LE TRANSFERT DE LA CHALEUR ET LA NON INVARIANCE RELATIVISTE DES PRESSIONS. LE FORMALISME INVARIANT DE LA MECANIQUE NON ADIABATIQUE DES MILIEUX CONTINUS (*)

António Brotas (**)

RÉSUMÉ — On utilise une méthode élémentaire pour montrer que l'invariance relativiste des pressions, en général admise, n'est valable que dans les problèmes adiabatiques (flux de chaleur nul).

On présente les formules générales de transformation des tensions, dans les cas adiabatique et non adiabatique, et on développe, dans une bonne concordance avec ces formules, un formalisme invariant de la mécanique non adiabatique des milieux continus, généralisation du formalisme adiabatique usuellement présenté.

On montre que les formules proposées conduisent dans tous les cas à la formule de transformation $\Delta Q = \Delta Q_0 \sqrt{1-\beta^2}$.

(Dans le cas particulier d'une surface traversée normalement par un flux q_0 on propose $p = p_0 + \frac{q_0 v}{c^2}$ au lieu de $p = p_0$).

NOTATIONS — Dans ce texte le mot référentiel signifie toujours référentiel d'inertie.

Dans chaque référentiel nous adoptons un systhème de coordonnées où x^1, x^2, x^3 sont des coordonnées spatiales orthonormales et $x^4 = \mathrm{ct}$.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ désignent les vecteurs unités associés au systhème considéré.

Quand nous parlons d'un référentiel K_0 et d'un autre référentiel K l'orientation des axes adoptée en K est celle qu'on obtient de l'orientation des axes de K_0 par une transformation de Lorentz sans rotation.

Les indices latins varient de 1 à 3.

Les indices grecs varient de 1 à 4.

(*) Reçu le 17 janvier 1968.

(**) Boursier de la Fondation Calouste Gulbenkian.
33, Av. Reille — Paris 14ème.

I — INTRODUCTION

Planck a montré au commencement de la Relativité que la pression est un invariant relativiste [1]. Ce résultat assez souvent repris exige une certaine attention.

Si nous avons un corps C imobile dans le référentiel K_o et nous considérons en K_o les pressions dans les points de C (points de son intérieur ou de sa frontière) nous considérons des pressions sur des éléments de surface fixes en K_o. Si nous étudions dans un autre référentiel K les pressions dans le même corps C, nous continuerons à considérer des pressions sur des éléments de surface liés au corps, mais, cette fois-ci, mobiles en K. Dans le référentiel K_o les composantes des pressions sur trois plans convenablement choisis peuvent être présentées sous la forme des composantes d'un tenseur d'efforts à trois dimensions $\overset{o}{p}{}^{ij}$. Dans le référentiel K nous pouvons faire de même, les trois plans étant naturellement des plans liés au corps et en conséquence mobiles en K. Nous définissons ainsi en K le tenseur p^{ij}.

En K_o les composantes du tenseur $\overset{o}{p}{}^{ij}$ sont égales aux 9 composantes du tenseur impulsion-énergie d'indices variant de 1 à 3, mais cette égalité n'est vraie que dans le référentiel propre K_o. Dans un autre référentiel K les composantes du tenseur de pressions p^{ij} sont en général différentes des composantes du tenseur impulsion-énergie (1).

Le résultat de Planck rappelé ci-dessous concerne seulement le cas particulier de la tension isotrope. Dans ce cas, localement, la pression sur une section avec une direction quelconque est normale et toujours la même, et on peut utiliser un scalaire pour la représenter. La tension étant isotrope en K_o elle est aussi isotrope dans tout autre référentiel K,

---

(1) Les composantes du tenseur impulsion-énergie d'indices variant de 1 à 3 sont aussi, quelquefois, désignées dans tous les référentiels par le nom de pressions et de cette double utilisation du même mot il résulte une certaine confusion. Dans ce texte nous employerons toujours le mot pression dans le premier sens.

et le scalaire qui représente la pression sur une section quelconque a la même valeur en K_o et en K. C'est cela l'invariance des pressions. Dans le cas général, où il faut utiliser toutes les composantes de p_o^{ij} pour décrire l'état de tension dans un point, la situation est plus complexe et les tenseurs p_o^{ij} et p^{ij} ne sont pas égales. On peut même montrer que, tandi que p_o^{ij} est toujours symétrique, dans un référentiel K quelconque p^{ij} est en général asymétrique [2, 3].

L'invariance des pressions est souvent utilisée dans les problèmes de Mécanique pour déterminer dans des référentiels différents le travail fourni à un corps. Récemment [4], M. ARZELIÈS, dans un raisonnement tendant à établir la formule relativiste de transformation de la chaleur, a utilisé l'invariance des pressions pour le calcul d'un travail, ce qui l'a conduit à la formule

$$\Delta Q = \frac{\Delta Q_o}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{I-1}$$

Ainsi il s'est trouvé en contradiction avec d'autres auteurs qui, par des voies différentes, arrivent à la loi de transformation

$$\Delta Q = \Delta Q_o \sqrt{1-\beta^2} \tag{I-2}$$

M. R. PENNEY [5] a critiqué directement le texte [4], mais, dans les points où il est attaqué, le raisonnement de M. ARZELIÈS est irréprochable. En regardant de près cette question nous avons été amenés à penser que la seule erreur de M. ARZELIÈS est celle d'avoir utilisé l'invariance relativiste des pressions dans un problème de Thermodynamique. D'après les textes de PLANCK, VAN LAUE et MØLLAR, qui étudient la transformation des pressions à partir du formalisme de la mécanique des milieux continus, on constate que le problème qu'ils étudient est un problème purement mécanique où le transfert de chaleur est nul. Ce n'est pas le cas courant en Thermodynamique et notamment ce n'est pas le cas dans le problème envisagé par M. ARZELIÈS.

L'utilisation d'une méthode élémentaire [6] nous a permis de mettre en évidence l'influence du flux de chaleur sur la variation relativiste des pressions. Dans un cas simple où ce flux était différent de zéro nous avons montré que la pression n'était pas un invariant.

C'est le problème général de la transformation relativiste des pressions dans le cas non adiabatique qui est traité dans les pages qui suivent. Nous montrerons notamment que, en utilisant les formules correctes de transformation des pressions dans le cas non adiabatique, et en utilisant le même raisonnement de M. ARZELIÈS, on retrouve la formule $\Delta Q = \Delta Q_o \sqrt{1-\beta^2}$.

Nous avions deux voies pour aborder le problème. La première: partir du formalisme invariant de la Mécanique adiabatique des milieux continus, essayer de constuire une extension valable pour le cas non adiabatique, établir ensuite les rapports entre les composants du tenseur impulsion-énergie, les pressions et le flux de chaleur (dans les différents référentiels). La seconde: continuer à utiliser la méthode élémentaire qui nous avait déjà apporté des résultats.

C'est la deuxième voie que nous avons adoptée. Nous avons montré d'abord que la méthode était valable pour resoudre n'importe quel problème adiabatique ou non adiabatique. Ensuite, les calculs étant très longs, sans changer les fondements de la méthode, nous avons cherché un processus de calcul plus commode à manipuler. Cela nous a permis d'écrire les formules générales de transformation des pressions et du flux de la chaleur et fait apparaître le tenseur impulsion-énergie. Ce n'est qu'à la fin que, guidés par des résultats déjà acquis, nous avons construit un formalisme invariant de la Mécanique non adiabatique des milieux continus, compatible dans le référentiel propre avec des équations établies directement à partir de la Physique Classique et des fondements de la Relativité, et extension naturel du formalisme adiabatique. Nous regardons la construction de ce formalisme comme une excellente confirmation des résultats auxquels nous étions arrivés auparavant.

II — UNE METHODE ELEMENTAIRE

Soit un corps imobile dans un référentiel K_o. Considérons un élément de surface ΔS_o lié au corps et normal à l'axe Ox. Admettons qu'un flux de chaleur q_o traverse normalement ΔS_o.

Dans l'intervalle Δt_o la quantité de chaleur qui traverse ΔS_o est:

$$\Delta Q_o = \Delta S_o q_o \Delta t_o. \tag{II-1}$$

ΔS_o étant imobile en K_o, l'énergie totale qui en K_o traverse ΔS_o dans l'intervalle Δt_o est:

$$\Delta w_o = \Delta Q_o . \tag{II-2}$$

Pour représenter un corps dans ces conditions imaginons un modèle dans lequel le transport d'énergie est fait par une onde de vitesse c. Dans ce modèle nous avons à considérer le 4-vecteur V dont les composantes en K_o

$$V^o = \left(\frac{\Delta w_o}{c}, 0, 0, \frac{\Delta w_o}{c} \right) \tag{II-3}$$

représentent la quantité de mouvement et l'énergie (divisée par c) de la fraction d'onde qui traverse ΔS_o en Δt_o.

Dans le cas q_o constant et uniforme sur ΔS_o, la pression p_o sur ΔS_o due à l'onde est:

$$p_o = \frac{\Delta w_o}{c \, \Delta S_o \, \Delta t_o} . \tag{II-4}$$

Introduisons un autre référentiel K, v étant la vitesse de K_o par rapport à K. Les composantes en K du 4-vecteur V sont:

$$V^3 = \left(\frac{\Delta w_o (1 + \beta)}{c \sqrt{1 - \beta^2}}, 0, 0, \frac{\Delta w_o (1 + \beta)}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \right) \; ; \; \beta = \frac{b}{c} . \tag{II-5}$$

Ces composantes représentent la quantité de nouvement et l'énergie (divisée par c) mésurées en K de la même fraction d'onde ci-dessus considérée.

L'élément de surface ΔS_o fixe en K_o mésure, en K, $\Delta S = \Delta S_o$ et l'événement de durée Δt_o sur ΔS_o en K_o a, en K, une durée

$$\Delta t = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta t_o R^{-1} \quad ; \quad R = \sqrt{1 - \beta^2} . \tag{II-6}$$

En K la quantité de mouvement

$$\Delta I = \frac{\Delta\, w_{\circ}(1+\beta)}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \Delta\, w_{\circ}(1+\beta) R^{-1} c^{-1} \tag{II-7}$$

traverse l'élément de surface mobile ΔS dans l'intervalle Δt. La pression sur la surface mobile $\Delta\ S$ est donc:

$$p = \frac{\Delta\, w_{\circ}(1+\beta) R^{-1}}{c\,\Delta\, t_{\circ} R^{-1}\,\Delta\, S_{\circ}} = p_{\circ}(1+\beta) = p_{\circ} + \frac{v\, q_{\circ}}{c^2}. \tag{II-8}$$

L'expression du premier principe $\Delta w = \Delta Q + \Delta \mathcal{T}$ va nous permettre de définir en K la quantité de chaleur ΔQ et le flux q qui traversent l'élément de surface mobile ΔS.

L'énergie qui traverse ΔS sous forme de travail dans l'intervalle $\Delta\ t$ est

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{T} &= p\,\Delta S\, v\,\Delta\, t = \\ &= (p_{\circ} v + \beta^2 q_{\circ})\,\Delta S_{\circ} \Delta\, t_{\circ} R^{-1} = \Delta\, Q_{\circ}(\beta+\beta^2) R^{-1}. \end{aligned} \tag{II-9}$$

L'énergie totale qui traverse $\Delta\ S$ (la quatrième composante de V multipliée par c) est

$$\Delta w = \Delta w_{\circ}(1+\beta) R^{-1} \quad ; \quad \Delta w_{\circ} = \Delta\, Q_{\circ}. \tag{II-10}$$

Nous trouvons donc:

$$\Delta\ Q = \Delta w - \Delta \mathcal{T} = \Delta\, Q_{\circ}\sqrt{1-\beta^2} \tag{II-11}$$

et nous pouvons encore définir:

$$q = \frac{\Delta\, Q}{\Delta S\, \Delta t} = q_{\circ}(1-\beta^2). \tag{II-12}$$

Soit maintenant le cas adiabatique. Prenons l'exemple simple d'un corps homogène, immobile en $K_{\circ}$, soumis à une tension uniforme qui se traduit par une pression $p_{\circ}$ normale sur les sections perpendiculaires à Ox et par des pressions nulles sur les sections paralèles à Ox. Pour représenter un corps dans ces conditions nous pouvons envisager un modèle dans lequel les éléments de surface normaux à Ox sont traversés en sens contraire par deux ondes égales de vitesse c, de direction de propagation parallèle à Ox.

Des calculs simples montrent que la pression p sur ΔS reste invariante dans une transformation de Lorentz parallèle à Ox, et que l'énergie sous forme de travail et l'énergie totale qui traversent ΔS en K sont égales. Nous avons donc $q_o = 0$ et $\Delta Q_o = 0$ en K_o, et $q = 0$ et $\Delta Q = 0$ en K.

Dans un cas plus complexe, pour traduire deux données initiales q_o et q_o arbitraires, nous pouvons imaginer un modèle formé par la superposition des deux modèles que nous venons d'étudier. Nous constatons immédiatement que dans une transformation de Lorentz parallèle à Ox la formule

$$p = p_o + \frac{v\,q_o}{c^2} \quad \left(p = p_o - \frac{v\,q_o}{c^2} \quad \begin{array}{l}\text{si } v \text{ et } q_o \text{ ont}\\ \text{sens contraires}\end{array}\right) \tag{II-13}$$

et les formules (II-11) et (II-12) restent valables.

Nous pouvons vérifier que ces résultats, obtenus dans l'étude d'un modèle particulier, restent valables quels que soient les modèles relativistes considérés pour reproduire en K_o les données p_o et q_o. Admettons, par exemple, que, en K_o, l'élément ΔS_o est traversé normalement en sens contraire par des masses propres égales (et égales à m_o durant l'intervalle Δt_o) qui se déplacent avec les vitesses v_1 et v_2. Nous avons à considérer les deux 4-vecteurs V_1 et V_2 dont les composantes en K_o sont:

$$\begin{gathered} V_1^{\jmath} = (m_o v_1 R_1^{-1}, 0, 0, m_o c R_1^{-1}) \quad ; \\ R_1 = \sqrt{1-\beta_1^2} \ ; \ \beta_1 = \frac{v_1}{c} \\ \\ V_2^{\jmath} = (-m_o v_2 R_2^{-1}, 0, 0, m_o c R_2^{-1}) \quad ; \\ R_2 = \sqrt{1-\beta_2^2} \ ; \ \beta_2 = \frac{v_2}{c}. \end{gathered} \tag{II-14}$$

Soit les données initiales p_o et q_o. Il faut alors que les deux équations

$$q_o = \frac{c^2 m_o (R_1^{-1} - R_2^{-1})}{\Delta t_o \Delta S_o}$$

$$p_o = \frac{m_o v_1 R_1^{-1} + m_o v_2 R_2^{-1}}{\Delta t_o \Delta S_o} \tag{II-15}$$

soient satisfaites. On voit qu'on peut définir arbitrairement la valeur d'une des trois inconnues et déterminer celles des deux autres.

En K, les composantes des deux 4-vecteurs sont:

$$\begin{aligned} V_1^3 &= (m_o(v_1 + v) R_1^{-1} R^{-1}, 0, 0, (m_o c + m_o v_1 \beta) R_1^{-1} R^{-1}) \\ V_\sigma^2 &= (m_o(v_2 - v) R_2^{-1} R^{-1}, 0, 0, (m_o c - m_o v_2 \beta) R_2^{-1} R^{-1}). \end{aligned} \tag{II-16}$$

Le sens physique de ces composantes est clair. La pression sur l'élément de surface mobile ΔS est:

$$p = \frac{(m_o v_1 + m_o v) R_1^{-1} R^{-1} + (m_o v_2 - m_o v_1) R_2^{-1} R^{-2})}{\Delta S_o \, \Delta t_o R^{-1}} \tag{II-17}$$

En utilisant les relations géométriques $\Delta S = \Delta S_o$ et $\Delta t = \Delta t_o R^{-1}$ et les relations (II-15) nous retrouvons (II-13). De même, compte tenu du premier principe, nous retrouvons (II-12). Ces résultats sont donc indépendants des vitesses des ondes considérées.

* * *

La méthode que nous venons d'utiliser dans un cas simple peut être appliquée dans n'importe quel problème de transformation des pressions, adiabatique ou non adiabatique.

Dans le cas général nous avons à considérer comme données un tenseur d'efforts p_o^{ij}, un flux $\vec{q}_o$ et une vitesse relative $\vec{v}$ quelconques. Pour introduire le flux $\vec{q}_o$ dans un modèle nous pouvons envisager, soit une onde de vitesse c (parallèle à $\vec{q}_o$), soit deux ondes de vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ (aussi parallèles à $\vec{q}_o$) qui transportent à travers ΔS_o et en sens contraire des masses propres égales. L'onde ou les ondes considérées introduisent un tenseur d'efforts $p_o'^{ij}$ (variable selon la solution adoptée). Pour introduire le tenseur $p_o''^{ij} = p_o^{ij} - p_o'^{ij}$ qui manque, nous pouvons considérer des paires d'ondes égales mais en sens contraire, avec des vitesses de propagation parallèles aux trois directions principales (orthogonales entre elles) du tenseur $p_o''^{ij}$. Nous pouvons donc, dans tous les cas, et de plusieurs façons, construire des modèles qui reproduisent les données du problème en K_o.

Pour simplifier les calculs et l'exposé, choisissons l'axe Ox avec la direction de $\vec{v}$. Il nous faut étudier du point de vue relativiste un certain nombre d'ondes. Soit une de ces ondes. Pour commodité, chosissons encore les axes Oy et Oz de façon que la vitesse $\vec{v}_1$ de propagation de l'onde soit parallèle au plan yOx. Soit

$$\vec{v}_1 = v_1 \cos\Theta\, \vec{e}_{o1} + v_1 \sin\Theta\, \vec{e}_{o2} \qquad v_1 = |\vec{v}_1|. \tag{II-18}$$

En K_o la direction de propagation de l'onde est normal au plan CB mais elle ne l'est plus en K (fig. 1).

Dans le cas d'une onde de vitesse $\vec{v}_1 = c$ les composantes, en K_o, du 4-vecteur qui représente la quantité de mouvement et la masse qui traversent dans l'intervalle Δt_o l'élément ΔS_o (qui se trouve sur CB sur la figure 1), sont:

$$V^{\mathfrak{I}} = \left(\frac{\Delta w_o}{c} \cos\Theta\, ,\ \frac{\Delta w_o}{c} \sin\Theta,\ 0\, ,\ \frac{\Delta w_o}{c} \right) \tag{II-19}$$

Dans le cas d'une onde de vitesse $v_1 \neq c$ ces composantes deviennent:

$$V^{\mathfrak{I}} = \left(\frac{m_o v_1 \cos\Theta}{\sqrt{1-\beta_1^2}},\ \frac{m_o v_1 \sin\Theta}{\sqrt{1-\beta_1^2}},\ 0\, ,\ \frac{m_o c}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \right)\ ;\ \beta_1 = \frac{v_1}{c} \tag{II-20}$$

Etant donné un plan quelconque (CD par exemple), nous pouvons déterminer sur ce plan un élément de surface $\Delta S'_o$ traversé dans l'intervalle Δt_o par les mêmes quantités de masse et d'impulsion que ΔS_o. L'impulsion qui traverse $\Delta S'_o$ divisée par Δt_o et par l'aire $\Delta S'_o$ donne la pression due à l'onde considérée sur ce deuxième plan.

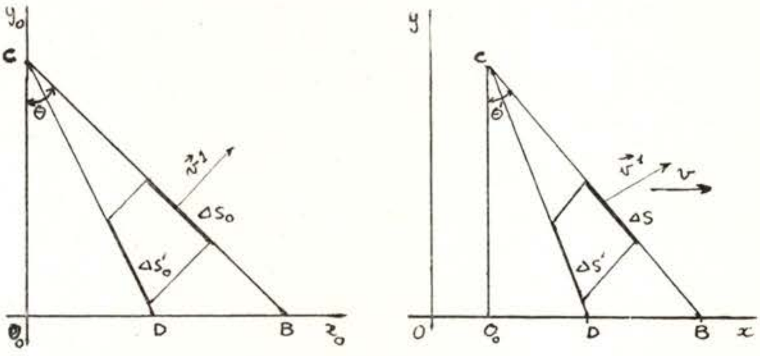

Fig. 1

En K les éléments de surface ΔS_o et ΔS_o sont mobiles, mais ils continuent à être traversés par des quantités de masse et d'impulsion égales. Puisque nous savons déterminer les composantes en K du 4-vecteur V et la géométrie en K des éléments mobiles ΔS_o et $\Delta S'_o$ (nous les désignons en K dans une configuration $t =$ const. par ΔS et $\Delta S'$) nous pouvous déterminer la pression en K sur l'élément de surface mobile $\Delta S'$. Il nous suffit de diviser l'impulsion qui traverse $\Delta S'$ par Δt et par l'aire de $\Delta S'$.

Pour l'ensemble d'un modèle il suffit de faire le calcul pour toutes les ondes que nous avons considéré initialement pour traduire les données initiales p_o^{ij} et $\vec{p}_o$ en K_o.

Des calculs simples mais longs permettent d'énoncer les conclusions suivantes:

1) Les formules de transformation des pressions et des flux obtenues sont indépendantes des modèles utilisés;

2) La formule

$$\Delta Q = \Delta Q_o \sqrt{1-\beta^2}$$

(ΔQ_0 quantité de chaleur qui traverse en K_0 dans un intervalle Δt_0 un élément de surface ΔS_0 imobile en K_0, et ΔQ quantité de chaleur qui traverse en K le même élément de surface dans l'intervalle $\Delta t = \Delta t_0 R^{-1}$ qui correspond à Δt_0) est vraie dans tous les cas;

3) Etant donné un élément de volume d'un corps imobile en K_0, en repos sous la seule action des tensions intérieures, la résultante de toutes les forces de pression sur sa surface est aussi nulle dans le référentiel K. C'est ce fait qui permet l'utilisation d'un tenseur à trois dimensions pour décrire l'état de tension en K. (Il suffit de déterminer la pression en K sur trois plans pour pouvoir déterminer à partir de ces valeurs la pression sur un plan quelconque);

4) Dans les conditions précédentes, le moment par rapport à un point de toutes les forces de pression sur la surface du volume considéré n'est pas en général nul dans le référentiel K. Ce fait se traduit par la non-symétrie du tenseur d'efforts en K;

5) Il est toujours possible d'exprimer le transfert de la chaleur en K par un vecteur flux tridimensionnel $\vec{q}$;

L'égalité de $\vec{q}$ à zéro dans un référentiel quelconque entraîne l'égalité à zéro dans tous les autres référentiels. Le caractère adiabatique d'une transformation est donc indépendant du référentiel où les observations ont lieu;

6) Dans les problèmes adiabatiques $(\vec{q}_0 = 0)$ les composantes normales des pressions sont invariantes.

Un élément de surface fixe en K_0 et mobile en K a en général des orientations différentes dans les deux référentiels. Soient Θ_0 et Θ les orientations en K_0 et K. C'est la composante normal de la pression qui s'exerce en K sur le plan mobile Θ qui est égale à la composante normale de la pression qui s'exerce en K_0 sur le plan fixe Θ_0.

C'est celui-ci le contenu précis de l'expression un peu vague: l'invariance relativiste des pressions. Ce résultat est seulement vrai dans le cas adiabatique et il ne concerne pas les composantes tangentielles des pressions qui, même dans le cas adiabatique, ne sont pas en général invariantes.

*
* *

Sans reproduire les calculs, nous indiquons encore quelques résultats particuliers:

Exemple d'un cas non adiabatique :

En K_o (onde normal à un plan CD parallèle à Oz): vecteur normal au plan CD:

$$\vec{n}_o = \cos\Theta\,\vec{e}_{o_1} + \sin\Theta\,\vec{e}_{o_2}$$

pression sur le plan CD:

$$\begin{cases} \text{comp. normale} = p_o \\ \text{comp. tang.} \quad = 0 \end{cases}$$

pression sur les plans parallèles à $\vec{n}_o$: 0

vecteur flux:

$$\vec{q}_o = q_o \cos\Theta\,\vec{e}_{o_1} + q_o \sin\Theta\,\vec{e}_{o_2} \quad ; \quad q_o = |\vec{q}_o| = p_o\, c$$

pression sur le plan $y\,O\,z$:

$$\vec{p}_{y\,O\,z} = p_o \cos^2\Theta\,\vec{e}_{o_1} + p_o \cos\Theta\,\sin\Theta\,\vec{e}_{o_2}$$

pression sur le plan $x\,O\,z$:

$$\vec{p}_{y\,O\,z} = p_o \cos\Theta\,\sin\Theta\,\vec{e}_{o_1} + p_o \sin^2\Theta\,\vec{e}_{o_2}$$

tenseur d'efforts:

$$p_o^{ij} = \begin{vmatrix} p_o \cos^2\Theta & p_o \cos\Theta \sin\Theta & 0 \\ p_o \cos\Theta \sin\Theta & p_o \sin^2\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En K ($\vec{v}$ vitesse de K_o par rapport à K parallèle à $\vec{e}_1$ avec même sens) angle de CD (mobil) avec Oy: Θ'

$$\operatorname{tang}\Theta' = \operatorname{tang}\Theta \,.\, R$$

vecteur normal à CD:

$$\vec{n} = \cos\Theta' \vec{e_1} + \sin\Theta' \vec{e_2}$$

pression sur le plan $y\,O\,z$:

$$\vec{p}_{y\,O\,z} = p_o(\cos^2\Theta + \beta\cos\Theta)\,\vec{e_1} + \\ p_o(\cos\Theta\sin\Theta\, R^{-1} + \beta\sin\Theta\, R^{-1})\,\vec{e_2}$$

pression sur le plan $x\,O\,z$:

$$\vec{p}_{x\,O\,z} = p_o(\cos\Theta\sin\Theta\, R)\,\vec{e_1} + p_o\sin^2\Theta\,\vec{e_2}$$

pression sur le plan CD:

$$\begin{cases} \text{comp. normal} = p_o + p_o \dfrac{\cos^2\Theta'}{\cos\Theta} \\ \text{comp. tang.} \quad = p_o\,\beta\,\dfrac{\sin\Theta'\cos\theta'}{\cos\Theta} \end{cases}$$

tenseur d'efforts:

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} p_o(\cos^2\Theta + \beta\cos\Theta) & p_o(\cos\Theta\sin\Theta\, R^{-1} + \beta\sin R^{-1}) & 0 \\ p_o\cos\Theta\sin\Theta\, R & p_o\sin^2\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

vecteur flux:

$$\vec{q} = \left(\cos\theta\,(1-\beta^2)\,\vec{e} + \sin\Theta\sqrt{1-\beta^2}\,\vec{e_2}\right) q_o$$

Exemple d'un cas adiabatique

En K_o (deux ondes normales à CD égales mais en sens contraire):

vecteur normal au plan CD:

$$\vec{n}_o = \cos\Theta\,\vec{e}_{o_1} + \sin\Theta\,\vec{e}_{o_2}$$

pression sur le plan CD:

$$\begin{cases} \text{comp. normale} = p_o \\ \text{comp. tang.} \quad = 0 \end{cases}$$

pression sur les plans parallèles à n_o: 0

vecteur flux: 0

pression sur le plan $y\,O\,z$:

$$\vec{p}_{yOz} = p_o \cos^2\Theta\,\vec{e}_{o_1} + p_o \sin\Theta\cos\Theta\,\vec{e}_{o_2}$$

pression sur le plan $x\,O\,z$:

$$\vec{p}_{xOz} = p_o \cos\Theta\sin\Theta\,\vec{e}_{o_1} + p_o \sin^2\Theta\,\vec{e}_{o_2}$$

tenseur d'efforts:

$$p_o^{ij} = \begin{vmatrix} p_o\cos^2\Theta & p_o\cos\Theta\sin\Theta & 0 \\ p_o\cos\Theta\sin\Theta & p_o\sin^2\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En K

vecteur normal à CD:

$$\vec{n} = \cos\Theta'\,\vec{e_1} + \sin\theta'\,\vec{e_2}$$

pression sur le plan $y\,O\,z$:

$$\vec{p}_{yCz} = p_o\cos^2\Theta\,\vec{e_1} + p_o\cos\Theta\sin\Theta\,R^{-1}\,\vec{e_2}$$

pression sur le plan $x\,O\,z$:

$$\vec{p}_{xOz} = p_o\cos\Theta\sin\Theta\,\vec{Re_1} + p_o\sin^2\Theta\,\vec{e_2}$$

pression sur le plan CD:

$$\begin{cases} \text{comp. normale} = p_o \\ \text{comp. tang.} \quad = 0 \\ \text{pression total} = p_o\cos\Theta'\,\vec{e_1} + p_o\sin\Theta'\,\vec{e_2} \end{cases}$$

tenseur d'efforts:

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} p_o\cos^2\Theta & p_o\cos\Theta\sin\Theta\,R^{-1} & 0 \\ p_o\cos\Theta\sin\Theta\,R & p_o\sin^2\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Nous notons l'invariance des composantes normales des pressions sur CD, yOz et xOz et la non invariance des composantes tangentielles sur yOz et xOz.

*

* *

Le résultat indiqué en 1) nous fait croire que la méthode utilisée est bien valable dans cette étude de la transformation relativiste des pressions. Dans le cas adiabatique les résultats auxquels nous arrivons sont en parfaite concordance avec les résultats présentés par les différents auteurs qui étudient ce problème par une voie aujourd'hui classique qui a pour base le formalisme invariant de la Mécanique adiabatique des milieux continus. Ici, avant de nous être occupé de l'établissement d'un formalisme mathématique invariant, nous avons déjà appris à calculer les valeurs des pressions dans n'importe quel référentiel y compris dans le cas non adiabatique.

Nous verrons par la suite que ces résultats sont en bonne concordance avec un formalisme de la Mécanique non adiabatique des milieux continus, prolongement naturel de la Mécanique adiabatique usuellement présentée.

III — INTRODUCTION D'UN FORMALISME TENSORIEL

Le procédé que nous venons d'exposer a l'avantage d'expliciter ce qu'est la pression et le flux de la chaleur pour les observateurs d'un référentiel K quelconque, mais il exige des calculs longs et peu commodes. Nous y avons tenu compte à la fois de deux effets relativistes, un proprement mécanique, un autre géométrique, car, d'un coté, nous avons utilisé des formules de transformation des composantes d'un 4-vecteur, d'un autre nous avons déterminé l'orientation et l'aire de certains éléments de surface et la durée de certains événements dans des référentiels différents.

Nous voulons maintenant construire un instrument mathématique convenable pour rendre compte simultanément de ces deux effets. Pour cela nous commencerons par introduire un 4-vecteur dont l'interprétation géométrique s'adapte fort bien à notre propos.

Soit un corps de volume V_o imobile dans un référentiel K_o. Nous définirons le 4-vecteur X dont les composantes en K_o sont:

$$X^\mu = \left[0,\, 0,\, 0,\, \frac{c}{V_o}\right]. \tag{III-1}$$

Dans un autre référentiel K les composantes de X s'écrivent:

$$X^\mu = \left[\frac{v^1}{V_o\sqrt{1-\beta^2}},\, \frac{v^2}{V_o\sqrt{1-\beta^2}},\, \frac{v^3}{V_o\sqrt{1-\beta^2}},\, \frac{c}{V_o\sqrt{1-\beta^2}}\right] \tag{III-2}$$

($\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3$ vitesse de K_o par rapport à K).

En K, $X^4/_c$ est l'inverse du volume et X^i est l'inverse de la somme des produits des aires d'interception du corps avec un plan fixe en K et normal à $\vec{e}_i$ par les durées des respectives interceptions.

Considérons maintenant un corps homogène sans interactions intérieures (ni pressions internes ni échanges internes d'énergie), immobile en K_o, de masse M_o et volume V_o.

Nous pouvons introduire le 4-vecteur V dont les composantes en K sont:

$$V^\sigma = \left[\frac{M_o\, v^1}{\sqrt{1-\beta^2}},\, \frac{M_o\, v^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\, \frac{M_o\, v^3}{\sqrt{1-\beta^2}},\, \frac{M_o\, c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] \tag{III-3}$$

Ces composantes représentent la quantité de mouvement et la masse (multipliée par c) du corps em K.

Nous pouvons maintenant construire le tenseur:

$$P^{\sigma\mu} = V^\sigma X^\mu\,. \tag{III-4}$$

Ce tenseur est le tenseur impulsion-énergie, qui, dans le cas considéré (masse pure), est généralement présenté sous la forme:

$$P^{\sigma\mu} = \rho_0 \, u^{\sigma} u^{\mu}$$
$$\left(u^{\sigma} = \frac{d x^{\sigma}}{d\tau} \, ; \quad u^{i} = \frac{v^{i}}{\sqrt{1-\beta^2}} \, ; \quad u^{4} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) . \qquad \text{(III-5)}$$

La décomposition $V^{\sigma} X^{\mu}$ indique clairement la signification physique des différents composantes de $P^{\sigma\mu}$. Dans un référentiel K quelconque P^{23}, par exemple, représente la quantité de mouvement dans la direction $\vec{e}_2$ qui traverse dans l'unité de temps une surface unitaire *fixe en* K normal à $\vec{e}_3$. P^{43} est la masse multipliée par c qui dans l'unité de temps traverse la même surface. P^{34} est la densité de quantité de mouvement multipliée par c dans la direction $\vec{e}_3$.

Dans les cas plus complexes les composantes du tenseur impulsion-énergie gardent la signification physique que nous venons de voir dans ce cas particulièrement simple. Nous verrons en effet que, dans tous les cas, le tenseur impulsion-énergie peut être présenté comme la somme de produits de vecteurs V par des vecteurs X.

Soit l'exemple du modèle présenté dans la page 7. Dans ce modèle nous avons considéré une onde d'énergie Δw_0 et de vitesse c qui traverse dans l'intervalle Δt_0 l'élément de surface ΔS_0 (normal à Ox). À cette onde nous avons fait correspondre le 4-vecteur V dont les composantes en K_0 sont:

$$V^{\sigma} = \left(\frac{\Delta w_0}{c}, 0, 0, \frac{\Delta w_0}{c} \right) . \qquad \text{(III-6)}$$

Nous ne pouvons pas parler du volume de cette onde dans son référentiel propre puisque sa vitesse est c, mais nous pouvons définir le 4-vecteur X qui lui est associé à partir de la signification de ses composantes dans un référentiel quelconque. En K_0, les composantes de ce 4-vecteur X sont:

$$X^{\sigma} = \left(\frac{1}{\Delta S_0 \Delta t_0}, 0, 0, \frac{1}{\Delta S_0 \Delta t_0} \right) \qquad \text{(III-7)}$$

À partir de V et X nous pouvons construire le tenseur

$$P^{\sigma\mu}=V^{\sigma}X^{\mu}=\begin{vmatrix} \dfrac{\Delta w_o}{\Delta S_o \Delta t_o c} & 0 & 0 & \dfrac{\Delta w_o}{\Delta S_o \Delta t_o c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\Delta w_o}{\Delta S_o \Delta t_o c} & 0 & 0 & \dfrac{\Delta w_o}{\Delta S_o \Delta t_o c} \end{vmatrix}= \begin{vmatrix} p_o & 0 & 0 & p_o \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_o & 0 & 0 & p_o \end{vmatrix} \tag{III-8}$$

qui est la contribution de l'onde considérée pour le tenseur d'impulsion énergie total.

Dans le cas du modèle de page II-3 où la pression est due à deux ondes oposées et le flux de chaleur est nul. il nous faut considérer les deux vecteur V_1 et V_2 et les deux vecteur X_1 et X_2 dont les composantes en K_o sont:

$$\begin{aligned} V_1^{\sigma} &= \left(\frac{\Delta w_o}{c}, \ 0 \ , \ 0 \ , \frac{\Delta w_o}{c}\right) \\ V_2^{\sigma} &= \left(-\frac{\Delta w_o}{c}, \ 0 \ , \ 0 \ , \frac{\Delta w_o}{c}\right) \end{aligned} \tag{III-9}$$

et

$$\begin{aligned} X_1 &= \left(\frac{1}{\Delta S_o \Delta t_o}, 0, 0, \frac{1}{\Delta S_o \Delta t_o}\right) \\ X_2 &= \left(-\frac{1}{\Delta S_o \Delta t_o}, 0, 0, \frac{1}{\Delta S_o \Delta t_o}\right) \end{aligned} \tag{III-10}$$

$$\left(p_o = \frac{2 w_o}{\Delta S_o \Delta t_o c}\right)$$

La contribution de ces deux ondes pour un tenseur d'impulsion-énergie total est:

$$P^{\sigma\mu} = V_1^\sigma X_1^\mu + V_2^\sigma V_2^\mu = \begin{vmatrix} p_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_o \end{vmatrix} \qquad \text{(III-11)}$$

Considérons maintenant le cas d'un corps homogène, immobile en K_o, de masse M_o et volume V_o soumis dans les sections parallèles à yOz à une pression normal p_o et traversé par un flux q_o parallèle à Ox. Si nous considérons un modèle relativiste où des ondes de vitesse c sont responsables pour la pression p_o et le flux q_o, le tenseur impulsion-énergie obtenu à partir de ce modèle sera:

$$P^{\sigma\mu} = \begin{vmatrix} \frac{q_o}{c} & 0 & 0 & \frac{q_o}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q_o}{c} & 0 & 0 & \frac{q_o}{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_o - \frac{q_o}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_o - \frac{q_o}{c} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M_o c^2}{V_o} - p_o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{p_o}{c} & 0 & 0 & \frac{q_o}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q_o}{c} & 0 & 0 & \rho_o c^2 \end{vmatrix} \qquad \text{(III-12)}$$

Les trois parcelles sont respectivement les contributions de l'onde responsable pour le flux q_o $\left(\text{onde qui provoque une pression égale à } \frac{q_o}{c}\right)$, des deux ondes responsables pour la pression $p_o - \frac{q_o}{c}$, et de la partie matière pure (sans interactions internes) de masse égale à la différence entre la masse totale et la masse des ondes.

Nous avons vu que, pour traduire les données initiales p_o, q_o, ρ_o, le modèle indiqué n'était pas unique. D'autres modèles, avec des ondes de vitesses différentes de c, sont aussi satisfaisantes. Si nous construisons le tenseur impulsion-énergie à partir d'un de ces modèles nous trouvons des vecteurs V et X différents des antérieurs et les termes qui apparaissent dans la composition du tenseur total sont différents, mais leur somme reste toujours la même. Ce résultat est général. Le tenseur impulsion-énergie, quelque soit le modèle relativiste considéré pour interpréter les données — état de tension, flux de chaleur et densité d'un corps dans le référentiel propre — reste le même. Des calculs fastidieux mais sans difficulté montrent que les composantes de ce tenseur dans le référentiel propre s'écrivent

$$P^{\sigma\mu} = \begin{vmatrix} p_o^{11} & p_o^{12} & p_o^{13} & \dfrac{q_o^1}{c} \\ p_o^{21} & p_o^{22} & p_o^{23} & \dfrac{q_o^2}{c} \\ p_o^{31} & p_o^{32} & p_o^{33} & \dfrac{q_o^3}{c} \\ \dfrac{q_o^1}{c} & \dfrac{q_o^2}{c} & \dfrac{q_o^3}{c} & \rho_o c^2 \end{vmatrix} \qquad \text{(III-13)}$$

$P^{\sigma\mu}$ étant dans toutes les cas donnés par une somme de produits $V^\sigma X^\mu$, ses composantes dans un référentiel K quelconque [nous les déterminons facilement à partir de (III-13)] ont la même signification physique que dans le cas de la matière pure examiné auparavant.

C'est cette signification qui va nous permetre d'écrire les relations entre les composantes de $P^{\sigma\mu}$, le tenseur tridimensionnel d'efforts et le flux de chaleur dans un référentiel K quelconque.

P^{ij} étant la quantité de mouvement dans la direction $\vec{e}_i$ qui traverse dans l'unité de temps une surface unitaire fixe en K et normal à $\vec{e}_j$, et P^{i4} étant la densité de quantité de mouvement multipliée par c dans la direction $\vec{e}_i$, la quantité de mouvement dans la direction $\vec{e}_i$ qui traverse dans l'unité de temps une section unitaire normal à $\vec{e}_j$ et mobile en K avec la vitesse $\vec{v}$ sera

$$p^{ij} = P^{ij} - \frac{P^{i4} v^j}{c}. \qquad \text{(III-14)}$$

p^{ij} est donc la composante dans la direction $\vec{e}_i$ de la pression sur la section considérée. Dans un simple changement de coordonnées spatiales les p^{ij} se transforment comme les composantes d'un tenseur. Cela nous permet de parler d'un tenseur tridimensionnel d'efforts.

Pour déterminer en K le flux de chaleur qui traverse les surfaces mobiles en K (fixes en K_0) il nous faut connaître l'énergie totale et l'énergie sous forme de travail qui traversent ces surfaces.

p^{4i} étant l'énergie (dans le sens masse-énergie) divisée par c qui traverse dans l'unité de temps la surface unitaire fixe en K normale à $\vec{e}_i$, et P^{44} étant la densité d'énergie, l'énergie qui traverse la surface unitaire normal à $\vec{e}_i$, mobile avec la vitesse $\vec{v}$, est

$$w^j = P^{4j} c - P^{44} v^j \tag{III-15}$$

La pression sur cette surface étant p^{ij}, l'énergie qui la traverse dans l'unité de temps sous forme de travail est:

$$\tau^i = \sum_s p^{si} v^s = \sum_s \left(P^{si} v^s - \frac{P^{s4} v^i v^s}{c} \right) \tag{III-16}$$

La fraction d'énergie qui dans l'unité de temps passe d'un côté à l'autre sous forme de chaleur est donc

$$\begin{aligned} q^i = w^i - \tau^i = P^{4i} c - P^{44} v^i - \sum_s p^{si} v^s = \\ = P^{4i} c - P^{44} v^i - \sum_s P^{si} v^s + \sum_s \frac{P^{s4} v^i v^s}{c} . \end{aligned} \tag{III-17}$$

Dans une simple transformation de coordonées spatiales les valeurs q^i se transforment comme les composantes d'un vecteur. Nous pouvons donc parler du vecteur (tridimensionnel) flux de chaleur dans un référentiel K: $\vec{q} = q^i \vec{e}_i$.

Les formules (III-14), (III-17), l'expression (III-13) et les formules de transformation des composantes des tenseurs à quatre dimensions permettent d'établir aisément des rapports entre les valeurs des pressions et des flux de chaleur dans des référentiels différents. Les résultats coïncident avec ceux indiqués dans la section II. Entre les deux méthodes exposées il y a seulement une différence de technique mathématique, les fondements physiques restent les mêmes.

Nous n'avons consideré jusqu'ici que des corps homogènes soumis à des conditions uniformes et constantes, mais nous pouvons aussi bien envisager le cas des corps non-homogènes soumis à des conditions non uniformes et variables en les regardant, pendant des periodes très courtes, comme composés par des regions très petites. Les résultats précédents restent valables, peut-être avec la restriction que les variations ne soient pas trop brusques. Nous les utiliserons dans la section suivante où nous établirons le formalisme invariant de la Mécanique non adiabatique des milieux continus.

IV — LA MECANIQUE NON ADIABATIQUE DES MILIEUX CONTINUS

En Physique Classique les équations de la Mécanique des milieux continus s'écrivent:

$$\begin{aligned} &a) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_r p^r = 0 \quad ; \quad p^r = \rho v^r \\ &b) \qquad \rho \gamma^r + \partial_q p^{rq} = f^r \quad ; \quad p^{rq} = p^{qr} \end{aligned} \qquad \text{(IV-1)}$$

(ρ densité; $\vec{v}$ vitesse; $\vec{\gamma}$ accélération: p^{rq} tenseur d'efforts intérieurs, $\vec{f}$ densité de forces extérieures par unité de volume).

Quand $\vec{v} = 0$ ces équations peuvent être mises sous la forme:

$$\begin{aligned} &a) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_r (\rho v^r) = 0 \\ &b) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^r) + \partial_q p^{rq} = f^r \end{aligned} \qquad \text{(IV-2)}$$

Ces dernières équations ne sont valables que dans le référentiel propre. Dans la première équation, simple équation de conservation de la masse, $\rho \vec{v}$ est un flux de masse. Dans la seconde, qui établit un rapport entre les forces et la variation de quantité de mouvement, $\rho \vec{v}$ est une densité de quantité de mouvement.

En Relativité les équations dans le referentiel propre usuelement présentées [7,8] sont:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_r \left(\rho v^r - \frac{1}{c^2} p^{rq} v_q \right) = 0 \quad ; \quad v_a = - v^q \\
&b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho v^r - \frac{1}{c^2} p^{rq} v_q \right) + \partial_q p^{rq} = f^r
\end{aligned}
\qquad \text{(IV-3)}
$$

Ces équations peuvent être établies à partir des équations (IV-2) et de l'équivalence relativiste entre masse et énergie. Cette équivalence oblige à introduire dans les équations *a*) et *b*) un flux de masse-énergie et une densité de mouvement dûs à l'énergie transmise sous forme de travail. Nous faisons remarquer que les équations (IV-3) sont seulement valables dans le cas adiabatique où le transfert d'énergie sous forme de chaleur est nul.

Pour obtenir les équations relativistes valables dans un référentiel quelconque, on introduit usuellement un tenseur et un 4-vecteur dont les composantes dans le référentiel propre sont:

$$
P^{\star \sigma \mu} = \begin{vmatrix} p_o^{11} & p_o^{12} & p_o^{13} & 0 \\ p_o^{21} & p_o^{22} & p_o^{23} & 0 \\ p_o^{31} & p_o^{32} & p_o^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(IV-4)}
$$

et

$$
F^\sigma = (f_o^1, f_o^2, f_o^3, 0),
$$

et on considère en suite l'équation invariante:

$$
\partial_\mu (\rho_o u^\sigma u^\mu + P^{\star \sigma \mu}) = F^\sigma \qquad (\rho_o \text{ densité dans le référentiel propre}) \qquad \text{(IV-5)}
$$

Si la condition:

$$\partial_q p^{rq} = \partial_q P^{\star\, rq} \qquad \text{(IV-6)}$$

est vérifiée dans le referentiel propre, il est possible de montrer que, dans ce référentiel, l'équation (IV-5) s'identifie avec les équations (IV-3) [7,8].

Le tenseur

$$P^{\sigma\mu} = \rho_0\, u^\sigma\, u^\mu + \mathrm{P}^{\star\,\sigma\mu}$$

coïncide avec le tenseur d'impulsion énergie que nous avons introduit dans la section antérieure. La relation

$$p^{ij} = P^{ij} - \frac{P^{i4}\, v^j}{c} \qquad \text{(III-14)}$$

que nous avons trouvée dans cette section entraîne *dans le cas adiabatique* la vérification de (IV-6) dans le référentiel propre. L'équation (IV-5) est donc l'équation invariante de la Mécanique adiabatique des milieux continus.

L'introduction de la condition (IV-6) n'est pas en général discutée. La formule (III-14) montre pourtant qu'elle est vérifiée dans le cas adiabatique, mais nullement dans le cas non adiabatique. C'est une relation différente de la relation (IV-6) qui va permettre la construction d'un formalisme invariant de la Mécanique non adiabatique des milieux continus.

Nous avons dit que les équations (IV-3) n'étaient valables que dans le cas adiabatique. Dans le cas non adiabatique, où on doit considérer le flux d'énergie transmis sous forme de chaleur, nous proposons, toujours dans le référentiel propre, les équations:

$$a)\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_r \left(\rho\, v^r - \frac{1}{c^2} p^{rq}\, v_r \right) + \partial_r \frac{q^r}{c^2} = 0$$

$$\text{(IV-7)}$$

$$b)\quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho\, v^r - \frac{1}{c^2} p^{rq}\, v_q \right) + \partial_q p^{rq} + \partial_t \frac{q^r}{c^2} + \partial_s \left(\frac{v^s\, q^r}{c^2} \right) = f^r$$

Pour les établir nous nous sommes borné à considérer, outre le flux de masse et la densité de quantité de mouvement dûs à l'énergie transmise sous forme de travail, le flux de masse et la densité de quantité de mouvement dûs à l'énergie transmise sous forme de chaleur. L'introduction des termes $\partial_r \frac{q^r}{c^2}$ et $\partial_t \frac{q^r}{c^2}$ est simple, celle du terme $\partial_s \left(\frac{v^s q^r}{c^2} \right)$ deviendra plus claire quand nous écrions l'équation (IV-7) sous une forme qui explicite mieux son contenu physique.

Partons de l'équation:

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}^{\,\star} \delta v) = \vec{f}^{\,\star} \delta v \tag{IV-8}$$

$\vec{f}^{\,\star}$ densité de force total qui s'exerce dans le volume δv.

$\vec{f}^{\,\star}$ est égale à la densité de force extérieure moins la divergence du tenseur d'efforts intérieurs.

$$f^{\star q} = f^q - \partial_q p^{rq} \tag{IV-9}$$

$\vec{p}^{\,\star}$ densité total de quantité de mouvement

$$p^{\star r} = \rho v^r - \frac{1}{c^2} p^{rq} v_q + \frac{q^r}{c^2} \tag{IV-10}$$

En développant les calculs et en divisant par δv nous trouvons dans le référentiel propre (IV-7*b*).

Pour établir les équations invariantes dans le cas non adiabatique nous conservons le même 4-vecteur F^{ν} et nous définissons le tenseur $P^{\star \sigma \mu}$ par la formule:

$$P^{\star \sigma \mu} = \left| \begin{array}{cccc} p_o^{11} & p_o^{12} & p_o^{13} & \frac{q_o^1}{c} \\ p_o^{1} & p_o^{22} & p_o^{23} & \frac{q_o^2}{c} \\ p_o^{31} & p_o^{32} & p_o^{33} & \frac{q_o^3}{c} \\ \frac{q_o^1}{c} & \frac{q_o^2}{c} & \frac{q_o^3}{c} & 0 \end{array} \right| \tag{IV-11}$$

dans le référentiel propre.

Le tenseur $P^{\sigma\mu} = \rho_o u^\sigma u^\mu + P^{\star\sigma\mu}$ coïncide aussi dans ce cas avec le tenseur impulsion-énergie défini dans la section antérieure. Nous avons démontré, outre la relation (III-14), la relation

$$q^j = P^{4j} c - P^{44} v^j - \sum_s p^{sj} v^s \tag{III-17}$$

En utilisant ces deux relations nous allons montrer que, dans le référentiel propre, l'équation (IV-5) [$P^{\star\sigma\mu}$ défini par (IV-11)] s'identifie avec les équations (IV-7).

Dans le référentiel propre nous avons:

$$u^i = 0 \; ; \; u^4 = c \; ; \; \partial_\lambda u^r = \partial_\lambda v^r \; ; \; \partial_\lambda u^4 = 0 \tag{IV-12}$$

L'équation (IV-5) nous donne quatre équations qui, dans le référentiel propre, prennent la forme:

$$\begin{aligned} &a) \qquad \rho_o c \, \partial_r v^r + \partial_r P^{\star 4r} + c \frac{\partial \rho_o}{\partial t} + \partial_4 P^{\star 44} = 0 \\ &b) \qquad \partial_q P^{\star rq} + \rho_o \frac{\partial v^r}{\partial t} + \partial_4 P^{\star r4} = f^r \end{aligned} \tag{IV-13}$$

En faisant les substitutions (III-14) et (III-17) dans l'équation (IV-7*a*) nous trouvons:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_r \left(\rho v^r - \frac{1}{c^2} p^{rq} v_q \right) + \\ &\frac{1}{c^2} \, \partial_r (P^{4r} c - P^{44} v^r - \sum_s p^{sr} v^s) = 0 \end{aligned} \tag{IV-7 a-1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_r (\rho v^r) + \frac{1}{c^2} \partial_r (P^{\star 4r} c + \\ &\rho_o u^4 u^r c - P^{\star 44} v^r - \rho_o u^4 u^4 v^r) = 0 \end{aligned} \tag{IV-7 a-2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_r (\rho v^r) + \frac{1}{c} \partial_r P^{\star 4r} = 0 \tag{IV-7 a-3}$$

Dans un référentiel quelconque la densité est donnée par

$$\rho c^2 = \rho_o u^4 u^4 + P^{\star 44}$$

(dans le référentiel propre $\rho = \rho_o$). En faisant ces substitutions en (IV-7 a-3) nous trouvons (IV-13 a).

Pour l'équation (IV-7*b*), en faisant les mêmes substitutions, il vient successivement:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^r - \frac{1}{c^2} p^{rq} v_q\right) + \partial_q\left(P^{rq} - \frac{P^{r4} v^q}{c}\right) + \frac{1}{c^2}\partial_t(P^{4r} c - P^{44} v^r - \sum_s p^{sr} v^s) + \partial_s\left(\frac{v^s q^r}{c^2}\right) = f^r \tag{IV-7 b-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^r) + \partial_q\left(P^{\star \sigma\mu} + \rho_o u^r u^q - \frac{P^{\star r4} v^q}{c} - \frac{\rho_o u^r u^4 v^q}{c}\right) + \frac{1}{c^2}\partial_t(P^{\star 4r} c + \rho_o u^4 u^r c - P^{\star 44} v - \rho_o u^4 u^4 v^r) + \frac{P^{\star 4r}}{c}\partial_s v^s = f^r \tag{IV-7 b-2}$$

$$\partial_t(\rho v^r) + \partial_q P^{\star rq} + \frac{1}{c^2}\partial_t P^{\star 4r} = f^r \tag{IV-7 b-3}$$

et nous retrouvons bien l'équation (IV-13*b*).

Les relations entre les composantes du tenseur impulsion-énergie, les pressions et les flux de chaleur dans des différents référentiels étant données par:

$$p^{ij} = P^{ij} - \frac{P^{i4} v^j}{c} \tag{III-14}$$

et

$$q^j = P^{4j} c - P^{44} v^j - \sum_s p^{sj} v^s \tag{III-17}$$

l'équation

$$\partial_\mu (P^{\sigma\mu}) = \partial_\mu (\rho_o u^\sigma u^\mu P^{\star\sigma\mu}) = F^\sigma \qquad \text{(IV-5)}$$

(tenseur $P^{\star\sigma\mu}$ défini par IV-11) est donc l'équation invariante de la Mécanique non adiabatique des milieux continus.

En faisant $q_o = 0$ nous retrouvons comme cas particulier toutes les formules de la Mécanique adiabatique habituelle.

BIBLIOGRAPHIE

(1) M. PLANK — *Berl. Ber.*, p. 542, 1907.

—— *Ann. de Psys.*, 76, 1, 1908.

(2) M. von LAUE — *La Théorie de la Relativité*, 1, p. 257, Paris, 1924, G. V.

(3) MØLLER — *The Théorie of Relativity*, p. 177, Oxford, 1962.

(4) H. ARZELIÈS — «Transformation relativiste de la température et de quelques autres grandeurs thermodynamiques», *Il Nuovo Cimento*, 35, p. 792, 1965.

—— *Thermodynamique Relativiste et Quantique*, G. V. Paris.

(5) R. PENNEY — «Note on Relativistic Thermodynamics», *Il Nuovo Cimento*, XLIII A, 4, p. 911, 1966.

(6) A. BROTAS — *Sur la Transformation Relativiste de l'Énergie des Corps Étendus*, C. R. Paris, t. 265, p. 244 (1967).

—— *Sur la Transformation Relativiste du Travail et de la Chaleur*, C. R. Paris, t. 265, p. 401, 1967.

(7) M. A. TONNELAT — *Les Principes de la t. Electromagnetique et de la Relativité*, p. 187 (1959).

(8) A. LICHNEROWICZ — *Eléments de Calcul Tensoriel*, A. Collin Paris, pp. 186-189.