_{l\,3} + (v^1 - iv^2)\,\varphi_{l\,4}\,] \end{aligned} \tag{28'}$$

En rapportant ces valeurs dans (27) nous constatons que $J = 0$ pour

$$e^{i(\delta_1+\delta_2)} + 1 = 0 \tag{29}$$

et on remarque que (29) est automatiquement vérifiée lorsque les $\varphi_{l\sigma}$ sont des solutions ondes planes, vu que dans ce cas $e^{i\delta_1} = e^{i\delta_2} = i$. Nous nous bornerons dorénavant à des solutions vérifiant cette condition. Cependant, à cause du second membre de l'équation (2), la jauge de Lorentz peut être différente de zéro au point singulière et dans son voisinage quand l'un des spineurs présente une singularité; on le constatera sur l'exemple développé à la fin de ce travail.

Calculons maintenant les composantes du tenseur électromagnétique à partir de (24). On trouve des formules analogues à (25), c'est-à-dire des formes bilinéaires en $\varphi_{l\sigma}$ comme, par exemple,

$$F_{23} = H_x = \frac{\sqrt{m_o}}{8}\left[\varphi_{11}\,\varphi_{21} - \varphi_{12}\,\varphi_{22} - \varphi_{13}\,\varphi_{23} + \varphi_{14}\,\varphi_{24}\right] \tag{25'}$$

Donc, si on adopte pour $\varphi_{l\sigma}$ des solutions du type pôle, les composantes du potentiel vecteur et celles du tenseur électromagnétique ont des pôles du même ordre.

Représentons le corpuscule c_2 par une fonction d'onde de type usuel $\varphi_{2\sigma}$, à partir de laquelle nous définissons les lignes de courant Γ_n. Soit Γ une des courbes enveloppes des Γn et M son point de contact à l'instant t. Choisissons pour représenter le corpuscule c_1 une solution singulière en M de type (9). On veut calculer la valeur principale du quadrivecteur potentiel au voisinage de M et on obtient d'abord

$$\varphi_1 = \| \varphi_{1\sigma} \| \sim -\gamma^\sigma \frac{X_\sigma}{D^2} \| \omega_{1\sigma} \| = -\gamma^\sigma \frac{X_\sigma}{D^2}\,\Omega_1 \tag{30}$$

et enfin, à l'aide de (14) et (17)

$$\vec{A} \sim \frac{-ih}{16\pi\sqrt{m_o}}\,\frac{1}{D^2}\left\{(e^{-i\delta_1} + e^{-i\delta_2})\left[\vec{X}\left(\vec{\Lambda}.\,\vec{v}\right) + \vec{X}\left(\vec{v} \wedge \vec{\Lambda}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + (e^{-i\delta_2} - e^{-i\delta_1})\;\vec{X}\widetilde{\left(\vec{v} \wedge \vec{\Lambda}\right)}\right\} \tag{31}$$

où l'on a écrit

$\vec{X}$ pour le vecteur de composantes $X_\sigma = \partial_\sigma D$,

$\vec{v}$ pour le vecteur vitesse de composantes v^σ, avec $v^\sigma v_\sigma = -1$,

$\vec{\Lambda}$ pour le vecteur dont les composantes sont de la forme

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \omega_{14}\,\varphi_{21} + \omega_{13}\,\varphi_{22}\,;\ \lambda_2 = -i\,(\omega_{14}\,\varphi_{21} - \omega_{13}\,\varphi_{22})\,; \\ &\lambda_3 = \omega_{13}\,\varphi_{21} - \omega_{14}\,\varphi_{22}\,;\ \lambda_4 = \omega_{13}\,\varphi_{21} + \omega_{14}\,\varphi_{22} \end{aligned} \tag{32}$$

et $\widetilde{\vec{v} \wedge \vec{\Lambda}}$ est le tenseur polaire de $\vec{v} \wedge \vec{\Lambda}$

Nous allons maintenant exprimer les conditions nécessaires pour que le potentiel (25) et le champ (25') vérifient les équations de Maxwell. D'après une remarque faite plus haut, il faut que le tenseur électromagnétique calculé à partir de (31) soit aussi du second ordre en 1/D. C'est bien le cas si, au voisinage de $M(t)$, A est colinéaire à $\vec{X}$ et il faut donc que $\vec{v} \wedge \vec{\Lambda}$ soit nul ou que $\vec{\Lambda}$ soit colinéaire à $\vec{v}$. Mais les composantes (32) de Λ satisfont l'égalité

$$\lambda^\sigma \lambda_\sigma = (\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2 - (\lambda^4)^2 = 0 \tag{33}$$

et il s'ensuit alors que, si le module v de la vitesse de la particule résultante de la fusion est inférieure à la vitesse limite de la lumière c, $\vec{\Lambda}$ ne peut pas être colinéaire à $\vec{v}$ et les équations de Maxwell ne pourront pas être vérifiées.

Pourtant, nous tenons essentiellement au cas où $v < c$ et cela pour une double raison. D'une part, parce que dans la théorie du photon de M. L. DE BROGLIE la masse du photon est très petite mais non-nulle; de ce fait, la vitesse v est très voisine de c mais ne coincide pas avec c. D'autre part, la théorie doit s'appliquer à d'autres particules de spin 1, dont les masses peuvent, le cas écheant, être très différentes de zéro.

Pour pouvoir en tenir compte nous partirons alors de la remarque suivante. Dans tout ce qui précède nous avons fait jouer aux deux corpuscules composantes des rôles dissymétriques, car nous avons pris une solution singulière de c_1 et une solution de c_2 du type usuel. Pour remedier à cela, nous allons donc ajouter à (31) le potentiel vecteur obtenu par fusion d'une solution singulière de c_2 avec une solution usuelle de c_1; à cause de la linéarité de (31) par rapport à $\vec{\Lambda}$ on vérifie que les formules finales gardent la forme (31), à cela près que les composantes de $\vec{\Lambda}$ s'écrivent maintenant

$$\begin{aligned}
\lambda^1 &= \omega_{14}\,\varphi_{21} + \omega_{13}\,\varphi_{22} + \omega_{24}\,\varphi_{11} + \omega_{23}\,\varphi_{12} \\
\lambda^2 &= -\,i\,[\omega_{14}\,\varphi_{21} - \omega_{13}\,\varphi_{22} + \omega_{24}\,\varphi_{11} - \omega_{23}\,\varphi_{12}] \\
\lambda^3 &= \omega_{13}\,\varphi_{21} - \omega_{14}\,\varphi_{22} + \omega_{23}\,\varphi_{11} - \omega_{24}\,\varphi_{12} \\
\lambda^4 &= \omega_{13}\,\varphi_{21} + \omega_{14}\,\varphi_{22} + \omega_{23}\,\varphi_{11} + \omega_{24}\,\varphi_{12}
\end{aligned} \tag{34}$$

On voit que les nouvelles composantes (34) ne satisfont plus la relation (33) et qu'on peut imposer ici

$$\lambda^\sigma = \rho'\,v^\sigma \tag{35}$$

Après un calcul similaire à celui qui conduisait aux relations (17) on obtient

$$\begin{aligned}
\omega_{13} &= \mu\,[\,(v^1 - iv^2)\,\varphi_{11} - (v^3 + v^4)\,\varphi_{12}] \\
\omega_{13} &= \mu\,[\,(v^4 - v^3)\,\varphi_{11} - (v^1 + iv^2)\,\varphi_{12}] \\
\omega_{23} &= -\,\mu\,[\,(v^1 - iv^2)\,\varphi_{21} - (v^3 + v^4)\,\varphi_{22}] \\
\omega_{24} &= -\,\mu\,[\,(v^4 - v^3)\,\varphi_{11} - (v^1 + iv^2)\,\varphi_{22}]
\end{aligned} \tag{36}$$

μ étant une fonction arbitraire des coordonnées X_σ de $M(t)$ de Γ. En tenant compte des relations (28') on vérifie aisément que

$$\begin{aligned}
\omega^{13} &= -\,\mu\,e^{i\delta_1}\,\varphi_{13} \quad & \omega_{14} &= \mu\,e^{i\delta_1}\,\varphi_{14} \\
\omega_{23} &= \mu\,e^{i\delta_2}\,\varphi_{23} & \omega_{24} &= \mu\,e^{i\delta_2}\,\varphi_{24} \\
\rho' &= 2\mu\,e^{(i\delta_1 + \delta_2)} & & [\varphi_{13}\,\varphi_{24} - \varphi_{14}\,\varphi_{23}]
\end{aligned}$$

et, grâce à (36), $\vec{v} \wedge \vec{\Lambda} = 0$; le potentiel vecteur de la particule résultante de la fusion a donc pour valeur principale

$$\vec{A} \sim -\frac{\alpha}{D^2}\,(e^{-i\delta_1} + e^{-i\delta_2})\,\rho' X \tag{37}$$

et le tenseur électromagnétique qui en résulte est bien du second ordre en 1/D.

Nous devons maintenant rechercher les conditions pour que le tenseur électromagnétique ainsi obtenu soit identique à celui qu'on obtient par décomposition directe de (24). Nous arrivons ainsi à des relations entre ρ', δ_1, δ_2 et leurs dérivées, mais elles ne modifient pas la forme de (37), ce qui est l'essentiel dans l'étude du guidage du photon. En supposant que ces relations sont satisfaites, le calcul du tenseur électromagnétique à partir de (24) donne finalement, à cause de (35),

$$\begin{aligned}
F_{23} &= H_x \sim - \frac{i}{D^2} \frac{\sqrt{m_o}}{4} \rho' [X_2 v_3 - X_3 v_2] \\
F_{31} &= H_y \sim - \frac{i}{D^2} \frac{\sqrt{m_o}}{4} \rho' [X_3 v_1 - X_1 v_3] \\
F_{12} &= H_3 \sim - \frac{i}{D^2} \frac{\sqrt{m_o}}{4} \rho' [X_1 v_2 - X_2 v_1] \\
F_{14} &= E_x \sim - \frac{i}{D^2} \frac{\sqrt{m_o}}{4} \rho' [X_1 v_4 - X_4 v_1] \\
F_{24} &= E_y \sim - \frac{i}{D^2} \frac{\sqrt{m_o}}{4} \rho' [X_2 v_4 - X_4 v_2] \\
F_{34} &= E_3 \sim - \frac{i}{D^2} \frac{\sqrt{m_o}}{4} \rho' [X_3 v_4 - X_4 v_3]
\end{aligned} \tag{38}$$

ou encore, si on désigne par F le tenseur de composantes $F_{\mu\nu}$,

$$F \sim - \frac{i}{D^2} \frac{\sqrt{m_o}}{4} \rho' \left[\vec{X} \wedge \vec{v} \right] \tag{38'}$$

On voit donc que dans la théorie de la fusion appliquée aux solutions singulières, le quadrivecteur potentiel et le tenseur électromagnétique des particules de spin 1 (notamment le photon) ont pour valeurs principales au voisinage de la singularité, respectivement, les expressions (37) et (38').

5. *LE GUIDAGE DU PHOTON. EXEMPLE D'UNE SOLUTION*

On sait [7] que le vecteur courant correspondant aux équations du photon est

$$j_\mu = \frac{2\tau i}{h} \left[A^{\mu *} F_{\mu\nu} - F^*_{\mu\nu} A^\mu \right] \tag{39}$$

Au voisinage du point singulier, la valeur principale de $\vec{j}$ s'obtient en remplaçant les composantes A^μ et $F_{\mu\nu}$ par leurs valeurs principales (37) et (38'), ce qui donne

$$\vec{j} \sim \frac{\rho' \rho'^* \sin \delta,}{8 D^4} \left[\left(\vec{X} . \vec{X}\right) \vec{v} - \left(\vec{X} . \vec{v}\right) \vec{X} \right] \tag{39'}$$

soit encore, en tenant compte de (5),

$$\vec{j} \sim \frac{\rho \rho'^* \sin \delta,}{8 D^4} \left[\vec{X} . \vec{X} \right] \vec{v} \tag{39''}$$

Nous constatons qu'au voisinage du point singulier le vecteur courant est colinéaire à la vitesse de la singularité, ce qui est un résultat remarquable.

En effet, soient deux systèmes de fonctions d'onde de type usuel, $\varphi_{1\sigma}$ et $\varphi_{2\sigma}$, correspondantes aux corpuscules c_1 et c_2 de spin 1/2, et possédant à tout instant les mêmes familles de lignes de courant $\Gamma_n(t)$. Désignons par Γ une enveloppe des Γ_n et par $\varphi'_{1\sigma}$ et $\varphi'_{2\sigma}$ deux systèmes de fonctions d'onde à singularité mobile qui vérifient le théorème de guidage des corpuscules de spin 1/2.

Les propriétés de particule de spin 1 qui résulte de la fusion de ces deux corpuscules étant décrites par le système symétrisé de fonctions d'onde $\Phi_{\alpha\beta}$.

$$\Phi_{\alpha\beta} = \varphi_{1\alpha}\, \varphi'_{2\beta} + \varphi'_{1\alpha}\, \varphi_{2\beta} \tag{40}$$

et la décomposition (24) permettant d'en calculer les composantes du potentiel vecteur et du tenseur électromagnétique, si certaines conditions de compatibilité sont satisfaites ces composantes auront pour valeurs principales au voisinage du point singulier (37) et (38); en conséquence, le théorème du guidage concernant les particules de spin 1 est automatiquement vérifié. Le calcul montre ainsi une corrélation inattendue entre les théorèmes de guidage et la théorie de la fusion. Nous allons la retrouver en examinant explicitement un exemple de solution.

Prenons le cas simple où les courbes Γ_n sont des droites parallèles à Oz que l'onde usuelle parcourt à la vitesse v et supposons que $\varphi_{1\sigma}$ et $\varphi_{2\sigma}$ sont les ondes planes

$$\varphi_{l\sigma} = b_{l\sigma}\, \varepsilon_l \; ; \; \varepsilon_l = e^{\frac{2\pi i}{h} \frac{mc}{\sqrt{1-v^2}} (t - z\, v)} \tag{41}$$

les $b_{l\sigma}$ étant reliés par (28') où $e^{i\delta} = i$. Comme ici le régime est permanent, parce que les Γ_n ne dépendent pas de t, Γ coïncidéra avec l'une des Γ_n et on choisi celle qui coïncide avec l'axe Oz lui-même. On prendra ensuite

$$D = r' = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - vt)^2}{1 - v^2}} \tag{42}$$

et les composantes de $\vec{v}$ s'écrivent

$$v^1 = v^2 = 0 \, , \; v^3 = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \, , \; v^4 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{43}$$

tandis que celles de $\vec{X}$ seront

$$X_1 = \frac{x}{r'} \, , \; X_2 = \frac{y}{r'} \, , \; X_3 = \frac{z - vt}{(1 - v^2)\, r'} \, , \; X_4 = \frac{-v\,(z - vt)}{(1 - v^2) r'} \tag{44}$$

On vérifie immédiatement que

$$v^\sigma X_\sigma = 0 \tag{45}$$

et, dans ce cas particulier, cette relation n'est pas simplement valable au point singulier mais dans tout l'espace. En outre, les $\omega_{l\sigma}$ des solutions singulières sont ici de la forme

$$\omega_{l\sigma} = a_{l\sigma}\, \varepsilon_l \tag{46}$$

avec

$$a_{1\sigma} = -i\,\mu\,\varphi_{1\sigma} \, ; \; a_{2\sigma} = i\,\mu\,\varphi_{2\sigma}$$

où μ est ici une constante arbitraire. Donc,

$$\varphi'_{l\sigma} = \gamma^\sigma\, \partial_\sigma\, \mu_l + k_l\, \mu_l \tag{47}$$

avec

$$u_l = \left| \, u_{l\sigma} \, \right| = \frac{1}{D} \left| \begin{matrix} \omega_{l1} \\ \omega_{l2} \\ \omega_{l3} \\ \omega_{l4} \end{matrix} \right| \tag{48}$$

et nous vérifions que dans le cas présent

$$m_0 = m_1 + m_2 \tag{49}$$

Les potentiels et les champs s'écrivent, avec $\rho' = c^{te}$,

$$\vec{A} = -\frac{h}{8\pi\sqrt{m_o}} \frac{\rho'}{r'^2} E_o \vec{X} ;$$

$$H_x = -\frac{i\sqrt{m_o}}{4\sqrt{1-v^2}} \frac{\rho'}{r'^3} yv\, E_o \; ; \; H_y = \frac{i\sqrt{m_o}}{4\sqrt{1-v^2}} \frac{\rho'}{r'^3} xv\, E_o$$

$$H_z = O \; ; \qquad E_x = \frac{i\sqrt{m_o}}{4\sqrt{1-v^2}} \frac{\rho'}{r'^3} x\, E_o \tag{50}$$

$$E_y = \frac{i\sqrt{m_o}}{4\sqrt{1-v^2}} \frac{\rho}{r'^3} y\, E_o \; ; \; E_z = E_z = \frac{i\sqrt{m_o}}{4\sqrt{1-v^2}} \frac{\rho'}{r'^3} (3 - vt)\, E_o$$

et on constate tout de suite que les équations de Maxwell sont vérifiées. On peut d'autre part remarquer sur (50) que la jauge transverse est nulle vu que

$$\vec{A} . \vec{v} = 0 \tag{51}$$

tandis que la jauge de Lorentz

$$J = \partial_\sigma A^\sigma = \frac{h\,\rho'}{8\,\pi\sqrt{m_o}} \varepsilon_o \,\square \left(\frac{1}{r'}\right) \tag{52}$$

n'est nulle que dans le complémentaire du point singulier; plus exactement, J est égale, à un facteur près, à la distribution de Dirac. Ce fait provient de ce que nous avons adopté des solutions singulières en $1/r'$, qui sont solutions de (2) où le second membre est aussi, à un facteur près, une distribution de Dirac.

Enfin, le vecteur courant a pour valeur principale au voisinage du point singulier

$$\vec{j} \sim \frac{1}{r'^4} \frac{\rho' \rho'^*}{8} \vec{v} \tag{53}$$

et le théorème du guidage est bien automatiquement vérifié.

Nous voudrions exprimer notre reconnaissance à M. LOUIS DE BROGIE pour l'intêret qu'il a accordé à ces recherches. Nous remercions aussi MM. J. ANDRADE E SILVA et G. LOCHAK pour plusieurs discussions utiles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DE BROGLIE, L. — *Une Tentative d'Interprétation Causale et Non Linéaire de la Méchanique Ondulatoire*, Paris, Gauthier-Villars, 1956.
[2] DE BROGLIE, L. — *La Thermodynamique de la Particule Isolée*. Paris, Gauthier-Villars, 1964.
[3] THIOUNN MUMM — *C. R. Ac. Sc. Paris*, 259, 2366, 1964.
[4] DE BROGLIE, L. — *Théorie Générale des Particules à Spin*. Paris, Gauthier-Villars, 1954.
[5] THIOUNN MUMM — *Cahier de Physique*, n.º 174, 1965.
[6] THIOUNN MUMM — *C. R. Ac. Sc. Paris*, 260, 422, 1965.