CDU 53 (469) (05)

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 6
1970-1971

INSTITUTO DE ALTA CULTURA
CENTROS DE ESTUDOS DE FÍSICA DAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS

PORTUGALIAE PHYSICA

Fundadores: A. Cyrillo Soares, M. Telles Antunes, A. Marques da Silva, M. Valadares.

VOLUME 6 1970-71

VOLUMES PUBLICADOS:

Vol. 1 — 1943-45 — 326 pp.
Vol. 2 — 1946-47 — 256 pp.
Vol. 3 — 1949-54 — 173 pp.
Vol. 4 — 1965-66 — 304 pp.
Vol. 5 — 1967-70 — 194 pp.
Vol. 6 — 1970-71 — 316 pp.

Redacção: Laboratório de Física da Faculdade de Ciências — Lisboa-2 (PORTUGAL)

Comissão de redacção:

J. Moreira de Araújo — Carlos Braga — Carlos Cacho — A. Pires de Carvalho — M. Abreu Faro — J. Gomes Ferreira — F. Bragança Gil — Manuel Laranjeira.

Amaro Monteiro — J. Pinto Peixoto — J. da Providência — Lídia Salgueiro — J. de Almeida Santos — José Sarmento — António da Silveira — J. Veiga Simão.

ÍNDICES

MATÉRIAS

MATIÈRES - MATTERS

VOLUME 6

Fasc. 1/2 (1970)

Étude des mécanismes de fonctionnement des cathodes creuses, par ARMANDO ROCHA TRINDADE 3–160

Fasc. 3 (1971)

Couplings to vector mesons in the relativistic quark model, by J. DIAS DE DEUS 163–181

Les largeurs de quelques niveaux atomiques et les rendements de fluorescence, par LÍDIA SALGUEIRO, MARIA TERESA RAMOS et J. G. FERREIRA 183–199

Fasc. 4 (1971)

Contribution à la mécanique ondulatoire de la particule de spin maximum 1, par JOSÉ VASSALO PEREIRA 203–308

Liste des publications reçues actuellement en échange avec Portugaliae Physica. 309

Instructions pour les auteurs 313

AUTORES

AUTEURS - AUTHORS

DEUS, J. Dias — *Couplings to vector mesons in the relativistic quark model* 163

FERREIRA, J. G. — vd. LÍDIA SALGUEIRO

PEREIRA, José Vassalo — *Contribution à la mécanique ondulatoire de la particule de spin maximum 1* 203

RAMOS, Maria Teresa — vd. LÍDIA SALGUEIRO

SALGUEIRO, Lídia, MARIA TERESA RAMOS et J. G. FERREIRA — *Les largeurs de quelques niveaux atomiques et les rendements de fluorescence* 183

TRINDADE, Armando Rocha — *Étude des mécanismes de fonctionnement des cathodes creuses* 3

Toute la correspondance concernant la rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Prix de l'abonnement:	250 escudos (US $8.50) par volume
Prix des volumes déjà parus:	300 escudos (US $10)
Prix du fascicule:	75 escudos (US $2.50)

Les membres de la «Sociedade Portuguesa de Química e Física» ont une réduction de 50 % sur les prix indiqués.

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Scientifiques et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu detaillé de tous les ouvrages soumis à la rédaction en deux exemplaires.

All mail concerning PORTUGALIAE PHYSICA to be addressed to:

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Subscription rates:	250 escudos (US $8.50) per volume
Price of past volumes:	300 escudos (US $10)
Price of copy:	75 escudos (US $2.50)

Members of the «Sociedade Portuguesa de Química e Física» may obtain *Portugaliae Physica* at a reduced price (50 %).

Universities, Physics Laboratories, Academies, Scientific Societies and Physics Publications are invited to receive this review in exchange for their publications.

PORTUGALIAE PHYSICA will give a detailed report of any book if two copies have been submitted

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 6
FASCÍCULO 1/2
1970

INSTITUTO DE ALTA CULTURA
CENTROS DE ESTUDOS DE FÍSICA DAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS

PORTUGALIAE PHYSICA

Fundadores: A. Cyrillo Soares, M. Telles Antunes, A. Marques da Silva, M Valadares.

VOLUME 6 1970 FASCÍCULO 1/2

VOLUMES PUBLICADOS.

Vol. 1 — 1943-45 — 326 pp.
Vol. 2 — 1946-47 — 256 pp.
Vol. 3 — 1949-54 — 173 pp.
Vol. 4 — 1965-66 — 304 pp.
Vol. 5 — 1967-70 — 194 pp.

Redacção: Laboratório de Física da Faculdade de Ciências — Lisboa-2 (PORTUGAL)

Comissão de redacção:

J. Moreira de Araújo — Carlos Braga — Carlos Cacho — A. Pires de Carvalho — M. Abreu Faro — J. Gomes Ferreira — F. Bragança Gil — Manuel Laranjeira Amaro Monteiro — J. Pinto Peixoto — J. da Providência — Lídia Salgueiro — J. de Almeida Santos — José Sarmento — António da Silveira — J. Veiga Simão.

ÍNDICE

(Table des matières)

Étude des mécanismes de fonctionnement des cathodes creuses, par ARMANDO ROCHA TRINDADE..... 3

CDU 53 (469) (05)

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 6
FASCÍCULO 1/2
1970

117

INSTITUTO DE ALTA CULTURA
CENTROS DE ESTUDOS DE FÍSICA DAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS

ÉTUDE DES MÉCANISMES DE FONCTIONNEMENT DES CATHODES CREUSES (1) *

ARMANDO ROCHA TRINDADE (2)

RÉSUMÉ — Nous avons étudié le plasma formé à l'intérieur d'une cathode creuse cylindrique en régime d'arc à flux de gaz.

L'analyse théorique montre qu'il est raisonnable d'admettre une description de ce plasma ne tenant compte que des variations longitudinales des paramètres tels que : la pression du gaz, les densités des particules, le potentiel de la gaine, etc., dans la partie centrale du canal cathodique.

En considérant un modèle atomique à trois niveaux (états fondamental et métastable de l'Ar I ; état fondamental de l'Ar II), nous avons fait le bilan détaillé des processus électroniques de collision inélastiqne ; les électrons, provenant à l'origine de l'émission thermique de la paroi, sont considérés comme appartenant à un certain nombre de groupes discrets d'énérgies.

Les prédictions théoriques qui en résultent sont en bon accord avec les résultats expérimentaux et améliorent notre compréension de certaines péculiarités du fonctionnement de ces décharges.

ABSTRACT — We have studied the plasma formed inside a cylindrical hollow cathode in the so-called «gas fed HCD» regime.

We have shown that theoretical analysis in this region allows us to consider only the axial dependence of parameters (e.g. gas pressure, ion sheath potential and particle densities) describing the central part of the channel.

We have made a detailed balance of the inelastic electronic collisions using a three-level model for the Ar atom (ground and metastable Ar I states and ground state Ar II). For this we have considered discrete groups of energy of the electrons emitted by the wall.

Theoretical predictions are consistent with the experiments and offer an explanation to some already reported obscure peculiarities of the H. C. D.

---

(1) Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris (Orsay) pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences Physiques.

(2) Adresse actuelle: Comissão de Estudos de Energia Nuclear—Av. Rovisco Pais—Lisboa—Portugal.

* Reçu le 1er Juin 1970.

PARTIE I

GÉNÉRALITÉS

1 — INTRODUCTION

L'étude des décharges à cathode creuse en régime d'arc a eu ses origines dans les travaux de LUCE en 1958 [1] au Oak Ridge National Laboratory (U. S. A.), bien que le régime luminescent de ce type de décharge eut été connu et étudié depuis longtemps.

Le dispositif expérimental présente une cathode en métal réfractaire (*Ta, W, Mo*) ayant la forme d'un tube cylindrique, orienté suivant l'axe longitudinal de la décharge, par l'intérieur duquel un gaz est injecté dans une enceinte évacuée.

L'intérêt de ce type de décharge a été soulevé par un article de LIDSKY et al. [2] en 1962, où les auteurs faisaient le point sur les résultats déjà acquis, notamment en ce qui concerne le choix des matériaux et la géométrie, caractéristiques de la décharge, influence de certains paramètres. Ils ont finalement montré qu'on pouvait obtenir par ce moyen un plasma dense, propre et fortement ionisé.

Ceci rend les arcs à cathode creuse particulièrement intéressants du point de vue des applications; soit dans les domaines tels que: lasers à Argon ionisé, sources d'ions, propulsion ionique, convertisseurs MHD, etc, où il est souhaitable de disposer de sources de courant intense, soit pour la création de plasmas utilisables dans la recherche fondamentale.

Au Laboratoire de Physique des Plasmas de la Faculté des Sciences d'Orsay ces décharges sont étudiées depuis 1964.

Dans une première phase nous y avons effectué une étude systématique de la décharge, comprenant des mesures fondamentales, l'étude de l'influence des divers paramètres sur le comportement et les caractéristiques de la décharge, des études de bruit, etc... Il en a résulté un ensemble de publications [3] à [8].

Une fois acquise notre connaissance de la décharge, nous avons développé un effort en deux directions parallèles: d'une part, une prospection des applications possibles, dans les domaines du laser à Argon ionisé [9] [10], création de plasmas calmes [11], fonctionnement à

haute pression pour l'application à la M. H. D. [12], amélioration des électrodes existantes [13] [14] etc; d'autre part, une étude théorique des processus qui déterminent le fonctionnement, en essayant d'aboutir à une compréhension accrue des phénemènes observés expérimentalement et éventuellement, à l'amélioration des performances de la décharge.

Ainsi dans la partie I de ce travail nous résumerons les caractéristiques principales de la décharge, la description des régimes de fonctionnement possibles et les résultats des mesures qui ont été faites dans notre Laboratoire. Pour ce qui est des détails expérimentaux et des questions de méthodes de mesure et de calcul, nous renvoyons aux références [7] et [8].

Dans la partie II nous proposons un modèle de la région cathodique de la décharge qui permette l'étude théorique des processus inélastiques dans cette région.

Le calcul de ces processus inélastiques et celui de l'équation du courant ionique, nous permettent d'étudier les processus de transfert de chaleur dans la paroi cathodique et d'évaluer la répartition de la température de celle-ci.

Le calcul numérique (pour une situation expérimentale donnée) des quantités déduites théoriquement, permet de faire la critique de la méthode utilisée. Par ailleurs, les résultats obtenus fournissent des renseignements qui améliorent notre connaissance du fonctionnement des cathodes creuses.

2 — CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES DES ARCS À CATHODE CREUSE

Du point de vue du dispositif expérimental, ce type de décharge se distingue des arcs classiques par le fait que la cathode est constituée d'un cylindre métallique creux, par l'intérieur duquel un gaz peut être introduit dans l'enceinte de la décharge. Ce dispositif est présenté dans la Figure 1.

Dans notre cas la cathode est en Tantale, de longueur L_C, rayon intérieur R et épaisseur de paroi e; la partie active de l'anode est dans la plupart des cas constituée d'un disque de cuivre normal à l'axt longitudinal de la décharge. Les supports des deux électrodes soen refroidis à l'eau.

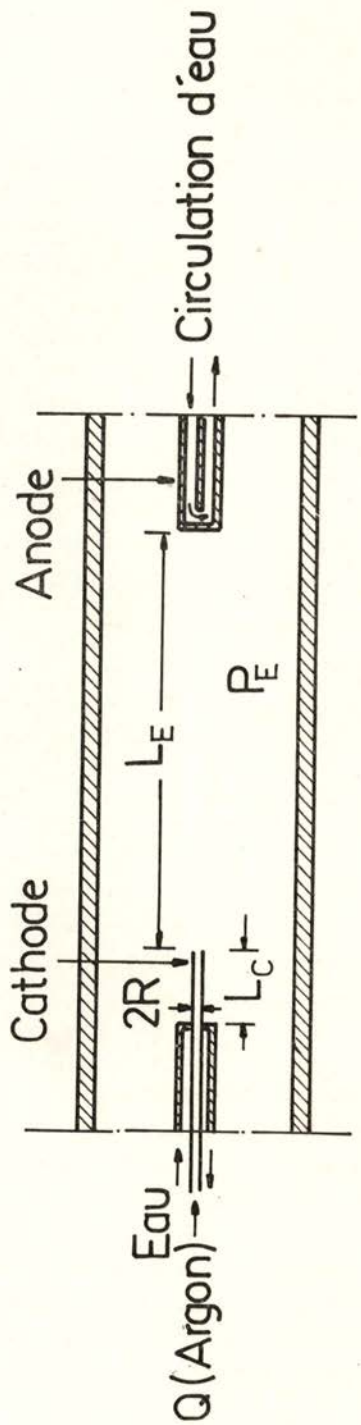


Fig. 1 — Dispositif expérimental de la décharge à cathode creuse

La longueur de l'espace interélectrodes est désignée par L_E. L'ensemble est enfermé dans une enceinte où il règne une pression P_E variable suivant les applications. Le gaz y est introduit, soit par l'intérieur de la cathode, soit à travers une anode (creuse, elle aussi), soit par une entrée indépendante loin des électrodes. Quoi qu'il en soit, la pression P_E est déterminée par le débit volumique de gaz introduit (Q) et par le vitesse du groupe de pompage.

Il reste à signaler que la décharge peut aussi bien fonctionner dans une enceinte scellée, sans flux de gaz.

Le plasma situé entre les électrodes peut constituer: soit une colonne confinée par un champ magnétique longitudinal (B), soit une véritable colonne positive cylindrique (confinement par une paroi), soit un plasma qui remplit toute l'enceinte. La solution choisie dépend de l'application envisagée et détermine la valeur du champ électrique longitudinal. Remarquons cependant que la présence d'un champ magnétique de confinement, étant utile pour empêcher l'échauffement des parois de l'enceinte, n'est nullement nécessaire au fonctionnement de la cathode.

3 — RÉGIMES DE FONCTIONNEMENT DE LA CATHODE

a) *Régime avec colonne positive intérieure (régime normal)*

Dans le régime le plus intéressant des arcs à cathode creuse on assure un gradient de pression du gaz neutre à l'intérieur du canal cathodique par une introduction de gaz dans ce canal et par un pompage rapide de l'enceinte de la décharge.

Dans ces conditions et pour un courant supérieur à un certain seuil, on constate que la température de la paroi cathodique ne varie pas d'une façon monotone en fonction de l'abscisse x de la cathode (cf. Figure 2): cette température présente un maximum pour une certaine abscisse l. Cette abscisse varie notamment avec le débit de gaz injecté par la cathode et avec son rayon intérieur R.

Pour des raisons qui deviendront plus apparentes par la suite, nous admettons qu'ume partie de la colonne de plasma pénètre à l'intérieur du canal, constituant la colonne positive intérieure (C. P. I.) qui caractérise ce régime.

Faute d'un autre point de repère, nous associons la longueur de la C. P. I. à la distance l: nous admettons ainsi que le plasma pénètre

dans le canal et atteint une profondeur correspondant (à peu près) à la localisation du maximum de température cathodique.

Dans ce régime la décharge est très stable; pour un courant constant, la tension de la décharge croît lorsque la longueur de la C. P. I. augmente; on peut obtenir cet effet soit en diminuant le débit gazeux (pour un diamètre donné de la cathode), soit en augmentant le diamètre en gardant le même débit.

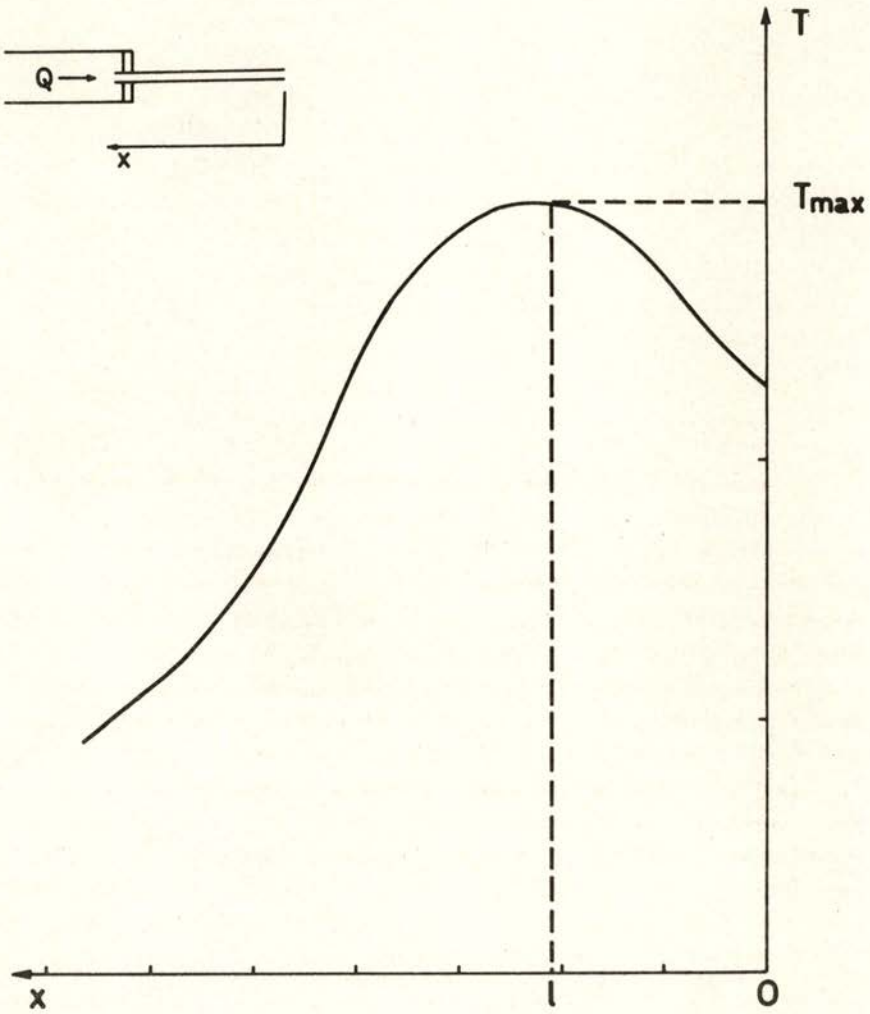


Fig. 2 — Répartition longitudinale de la température cathodique

b) — *Régime instable à faible courant*

Ce régime apparaît lorsque le courant de la décharge n'atteint pas la valeur de seuil dont nous avons parlé au paragraphe précédent.

Dans ces conditions nous constatons que le fonctionnement est instable. La cathode n'atteint pas, globalement, la température élevée qui caractérise le régime normal; en plus, la répartition longitudinale de cette température n'est pas statique. On constate l'apparition d'une zone plus chaude qui se déplace rapidement dans l'un et l'autre sens, le long de la cathode, avec une période de l'ordre de 10^{-1} s. La tension de la décharge varie au même rythme.

Si l'on augmente le courant de façon à dépasser la valeur de seuil, la zone la plus chaude se fixe à une abscisse donnée et la température de la cathode augmente globalement d'un demi millier de degrés. Le fonctionnement devient stable (régime normal avec colonne positive intérieure); la tension est en général plus faible que dans le régime instable.

Qualitativement, on constate que le courant de seuil croît avec le diamètre du canal, ce qui suggère l'existence d'un seuil pour la densité du courant.

c) *Régime sans colonne positive intérieure (faible débit)*

Si dans un fonctionnement en régime normal on réduit le débit de gaz, le maximum de température se déplace progressivement vers le support de la cathode. Mais, si l'on continue à diminuer le flux gazeux, en dessous d'une certaine valeur apparaît un nouveau régime. Son avènement se caractérise par un bouleversement global de la répartition longitudinale de la température cathodique, processus qui prend une fraction de minute; au bout de ce temps, une nouvelle répartition de température s'est établie, présentant une décroissance monotone à partir du bout de la cathode (cf. Figure 3).

Ce nouveau régime est stable (nous ne parlons pas de la période transitoire qui le précède); la tension de la décharge est cependant supérieure, en général, à celle du régime normal à fort débit (*) (cf. Figure 4).

(*) En fait on conçoit que le changement de régime s'effectue lorsque la tension aux bornes de la décharge dans le régime normal aurait tendance à dépasser la tension du régime sans C.P.I., à cette pression de l'enceinte. (point A dans la Fig. 4).

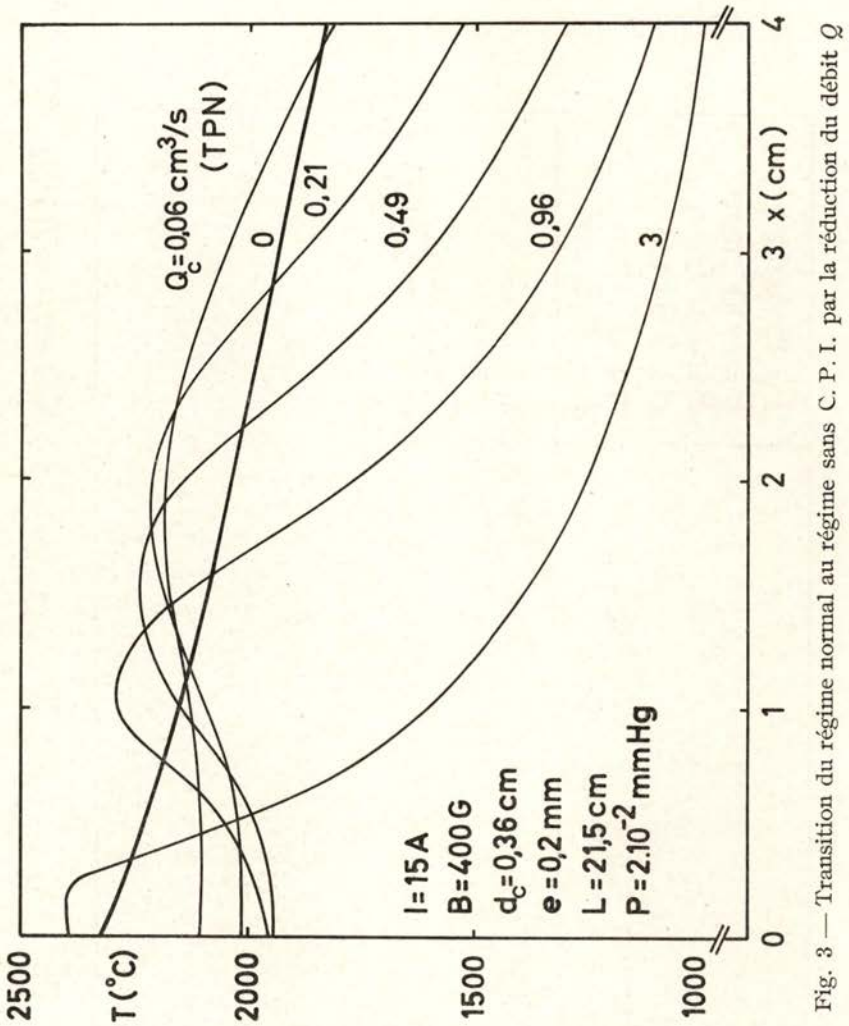


Fig. 3 — Transition du régime normal au régime sans C. P. I. par la réduction du débit Q

Les caractéristiques de la décharge ne sont pas changées si l'on coupe alors complètement le débit de gaz par la cathode: notamment la tension de la décharge reste inchangée. En revanche, cette tension dépend maintenant d'une manière assez marquée, de la pression P_E dans l'enceinte, ce qui n'était pas le cas dans le régime normal (cf. Figure 5).

On peut passer autrement du régime normal au régime sans C. P. I. : cette transition se vérifie en montant progressivement la pression dans l'enceinte, tout en gardant constant le débit gazeux par la cathode.

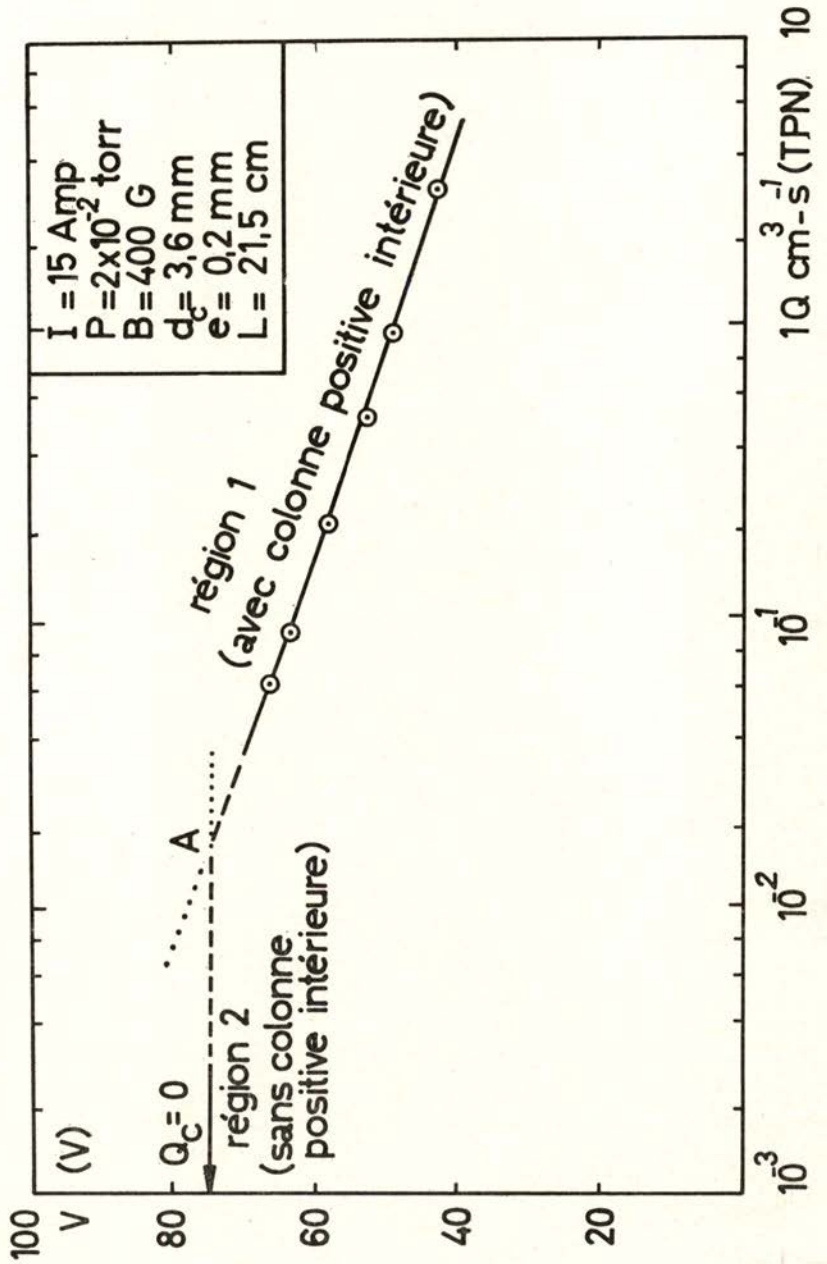


Fig. 4 — Variation de la tension V de la décharge en fonction du débit cathodique Q

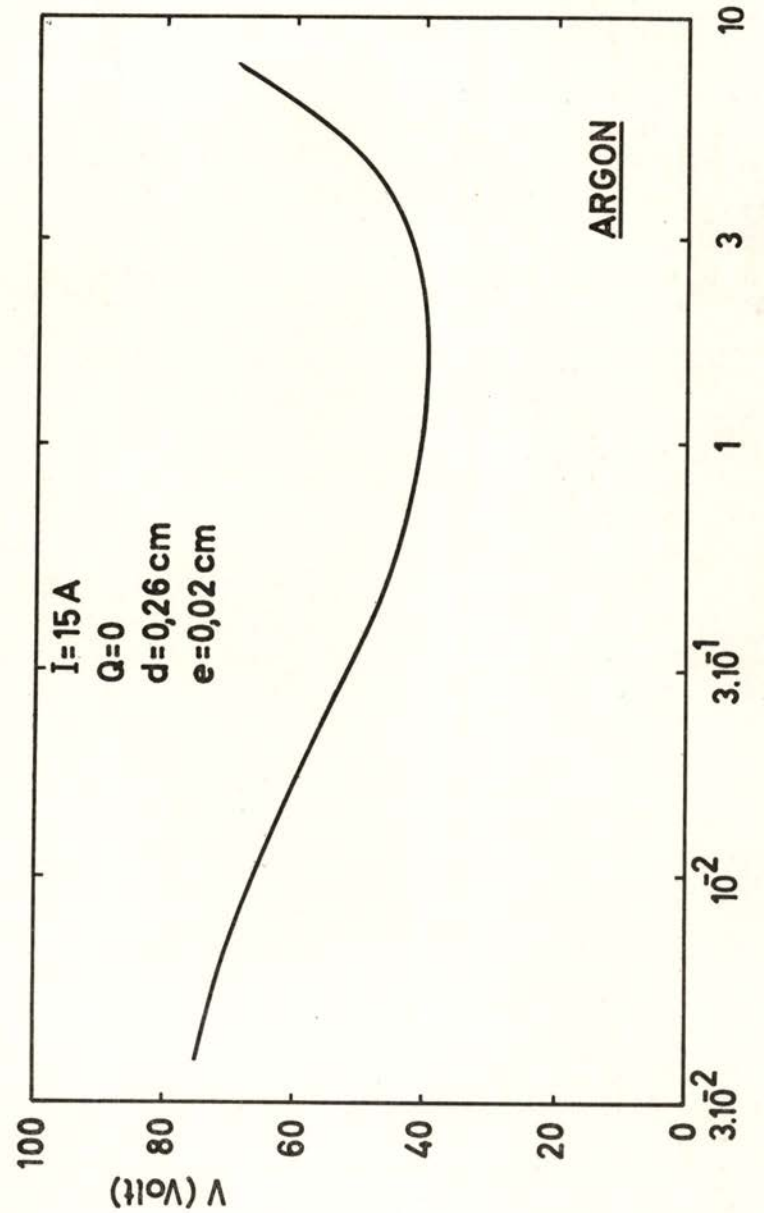


Fig. 5 — Variation de la tension V de la décharge en fonction de la pression P_E dans l'enceinte

Lorsque P_E atteint quelques dixièmes de Torr, le maximum de température cathodique commence à approcher le bout de la cathode. Pour $P_E \simeq 1$ Torr, la répartition de la température cathodique prend la forme caractéristique du régime sans C. P. I. (cf. Figure 6).

L'analyse des caractéristiques des trois régimes nous amène aux conclusions qualitatives suivantes:

— Le régime normal avec un maximum de température cathodique est associé à l'existence d'une pression de l'ordre du Torr dans un point à l'intérieur du canal cathodique.

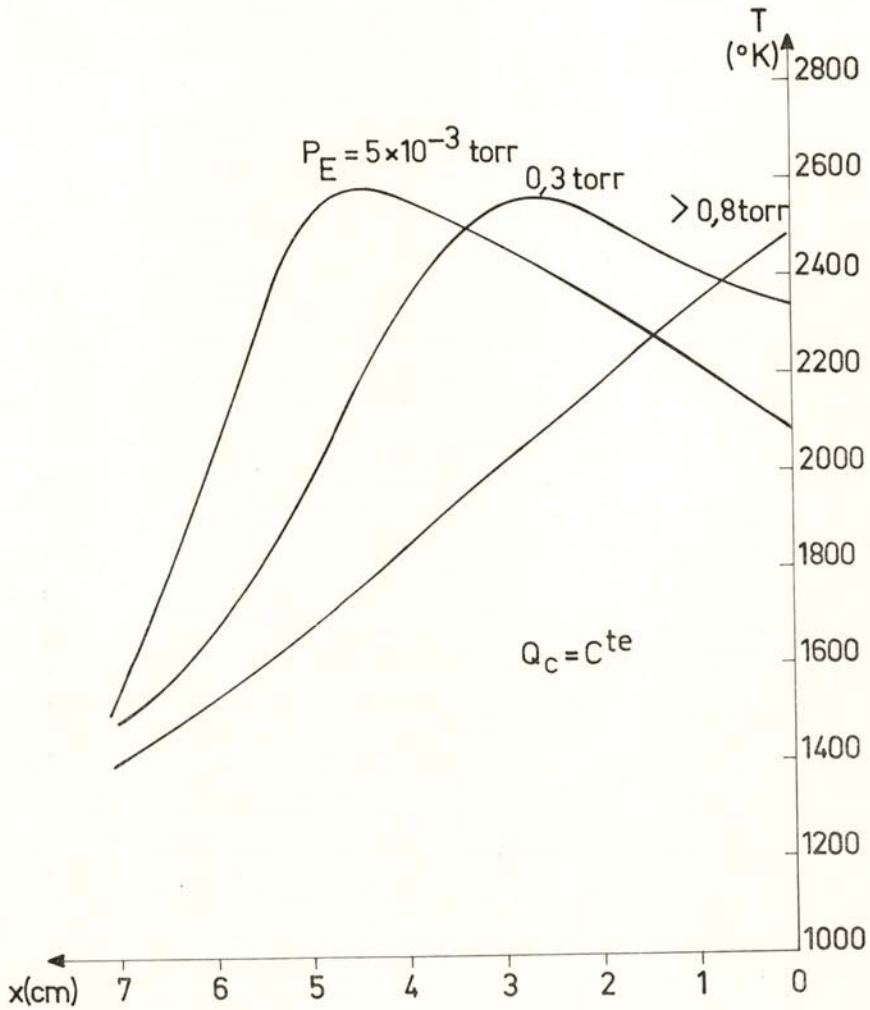


Fig. 6 — Transition du régime normal au régime sans C. P. I. par augmentation de la pression dans l'enceinte

— Quand il n'y a plus de point à l'intérieur de la cathode que satisfasse à cette condition (ce que l'on peut imposer, soit en coupant le débit cathodique, soit en montant la pression dans l'enceinte), nous aurons une répartition monotone de température.

— L'établissement du régime normal impose une densité du courant qui dépasse une certaine valeur minimale.

Nous verrons dans quelle mesure notre étude théorique pourra apporter l'explication de ces faits.

4 — VALEURS CARACTÉRISTIQUES DES PARAMÈTRES DE LA DÉCHARGE

— Cathode — Cylindre en tantale	$L_C = 80$ mm
	$R = 1$ à $4{,}3$ mm
	$e = 0{,}2$ mm
— Anode — Disque en cuivre	$\phi_A = 30$ mm
ou: cylindre en tantale	$R_A = 3$ à 5 mm
— Débit de gaz cathodique (Argon)	$Q = 10^{-2}$ à $3\,\mathrm{cm^3 s^{-1}}$ TPN
— Distance interélectrodes	$L_E =$ variable
— Courant de la décharge	$I = 10$ à 100 A (régime continu)
— Tension de la décharge	$V = 25$ à 100 V (régime continu)
— Champ magnétique longitudinal	$B = 0$ à $1000\,G$
— Pression dans l'enceinte :	
Régime normal	$P_E = 10^{-3}$ à 10^{-1} Torr
Régime sans C.P.I.	$P_E = 10^{-3}$ à 760 Torr
— Champ électrique dans la colonne de plasma extérieur	$X_E = 0{,}2$ à $0{,}5$ V/cm
(*) — Champ électrique dans la C. P. I.	$X_I = 3$ à 10 V/cm
(*) — Chute cathodique radiale	$V_C \simeq 12$ V
— Chute anodique	$V_A \simeq 10$ à 50 V
— Température de la paroi cathodique au niveau du maximum	$T_{max} = 2000$ à 3000° K
— Densité électronique dans la colonne extérieure	$n_e = 10^{12}$ à 10^{14} $\mathrm{cm^{-3}}$
— Température électronique	$T_e = 2$ à 5 eV
— Température ionique	$T_i \simeq 0{,}2$ eV

(*) Voir II-2 pour la définition de ces grandeurs.

PARTIE II

THÉORIE

1 — INTRODUCTION

Ayant constaté expérimentalement l'existence d'un régime caractérisé par une répartition longitudinale de la température cathodique qui passe par um maximum; sachant que la localisation de ce maximum dépend du diamètre du canal cathodique, du débit gazeux et du courant de la décharge, notre but est à présent de faire le nécessaire pour remonter à la distribution longitudinale de la température par la voie théorique, c'est à dire, en résolvant une équation de transfert de la chaleur dans la région cathodique.

Cette équation comprendra des termes de source de chaleur (principalement, le bombardement de la paroi par les ions et par les métastables), et des termes de refroidissement, notamment par conduction thermique vers le support de la cathode et par rayonnement de la paroi cathodique.

Ces deux derniers termes seront calculés à partir des mesures de température de la cathode; pour les termes de source, le calcul sera fait par la voie théorique.

Ainsi, après avoir établi et justifié um modèle de la région cathodique qui en facilite l'étude, nous allons déterminer:

— la densité et la température du gaz neutre dans le canal cathodique;

— le nombre d'ions créés à chaque point de la cathode, et l'équation du courant ionique dans cette région;

— la densité des métastables créés à l'intérieur de la cathode et le flux de ces métastables sur la paroi.

Nous serons alors en mesure d'évaluer la forme de la répartition longitudinale de la température cathodique et de la comparer aux donnés expérimentales.

2 — CHOIX D'UN MODÈLE POUR LA RÉGION CATHODIQUE

2.1 — *Existence d'un plasma dans le canal cathodique*

Notre supposition que, dans le régime normal de la cathode, le plasma pénètre à l'intérieur du canal cathodique, est basée sur les considérations suivantes:

a) Lorsqu'on diminue le débit gazeux introduit par le canal cathodique, en maintenant constants la pression dans l'enceinte et le courant de la décharge, la tension totale V augmente.

Si l'on trace en fonction de l'abscisse l du maximum de température (l augmente si Q diminue), la variation correspondente de V, on obtient une droite dont la pente vaut, selon les diamètres, entre 3 et 10 V/cm (cf. Figure 7).

Le courant et la pression dans l'enceinte étant constants, on doit attribuer cette augmentation de tension à la région cathodique. Il est donc raisonnable de supposer qu'une longueur croissante de plasma pénètre dans le canal cathodique au fur et à mesure que l'on diminue le débit. Si en plus on considère que cette augmentation de longueur accompagne le déplacement du maximum de température, on en déduit que cette partie du plasma présente un champ électrique X_I égal à la pente de la droite de la Figure 7. On serait donc en présence d'une sorte de colonne positive à l'intérieur du canal ce qui justifie sa désignation de colonne positive intérieure.

Il est d'ailleurs évident que l'existence d'un maximum de température implique la présence d'un plasma à cet endroit, capable d'entretenir des processus de bombardement de la paroi.

b) Notre hypothèse d'existence d'une C. P. I. est consistante avec la diminution de X_I que l'on constate quand on utilise des cathodes ayant un diamètre intérieur de plus en plus grand (cf. Tableau I).

TABLEAU I

Variation du champ électrique dans la C.P.I. en fonction du rayon de la cathode [8]

R (mm)	1,05	1,3	1,45	1,8	2,3	2,8
X_I (V/cm)	10	8	7,8	4,3	3,7	3,3

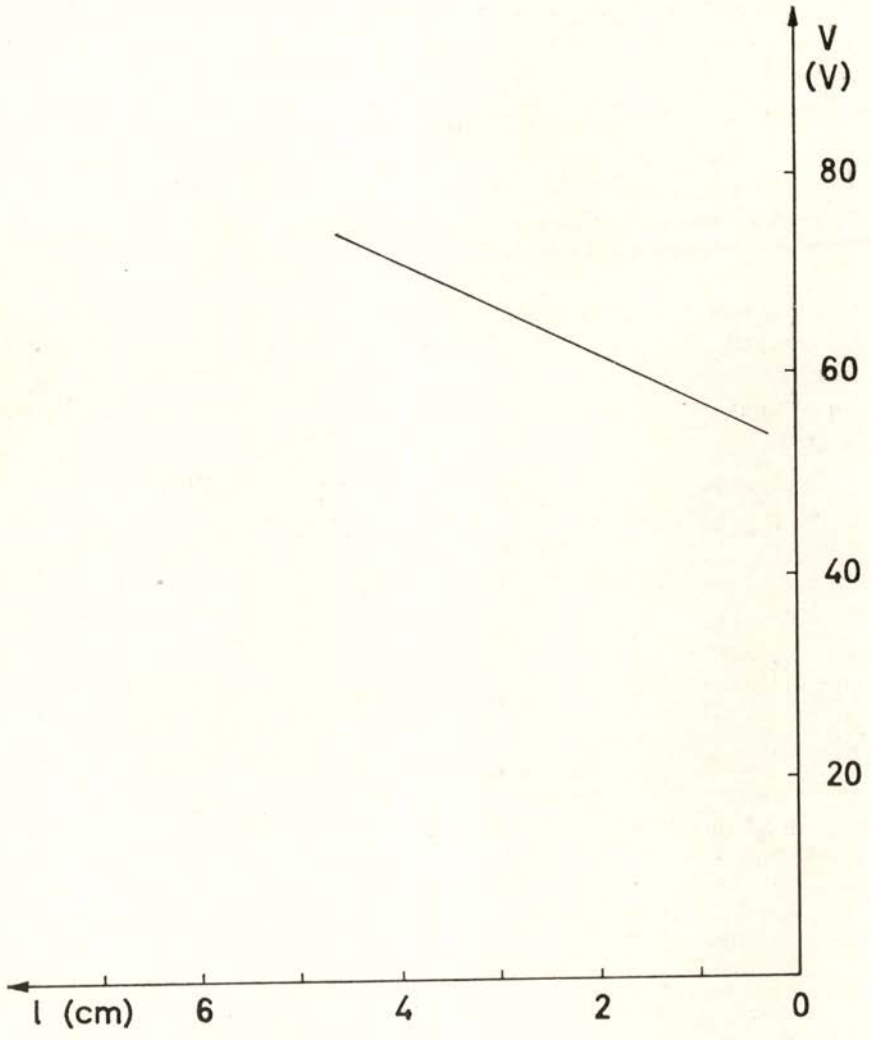


Fig. 7 — Variation de la tension de la décharge V en fonction de l'abscisse du maximum de température cathodique l (R = 1,45 mm)

En effet, l'éloignement des parois intérieures diminue les pertes de particules chargées par diffusion ambipolaire, et le régime stationnaire de création et perte de ces particules est compatible avec un champ électrique plus faible.

c) Le dernier argument en faveur de l'hypothèse d'une colonne positive intérieure est donné par la comparaison avec ce qui se passe dans le domaine des arcs classiques.

En effet, nous pouvons écrire que la tension totale V de la décharge se répartit dans les termes suivants (mesurés dans l'axe longitudinal) :

$$V = V_C + X_I l + X_E L_E + V_A \qquad (1)$$

avec L_E : longueur de la colonne de plasma extérieur;
X_E : champ électrique dans cette colonne;
V_A : chute anodique (cf. Figure 8).

En connaissant par la voie expérimentale les valeurs de X_I, X_E et V_A [8] nous vérifions que l'équation (1) est satisfaite pour une valeur donnée de la quantité V_C. Pour un courant de 15 A et pour deux valeurs du diamètre du canal, il s'avère que V_C se situe aux alentours de 12 V(*). Or cette valeur est proche de la chute cathodique dans une décharge d'arc classique dans des conditions comparables (cathode en Ta, Argon, mêmes pression et courant). Dans ces décharges la chute cathodique se situe dans la transition gaz-métal de la cathode et au voisinage de celle-ci.

Dans notre cas, suivant nos hypothèses et parallèlement au cas des arcs classiques, V_C représente une chute de potentiel radiale, au niveau de l'abscisse l, entre le plasma de la C.P.I. et la paroi cathodique, supposée équipotentielle (**).

2.2 — *Description et justification d'un modèle de la région cathodique*

Nous allons décomposer le canal cathodique en deux régions que nous étudierons séparément, en raison de leurs propriétés très différentes:

— gaine positive (au voisinage de la paroi cathodique);
— plasma, remplissant la majeure partie du canal et constituant la C.P.I.

(*) On peut d'ailleurs mesurer V_C par d'autres méthodes, notamment dans des conditions où $l = 0$, ce qui simplifie les mesures à effectuer; on obtient encore $V_C = 12$ V [8].

(**) En effet, la chute ohmique le long de la paroi métallique est négligeable: pour la plus faible épaisseur de paroi utilisée (0,2 mm) et pour un rayon intérieur de 1 mm, sa résistance linéaire est de: $1{,}4 \times 10^{-3}$ Ω/cm. Nous considérons toujours par la suite que cette paroi coincide avec l'équipotentielle 0 volt.

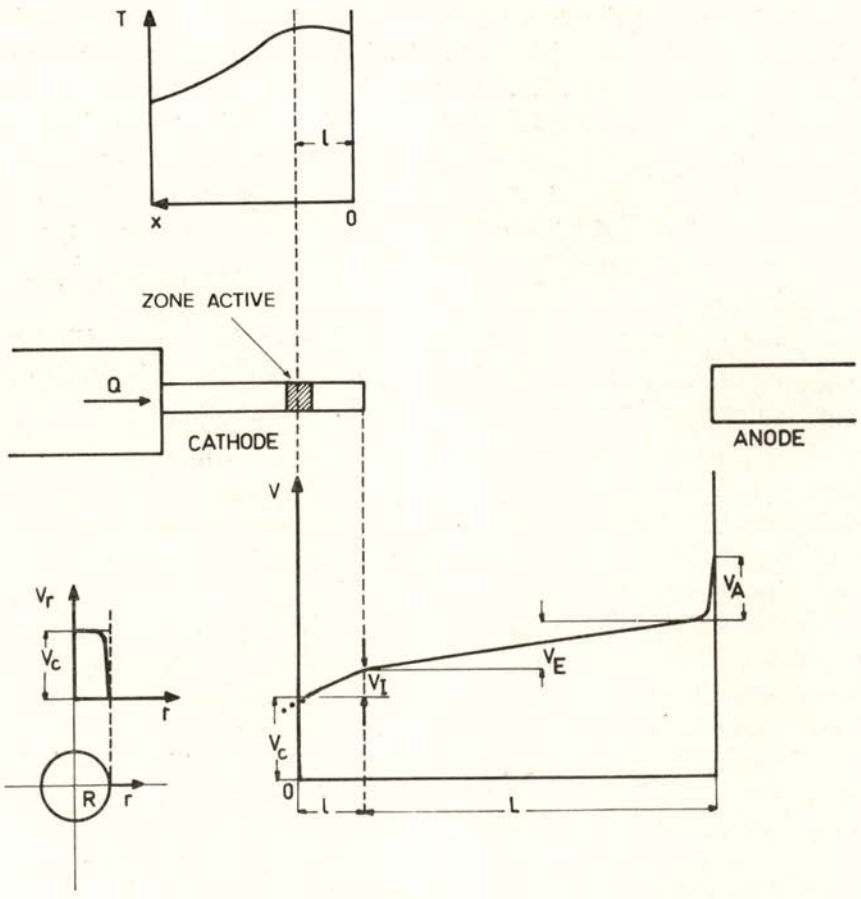


Fig. 8 — Répartition du potentiel suivant l'axe longitudinal de la décharge

Nous allons établir successivement l'existence des propriétés suivantes dans ces deux régions:

1) La gaine positive a une faible épaisseur par rapport au rayon R du canal; le champ électrique y est purement radial et le potentiel de cette gaine peut atteindre des valeurs très élevées ($V_g \sim 50$ V).

2) Les particules présentes dans le plasma de la C. P. I. (atomes non excités, atomes métastables, électrons et ions) ont une densité approximativement constante dans chaque section transversale.

3) Le champ électrique longitudinal X_l est uniforme sur toute la longueur de la C.P.I.; pour ce qui est du champ électrique radial X_r dans le plasma, son intensité est en général inférieure à X_l.

4) Pour ce qui est des mouvements d'ensemble des particules chargées dans le canal (électrons d'émission cathodique; électrons et ions du plasma de la C. P. I.), seuls les ions peuvent atteindre la paroi cathodique, en raison du fort champ électrique radial de la gaine.

Pour ce qui est des mouvements dans la direction longitudinale, les ions et les électrons (thermalisés) du plasma sont entraînés par le champ électrique axial (mouvement contrôlé par mobilité); en revanche le mouvement des électrons rapides est en général déterminé par la diffusion.

Nous prouverons que cet ensemble de propriétés est vérifié dans le canal cathodique; il en résultera un modèle de cette région que nous adopterons dans la suite de notre travail.

2.2.1 — *Étude de la gaine positive*

Signalons d'abord que l'existence d'un champ électrique longitudinal assez fort (X_I de 3 à 10 V/cm) dans la C. P. I., et le fait que la paroi de la cathode est métallique (donc équipotentielle) et maintenue à un potentiel imposé ($V_p = O$ *Volt*), crée une différence de potentiel entre l'axe de la C.P.I. et cette paroi. Cette chute de potentiel peut être importante: pour $X_I = 8$ V/cm et une longueur de colonne (*) de quelques centimètres, cette chute atteint facilement 50 V. Nous verrons plus tard que le champ électrique radial dans le plasma de la C. P. I. ne dépasse pas 3 ou 4 V/cm; dans ces conditions il est clair que presque toute la chute de potentiel se vérifie au niveau de la gaine.

Nous allons donc calculer l'épaisseur de cette gaine; ce calcul, qui est détaillé dans l'Appendice I-1 est semblable à celui qui a été mené par Mackeown [15] pour le cas d'une paroi émissive en contact avec un plasma. Cet auteur partait des hypothèses suivantes:

— Géométrie unidimensionnelle (paroi émissive plane, infinie).

— Les ions du plasma arrivent à la lisière de la gaine avec une densité du courant j_i et y possèdent une énergie négligeable.

— Les électrons sont émis par la paroi cathodique sans énergie initiale, avec une densité du ocurant j_e^c.

— On néglige les collisions à l'intérieur de la gaine.

(*) Voir paragraphe 2.2.3 pour la définition de la longueur de la C.P.I.

Dans ces conditions, par l'intégration de l'équation de Poisson, on arrive à l'expression du champ électrique $\frac{dV}{dx}$ à la distance x de la paroi, en fonction du potentiel V à ce point et du potentiel V_g à la lisière de la gaine :

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{4}{\varepsilon_o}\left(\frac{m}{2q}\right)^{1/2}\left[j_i\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}(V_g - V)^{1/2} - j_e^c\,(V_g^{1/2} - V^{1/2})\right] \quad (2)$$

Cette expression n'est pas d'intégration commode et ne permet pas, a priori, de calculer l'épaisseur e de la gaine. Cependant nous avons pu, à la suite d'un calcul approximatif et en posant les deux hypothèse supplémentaires ci-dessous, aboutir à une expression de l'épaisseur e de la gaine dans nos conditions de fonctionnement (cf. Appendice I-1). Les deux hypothèses sont :

— la densité du courant ionique j_i est déterminée par l'agitation thermique des ions du plasma (densité n_i, température T_i) ;

— la densité du courant électronique d'émission de la paroi est donnée par l'équation de Richardson relative à l'effet d'émission thermoionique.

Dans ces conditions, pour $T_p = 2800^o\ K$, $n_i = 10^{14}\text{cm}^{-3}$ (*) et $V_g = 50\ V$, l'épaisseur e de la gaine est approximativement (cf. App. I-1) :

$$e \leqslant \frac{V_g}{\left(\frac{dV}{dx}\right)_{paroi}} \quad (3)$$

avec:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2_{paroi} = \frac{4}{\varepsilon_o}\left(\frac{m}{2q}\right)^{1/2}\left[j_i\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} - j_e^c\right] V_g^{1/2} \quad (4)$$

et l'on obtient, dans les conditions indiquées ci-dessus:

$$e < 5.10^{-3}\ \text{cm}$$

(*) Cet ordre de grandeur de la densité ionique est couramment admis, sur la base de résultats expérimentaux confirmés [16] [17] [18].

L'*épaisseur de la gaine* est donc *très inférieure au rayon du canal* ($R \geqslant 1$ mm) et la première partie de notre hypothèse est vérifiée.

D'autre part, la faible valeur de e entraîne l'existence d'un fort champ électrique radial (de l'ordre de 10^4 V/cm); l'existence d'un champ longitudinal de quelques V/cm est donc complètement négligeable: les équipotentielles sont parallèles à la paroi (*champ purement radial*).

2.2.2 — *Profil radial de la densité des particules dans la C. P. I.*

Nous voulons prouver que les densités des atomes neutres non excités, des atomes métastables, des électrons et des ions sont approximativement constantes dans chaque section transversale de la C. P. I.

La justification de cette hypothèse est différente selon qu'il s'agit des particulees neutres ou des particules chargées.

a) *Atomes neutres*

Lorsqu'on considère un fluide circulant dans un conduit cylindrique en régime d'écoulement visqueux, laminaire et isotherme (pas de sources de chaleur au sein du fluide; tube suffisamment long pour qu'il y ait équilibre entre la température du fluide et celle — uniforme — de la paroi) le calcul de l'équation de Navier-Stokes et de l'équation de la continuité permet d'aboutir aux conclusions classiques suivantes [19]:

— La vitesse macroscopique du fluide est purement longitudinale; son profil radial est parabolique, avec $v_z = 0$ à la paroi ($r = R$).

— Le gradient de la pression du gaz est purement longitudinal $\left(\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0\right)$.

Le profil de la densité des particules neutres est donc constant dans chaque section transversale, si l'on admet que la température du gaz est indépendante de la coordonnée radiale.

Dans notre cas la température peut cependant varier radialement, comme nous le verrons dans le chapitre *II*-5. Retenons simplement que, dans la mesure où cette variation est faible, notre hypothèse $n_n(r) = \text{cte}$ est acceptable.

b) *Ions et électrons du plasma*

Nous allons mener parallèlement le calcul des profils radiaux des densités de ces particules.

Signalons d'abord que la C. P. I. diffère des colonnes positives habituelles en ce qui concerne l'origine des particules chargées. En général, la création de paires électron-ion est due aux collisions effectuées sur les neutres, par les électrons du plasma; le terme d'ionisation est alors proportionnel à n_e.

Dans le cas de la C. P. I. la situation est différente. Nous avons à considérer deux familles d'électrons: ceux qui constituent le plasma, ayant une densité n_e de l'ordre de 10^{14} cm^{-3} et une tempéreture $T_e = 2$ à 5 eV; et les électrons émis par la paroi cathodique qui deviennent très énergétiques en franchissant la gaine (V_g pouvant atteindre 50 V).

Ce sont ces électrons qui constituent la source dominante de phénomènes d'ionisation. Le nombre d'ions créés est ainsi indépendant de la densité électronique du plasma n_e; en fait nous prouverons que le taux d'ionisation moyen $\mathscr{I}$ dans une tranche de colonne comprise entre lhes abscisses x et $x + \Delta x$ (nombre d'ions créés par unité de volume et par unité de temps) est proportionnel à la densité du courant d'émission cathodique $j_e^c(x)$; on écrit:

$$\mathscr{I}(x) = \frac{2\,\eta\, j_e^c(x)}{q\,R} \tag{5}$$

R étant le rayon du canal et η un coefficiente de proportionnalité qui dépend de l'énergie initiale des électrons d'émission.

Dans cette expression, $\mathscr{I}$ représente un taux d'ionisation moyen, dans le sens que nous avons ignoré la répartition i(r) des processus d'ionisation en fonction de la coordonée radiale.

Autrement dit, la relation entre $\mathscr{I}$ et le taux d'ionisation «local» i(r) s'écrit:

$$\pi R^2 \mathscr{I} = \int_0^R 2\,\pi\, r\, i(r)\, dr \tag{6}$$

Cherchons maintenant à évaleur la forme de i(r).

Si l'on ne considère que les phénomènes d'ionisation provenant dune collision inélastique unique entre les électrons d'émission et les atomes neutres (le processus d'ionisation dominant), on peut essayer de déterminer la forme de i(r) de la manière suivante:

Soit $\sigma_{el.}$ la section efficace de collision élastique électron-neutre et $\sigma_{in.}$ la section efficace d'ionisation par choc unique électron-neutre. Le nombre N de collisions élastiques pour chaque collision ionisante est donc :

$$N = \frac{\sigma_{el.}}{\sigma_{in.}} \tag{7}$$

Pendant ces N collisions, les électrons s'éloignent de la paroi d'où ils proviennent, d'une distance moyenne d qui vaut approximativement (*) :

$$d = \sqrt{N} \cdot \lambda_{el} \tag{8}$$

λ_{el} étant le libre percours moyen des électrons vis à vis des collisions élastiques avec les neutres.

Pour des valeurs courantes des paramètres ($V = 30$ V) $n_n = 10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3}$; $\sigma_{el}\,(30\ V) = 7{,}5 \times 10^{-16}\ \mathrm{cm}^2$; $\sigma_i\ (30 V) = 2{,}4 \times 10^{-16}\ \mathrm{cm}^2$, on obtient:

$$d \simeq 1\ \mathrm{mm}$$

Cette distance est en général inférieure à R (variant entre 1 et 5 mm) ; on peut donc conclure que l'ionisation des neutres n'est pas uniforme dans chaque section transversale, étant plus forte au voisinage de la paroi cathodique et décroissant vers le centre.

C'est ce que nous montrons qualitativement dans la Figure 9(a).

Si i(r) est connu, on peut calculer le profil radial de la densité ionique, par l'intégration de l'équation de conservation des ions en régime permanent:

$$\vec{\nabla} \cdot n_i \vec{v}_i = i \tag{9}$$

Supposons maintenant qu'il n'y a pas de mouvement d'ions dans le sens longitudinal ($n_i\ v_i = 0$). Cette hypothèse, qui est évidemment fausse, a cependant le mérite de conduire à un profil radial de la densité ionique plus accentué que le profil réel (l'écoulement des ions créés

(*) L'expression (8) n'est exacte que dans le cas d'une géométrie plane; dans notre cas (géométrie cylindrique) la valeur de distance donnée par (8) ne doit être prise que comme un ordre de grandeur de d.

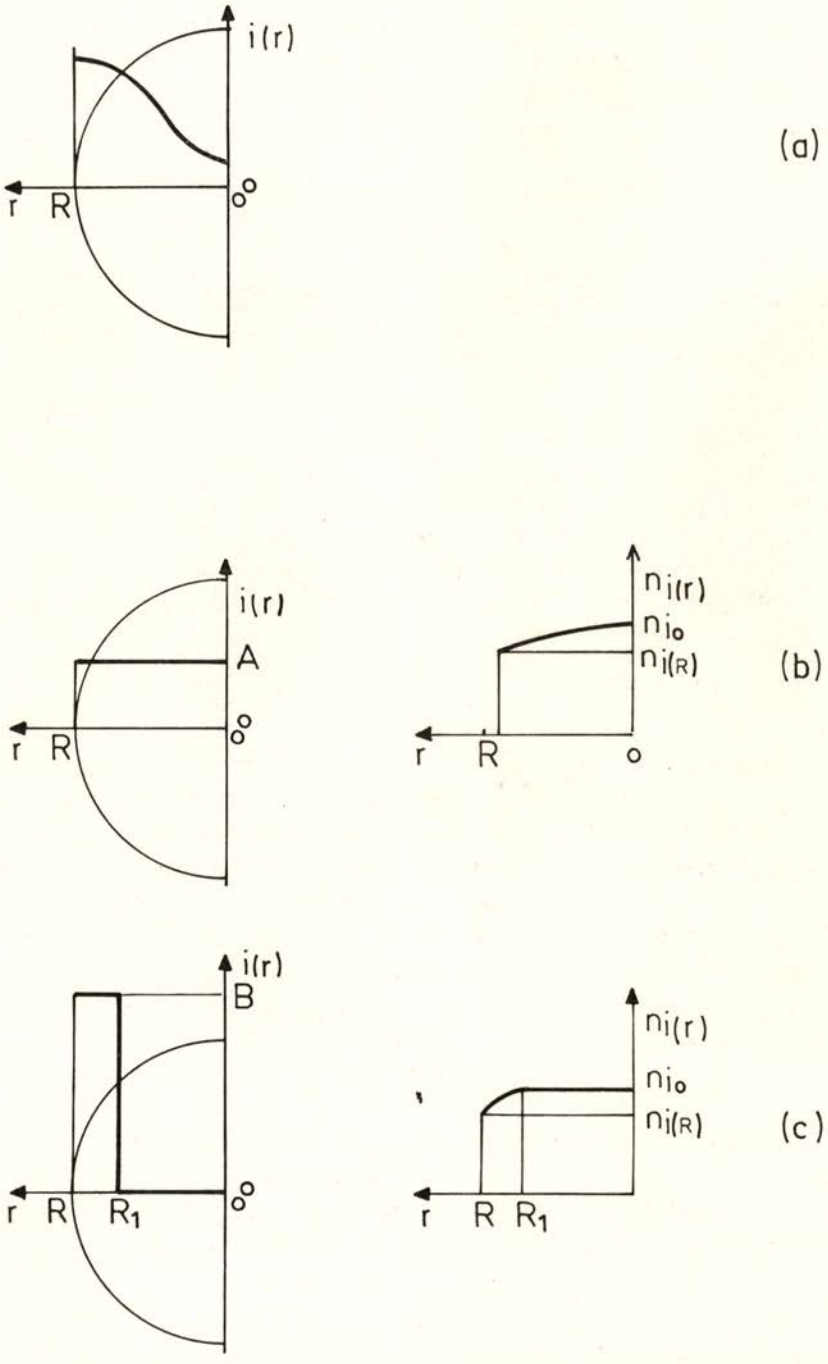


Fig. 9 — Forme du profil radial des processus d'ionisation :
a) Cas réel ; *b*) i(r) = Cte. ; *c*) i(r) = Cte. (non nul) à la périphérie de la cathode

devant être assuré par le seul gradient radial de densité). Dans ces conditions (9) devient:

$$D_a \nabla_r^2 n_i = -i(r) \tag{10}$$

si le régime de diffusion est ambipolaire parfait [20].

L'intégration de cette équation dépend évidemment, de la forme exacte de i(r). Nous l'avons fait, dans deux cas, correspondant à chacune des hypothèses suivantes:

— Ionisation uniforme dans toute la section transversale: i(r) = = cte (cf. Figure 9-b).

— Ionisation uniforme dans une couche sitée à la périphérie du canal, et nulle ailleurs (cf. Figure 9-c).

Ces calculs qui sont détaillés dans l'Appendice I-2, montrent que les profils de densité ionique correspondants sont définis par les expressions:

$$n_i(r) = n_i(0) - \frac{\mathscr{J}}{4\,D_a} r^2 \qquad (i(r) = cte) \tag{11}$$

et

$$\begin{cases} n_i(r) = n_i(0) - \dfrac{\mathscr{J}}{4\,D_a} \dfrac{R^2}{R^2 - R_1^2} \left[(r^2 - R_1^2) - R_1^2 \log \left(\dfrac{r}{R_1} \right)^2 \right] & r \geqslant R_1 \\ n_i(r) = n_i(0) \qquad r < R_1 \end{cases} \tag{12}$$

dans le cas de l'ionisation en couronne; R_1 est le rayon intérieur de cette couche périphérique.

L'analyse des expressions (11) et (12) montre que le profil le plus accentué correspond au cas $i(r) = cte$. Même dans ce dernier cas le profil est assez aplati: pour des conditions courantes de fonctionnement ($n_{io} = 10^{14}\,\mathrm{cm}^{-3}$; $n_n = 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$; $T_i = T_{paroi} = 2.500^{o}K$; $T_e = 3\,eV$; $\eta = 0{,}3$ *et* $R = 0{,}3$ cm) la densité ionique au niveau de la paroi atteindrait dans cette hypothèse 84 % de la densité maximale au centre du canal (cf. Appendice I-2).

D'autre part le régime de diffusion étant ambipolaire parfait, le profil de densité des électrons du plasma est identique à celui des ions, étant assez aplati.

c) *Atomes métastables*

Le cas des métastables est légèrement différent du cas précédent, dans la mesure où le terme de destruction des métastables (par choc inélastique), dépend effectivement de leur densité. Cependant, il a été prouvé que dans nos conditions de fonctionnement, on obtient encore un profil de densité presque constant dans la majeure partie de la section transversale du canal [21].

En conclusion, nous pouvons dire que les profils radiaux des densités de toutes les espèces de particules, satisfont assez bien à notre hypothèse des profils constants dans chaque section transversale du canal cathodique.

2.2.3 — *Champ électrique dans la C. P. I.*

a) *Expression du potentiel suivant l'axe longitudinal*

Notre hypothèse sur l'uniformité du champ électrique longitudinal repose sur la croissance linéaire de la tension de la décharge, en fonction de l'abscisse l du maximum de température cathodique (cf. Figure 7); en principe, l doit être liée à la dimension effective de la C. P. I.

Nous allons cependant définir celle-ci d'une manière plus précise, en disant que, pour des potentiels de la gaine inférieures à 11,6 V (potentiel d'excitation des niveaux métastables de l'Argon) les électrons émis par la paroi ont une faible probabilité d'assurer l'ionisation du gaz neutre.

Nous prendrons ainsi le début de la C. P. I. à une abscisse x_o, correspondant à la localisation de la partie centrale de l'équipotentielle $V_o = 11{,}6\ V$; le potentiel au centre du canal sera donné par l'équation :

$$V(x) = V_o + (x_o - x)\, X_I \qquad \text{pour} \qquad r = 0 \tag{13}$$

b) *Champ électrique radial dans la C. P. I.*

Dans le cas d'un régime de diffusion ambipolaire parfaite, le champ électrique radial X_r dans une colonne de plasma est lié à la

forme du profil radial de la densité électronique n_e par l'expression [20]:

$$X_r = \frac{D_e - D_i}{|\mu_e| - \mu_i} \frac{\nabla_r n_e}{n_e} \tag{14}$$

avec $D_{e,i}$ = coefficients de diffusion électronique et ionique.
$\mu_{e,i}$ = mobilités électronique et ionique.

En négligeant D_i devant D_e et μ_i devant μ_e et en faisant intervenir la relation d'Einstein on obtient:

$$X_r = \frac{k\,T_e}{q} \frac{\nabla_r n_e}{n_e} \tag{15}$$

En faisant intervenir la forme du profil de densité des électrons du plasma dans le cas le plus défavorable, nous vérifions (cf. Appendice I-3) que le champ radial est maximum au voisinage de la paroi; une limite supérieure de la valeur de ce champ est donnée par:

$$|X_r|_{max} = \frac{k\,T_e}{q} \frac{\mathscr{S} R}{2 D_a n_{eo}} \tag{16}$$

Pour des conditions courantes de fonctionnement ($n_{eo} \backsim 10^{14}$ cm^{-3}; $T_e = 3\,eV$; $R = 0{,}3$ cm; $\mathscr{S} = 2{,}5 \times 10^{19}$ cm^{-3} s^{-1}; $D_a = 4{,}26 \times \times 10^4$ cm^2 s) nous obtenons:

$$|X_r|_{max} \backsim 4{,}5\ V/\text{cm}$$

Remarquons encore que, dans le cas où la majeure partie des processus d'ionisation se vérifie près de la paroi, le potentiel reste constant dans la partie centrale de chaque section transversale du canal.

Pour illustrer ces résultats nous avons calculé la forme de la variation radiale du potentiel dans les cas: $i(r) = cte$ (cf. Figure 10-a); $i(r)$ limité à une couche périphérique du canal. Nous avons pris $V(0) = = 50\ V$ et une épaisseur de la couche d'ionisation $R - R_1 = 0{,}1$ cm (cf. Figure 10-b); les autres paramètres ont les mêmes valeurs que ci-dessus.

Nous vérifions ainsi que le potentiel ne varie que faiblement dans chaque section transversale: *les equipotentielles sont pratiquement normales à la paroi dans la partie centrale du canal cathodique.*

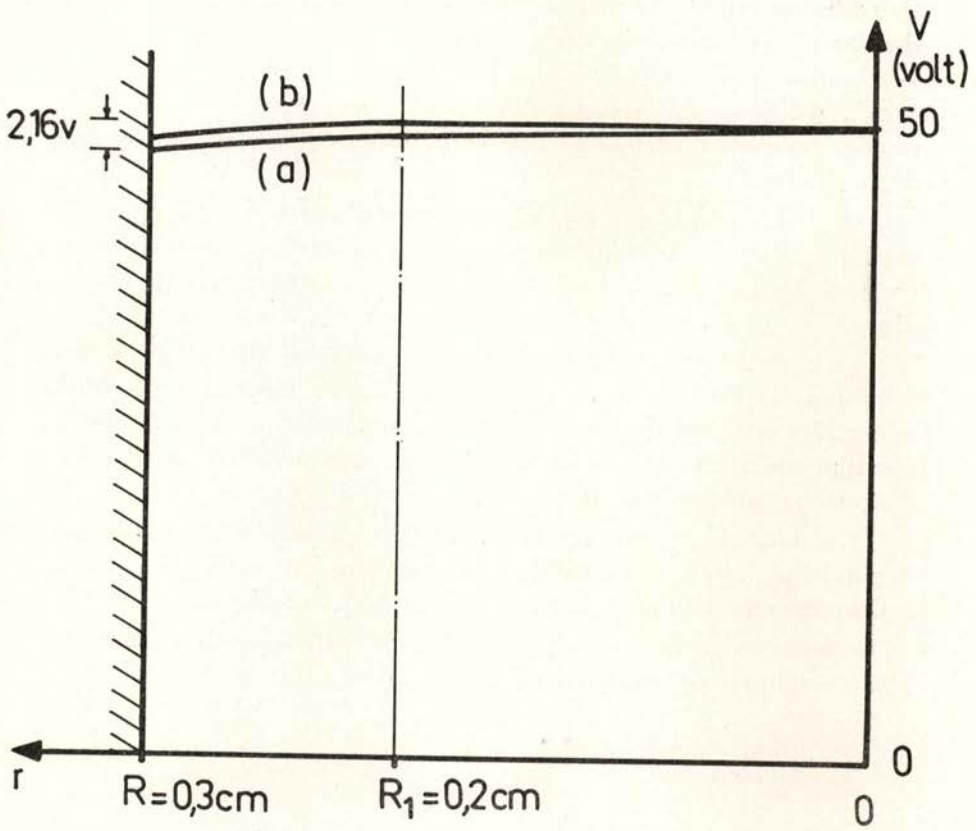


Fig. 10 — Variation radiale du potentiel au sein du plasma de la C. P. I.: *a)* $i_r = \text{Cte.}$; *b)* $i_r = \text{Cte.}$ pour $R > r > R_1$ et $i_r = 0$ ailleurs

2.2.4 — *Mouvements macroscopiques des particules chargées*

Nous pouvons considérer dans le canal cathodique l'existence de trois catégories de particules chargées, dont nous allons examiner l'origine et les déplacements macroscopiques :

— Électrons du plasma de la C. P. I. ($T_e \sim 2$ à $5\ eV$).
— Ions du plasma de la C. P. I. ($T_i \sim 0{,}2\ eV$).
— Électrons rapides provenant de l'émission cathodique.

Ces électrons d'émission acquièrent leur énergie initiale en traversant la gaine ($V_g \sim 12$ à $50\ V$ suivant l'abscisse du point d'émission considéré); puis, ils perdent des fractions importantes de cette énergie

au cours des collisions inélastiques sur les particules lourdes (ionisation directe des atomes neutres — 16 eV de perte; excitation des niveaux métastables — 12 eV; ionisation à partir de l'état métastable — 4 eV). Au cours des collisions inélastiques successives, les électrons rapides deviennent de plus en plus lents jusqu'à atteindre des énergies de l'ordre de T_e.

On conçoit ainsi que les électrons constituant le plasma proviennent du refroidissement (par choc inélastique) des électrons d'émission et aussi des processus d'ionisation qui ont lieu dans le canal cathodique.

En régime permanent, tout se passe comme si la fonction de distribution des électrons présents dans la colonne était la superposition d'une Maxwellienne de température électronique T_e et d'une certaine fonction qui tient compte de la présence d'un excès de population d'électrons rapides dans la colonne.

Les ions du plasma de la C. P. I. proviennent des phénomènes d'ionisation dans le canal cathodique, mais aussi de ceux qui ont lieu à l'extérieur (notamment au niveau de la chute anodique).

Cherchons maintenant à déterminer la nature des mouvements macroscopiques de ces particules.

a) *Mouvement radial*

Nous avons déjà remarqué que le régime de diffusion des électrons et ions du plasma était ambipolaire parfait. Cependant, les densités de ces particules présentent un faible gradient radial et nous les avons considérées comme constantes dans la section transversale du canal (à l'exception de la région de la gaine).

Dans ces conditions, le flux d'ions qui atteint la lisière de la gaine est simplement $\frac{n_i w_i}{4}$, w_i étant leur vitesse d'agitation thermique. Ces ions sont alors accélérés dans la gaine et vont bombarder la paroi cathodique.

Pour ce qui est des électrons (qu'ils soient lents ou rapides) la situation est toute autre, puisque le potentiel de la gaine les empêche de franchir la lisière de celle-ci: ils sont repoussés par le champ radial et réintègrent la partie centrale du canal.

Ainsi leurs mouvements d'ensemble dans la direction longitudinale sont les seuls qu'il faut considérer.

b) *Mouvement longitudinal*

Les particules présentes sont des électrons et ions du plasma (T_e, T_i) et des électrons rapides. Pour ce qui de ces derniers, nous allons les considérer comme appartenant à des groupes discrets d'énergie, caractérisés par les températures $T_{l,m,n\ldots}$. Pour chacune de ces espèces de particules nous allons déterminer lequel des deux processus — mobilité ou diffusion — est responsable de leurs mouvements macroscopiques dans la direction axiale.

Les termes de flux longitudinal des particules dont l'espèce est caractérisée par l'énergie T_k, dans les cas de la diffusion longitudinale et de la mobilité, s'écrivent respectivement :

$$D_k \nabla_x n_k(x) \qquad \text{et} \qquad \mu_k X_x n_k(x)$$

∇_x et X_x étant le gradient et le champ électrique dans la direction axiale.

Le rapport ε_k de ces deux termes vaut donc :

$$\varepsilon_k(x) = \frac{D_k}{\mu_k} \frac{1}{X_x} \frac{\nabla_x n_k(x)}{n_k(x)} \tag{17}$$

$$= \frac{K T_k}{q} \frac{1}{X_x} \frac{\nabla_x n_k}{n_k}$$

On peut mettre le rapport $\dfrac{\nabla_x n_k}{n_k}$ sous la forme :

$$\frac{\nabla_x n_k}{n_k} = \frac{1}{e_k(x)} \tag{18}$$

e_k étant une longueur caractéristique correspondant à une variation appréciable de la densité des particules k et qui est fonction de l'abscisse considérée. On vérifie ainsi que la valeur de ε_k dépend de cette longueur e_k sur laquelle nous allons comparer les effects de la diffusion et de la mobilité :

$$\varepsilon_k(x) = \frac{K T_k}{q} \frac{1}{X_x e_k(x)} \tag{19}$$

Il nous faut donc un critère pour l'évaluation de e_k. Or, nous verrons dans le chapitre II-6 que pour faciliter l'analyse des processus inélastiques à l'intérieur du canal cathodique, nous serons amenés à effectuer un découpage de celui-ci en «tranches» dont l'épaisseur Δx est définie par la relation:

$$\Delta x = \frac{V_i - V_m}{X_x} \tag{20}$$

V_i et V_m étant respectivement les potentiels d'ionisation et d'excitation des niveaux métastables de l'Argon ($V_i - V_m \sim 4\ V$).

Cette longueur Δx correspond qualitativement à la longueur de canal sur laquelle nous pouvons considérer que les processus inélastiques au sein du plasma ne varient pas sensiblement. Le canal cathodique serait ainsi considéré comme une juxtaposition de tranches de plasma dont les caractéristiques varient seulement à la surface de séparation de deux tranches.

Nous verrons aussi que les variations de densité les plus brutales entre deux tranches adjacentes correspondent au cas des électrons d'émission qui viennent juste de franchir la gaine positive; ces variations décroissent pour les électrons qui ont déjà perdu une partie de leur énergie par choc inélastique, en devenant très faibles pour les électrons thermalisés ($T_e \sim 2$ à $5\ eV$).

On peut donc considérer que $e_k \geqslant \Delta x$, l'égalité s'appliquant au cas des électrons les plus rapides; l'inégalité est forte pour les électrons thermalisés et pour les ions.

D'après ce qui précéde nous pouvons écrire l'expression (19) sous la forme suivante (cas des ions) :

$$\varepsilon_i \ll \frac{k\,T_i}{q}\ \frac{1}{X_x\,\Delta x} \tag{21}$$

soit, en tenant compte de (20) :

$$\varepsilon_i \ll \frac{T_i}{4}\quad (T_i\ en\ Volt) \tag{22}$$

Pour les électrons thermalisés on aura de la même façon :

$$\varepsilon_e \ll \frac{T_e}{4} \tag{23}$$

et finalement, pour les électrons les plus rapides (d'énergie T_k) :

$$\varepsilon_k \sim \frac{T_k}{4} \tag{24}$$

On peut alors tirer les conclusions suivantes :

— Les *ions du plasma* ($T_i \lesssim 0{,}2$ *V*) sont entrainés par le *champ électrique longitudinal* (donc vers l'intérieur du canal cathodique) ; la diffusion ne joue aucun rôle ($\varepsilon_i \ll 1$).

— Les *électrons thermalisés du plasma* ($T_e \gtrsim 2$ à 5 *V*) sont aussi entrainés par le *champ électrique* (donc vers la sortie du canal) ($\varepsilon_e \ll 1$).

— Les *électrons les plus rapides* (T_k pouvant atteindre quelques dizaines de Volts) sont par contre entraînés par leur *gradient de densité;* le champ électrique ne joue aucun rôle dans leur déplacement ($\varepsilon_k > 1$).

Au fur et à mesure que ces électrons deviennent moins énergétiques, la diffusion diminue et la mobilité devient de plus en plus déterminante.

2.2.5 — *Description du modèle adopté pour l'étude de la région cathodique*

D'après les conclusions des paragraphes précédents, nous postulons pour notre modèle les propriétés suivantes :

a) Les densités des électrons et ions du plasma de la C.P.I., et celles des atomes neutres dans l'état fondamental ou métastable, sont considérées comme constantes dans chaque section transversale (à l'exclusion de la gaine positive).

Pour ce qui est des électrons rapides, leur profil radial réel ne nous intéresse pas; que des collisions inélastiques se produisent au centre du canal ou à sa périphérie, c'est le nombre de ces processus en fonction de l'abscisse du canal qu'il importe de déterminer pour la suite de notre travail.

Nous prendrons donc les valeurs de toutes les grandeurs en cause comme dépendant seulement de la coordennée axiale x.

b) Les équipotentielles à l'intérieur du canal cathodique seront considérées comme parallèles à la paroi au voisinage immédiat de celle-ci (région de la gaine, d'épaisseur e négligeable devant R). Le champ eléctrique y est donc purement radial.

c) Dans la partie centrale du canal (jusqu'au rayon R-e) les équipotentielles seront considérées comme planes et normales à la paroi cathodique.

D'après les deux hypothèses précédentes le potentiel à l'intérieur du canal s'écrit :

$$V(x, r) = V(x) = V_o + (x_o - x) X_I \quad \text{pour} \quad r \leqslant R - e \qquad (25)$$

La forme de ces équipotentielles est indiquée dans la Figure 11.

d) *Relation entre les abscisses x_o et l*

À première vue, ces deux abscisses devraient coincider; en fait, leur signification est différente (cf. Figure 12).

La longueur x_o apparaît liée à l'existence d'une chute de potentiel radiale V_o suffisante pour être à l'origine de processus inélastiques. En effet, pour des points situés plus près du support de la cathode, la chute radiale est insuffisante pour communiquer aux électrons émis par la paroi cathodique l'énergie nécessaire à l'excitation d'un niveau radiatif ou métastable. Le gaz doit donc y être neutre en totalité. La longueur x_o est donc liée théoriquement à la dimension effective du plasma cathodique. Cependant, il paraît douteux qu'on puisse mesurer directement cette longueur.

En revanche, la longueur l a une origine expérimentale, représentant l'abscisse du maximum de température de la paroi. Encore une fois, la chute de potentiel radiale V_C à ce niveau, obtenue par la voie expérimentale, se trouve être voisine de V_o. Cependant, rien ne permet d'affirmer que x_o et l coincident; tout au plus on peut dire que les deux longueurs sont voisines et varient dans le même sens en fonction des variations des paramètres de la décharge.

3 — ÉCOULEMENT DU GAZ NEUTRE À L'INTÉRIEUR DE LA CATHODE; RÉPARTITION LONGITUDINALE DE LA DENSITÉ DES NEUTRES

Le gaz introduit dans le canal cathodique s'écoule en raison de de la dépression créée par le pompage de l'enceinte.

Nous verrons plus loin que, pour les valeurs du rayon R et débit Q_c utilisées, nous sommes en présence d'un écoulement laminaire, intermédiaire entre le régime visqueux et le régime moléculaire.

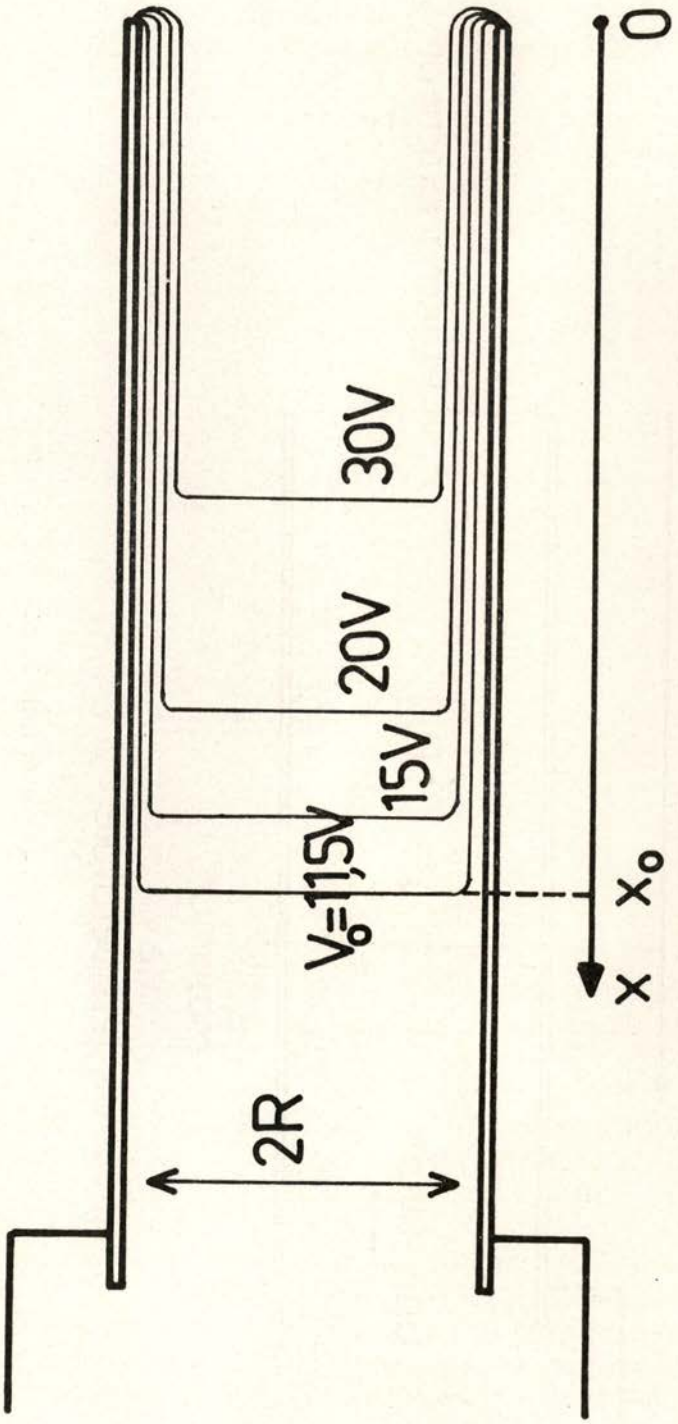


Fig. 11 — Modèle de la forme des équipotentielles à l'intérieur du canal cathodique

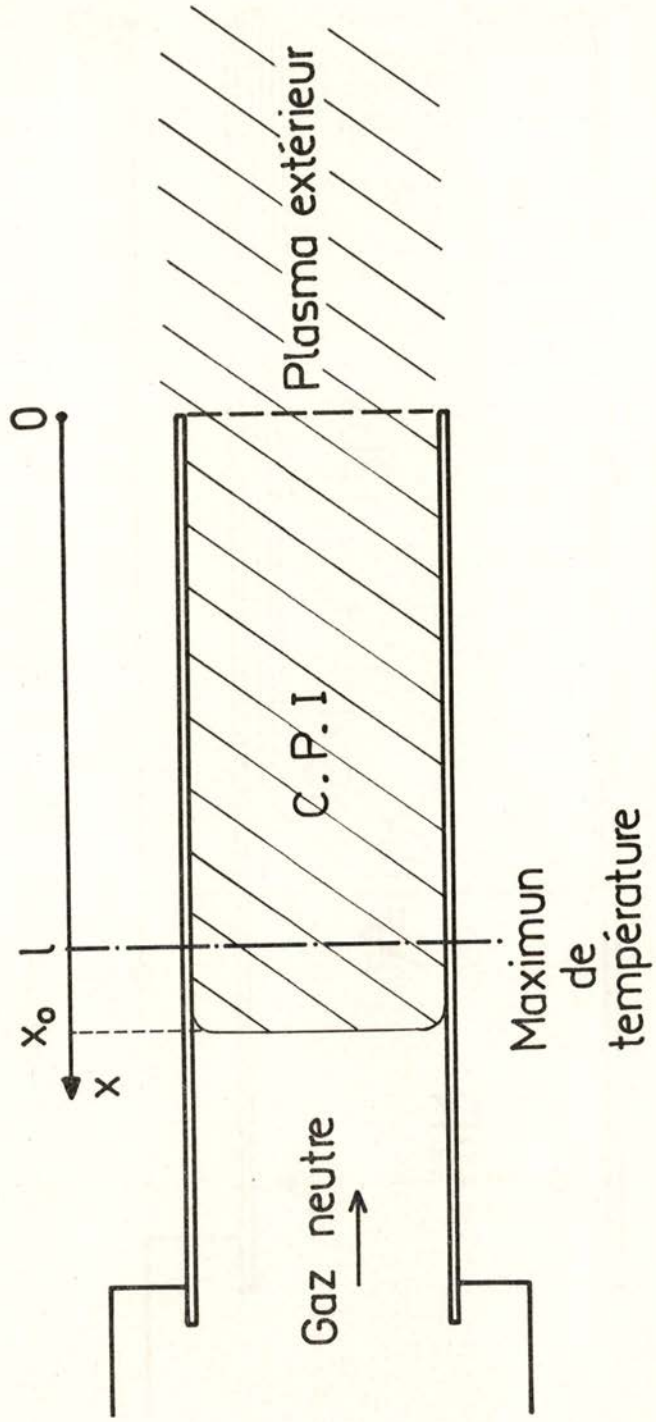


Fig. 12 — Relation entre les abscisses x_0 et l

Dans ces conditions la pression $P(x)$ du gaz neutre à l'abscisse x du canal de rayon R, en fonction du débit cathodique Q_c et de la pression P_E dans l'enceint, s'obtient à partir de l'équation de Poiseuille modifiée pour le régime intermédiaire (cf. Appendice II) et l'on peut écrire :

$$P(x) = \frac{k\,T_m\,b}{R}\left\{\left[a\,\frac{x\,Q_c}{R^2} + \left(\frac{P_E\,R}{k\,T_m\,b} + 1\right)^2\right]^{1/2} - 1\right\} \qquad (26)$$

avec : a et b : deux fonctions de la température moyenne du gaz, T_m, représentées dans la Figure 13 ;

Q_c : débit du gaz, ramené aux conditions normales de pression et de température ;

k : constante de Boltzmann.

Cette équation se simplifie dans les cas où la pression dans l'enceinte P_E est suffisamment basse pour que l'on ait :

$$P_E \ll \frac{b}{R}\,k\,T_m \qquad (27)$$

soit, en utilisant des unités plus commodes (P_E en Torr; b, T_m et R en unités *CGS*) :

$$P_E \ll 10^{-19}\,\frac{b\,T_m}{R} \qquad (28)$$

Dans nos expériences la limite supérieure de la température du gaz est $T_m = 3000^{\circ}\,K$. D'après la Figure 13 et pour un rayon moyen de $R = 0{,}3$ cm on obtient :

$$P_E \ll 2{,}3 \text{ Torr} \qquad (29)$$

ce qui est nettement vérifié dans nos expériences des cathodes fonctionnant en régime normal (avec C.P.I.).

Dans ces circonstances nous pouvons écrire :

$$P(x) = \frac{k\,T_m\,b}{R}\left[\left(a\,\frac{x\,Q_c}{R^2} + 1\right)^{1/2} - 1\right] \qquad (30)$$

et finalement, en faisant intervenir la densité des neutres $n_n(x)$ on aura :

$$n_n(x) = \frac{b}{R}\left[\left(a\,\frac{x\,Q_c}{R^2} + 1\right)^{1/2} - 1\right] \tag{31}$$

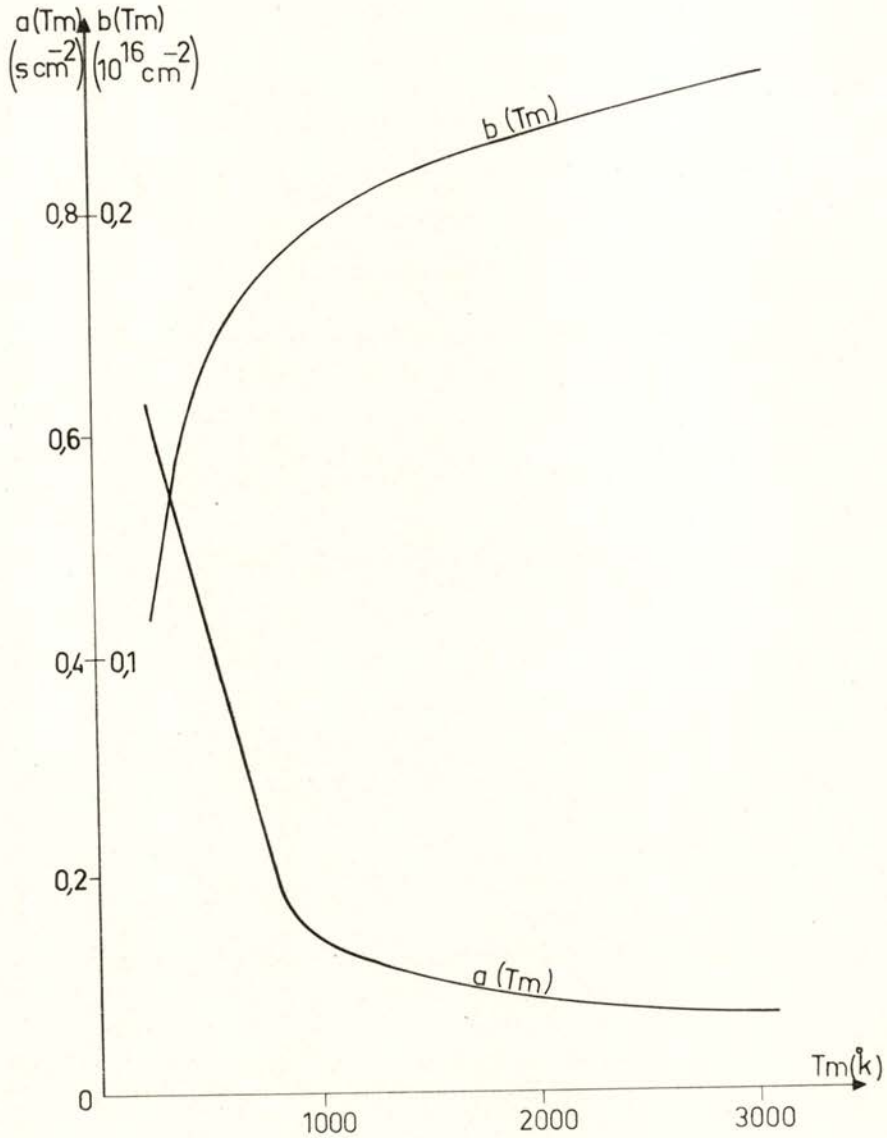


Fig. 13 — Fonctions a et b de la température du gaz T_m

La fonction $n_n . R$ est représentée dans la Figure 14 en fonction de la variable $\frac{x\, Q_c}{R^2}$, pour différentes températures T_m du gaz (nous avons inversé le sens positif habituel de l'échelle des abscisses, de façon à tenir compte de la disposition de la cathode que nous avons adoptée — flux de gaz de gauche à droite).

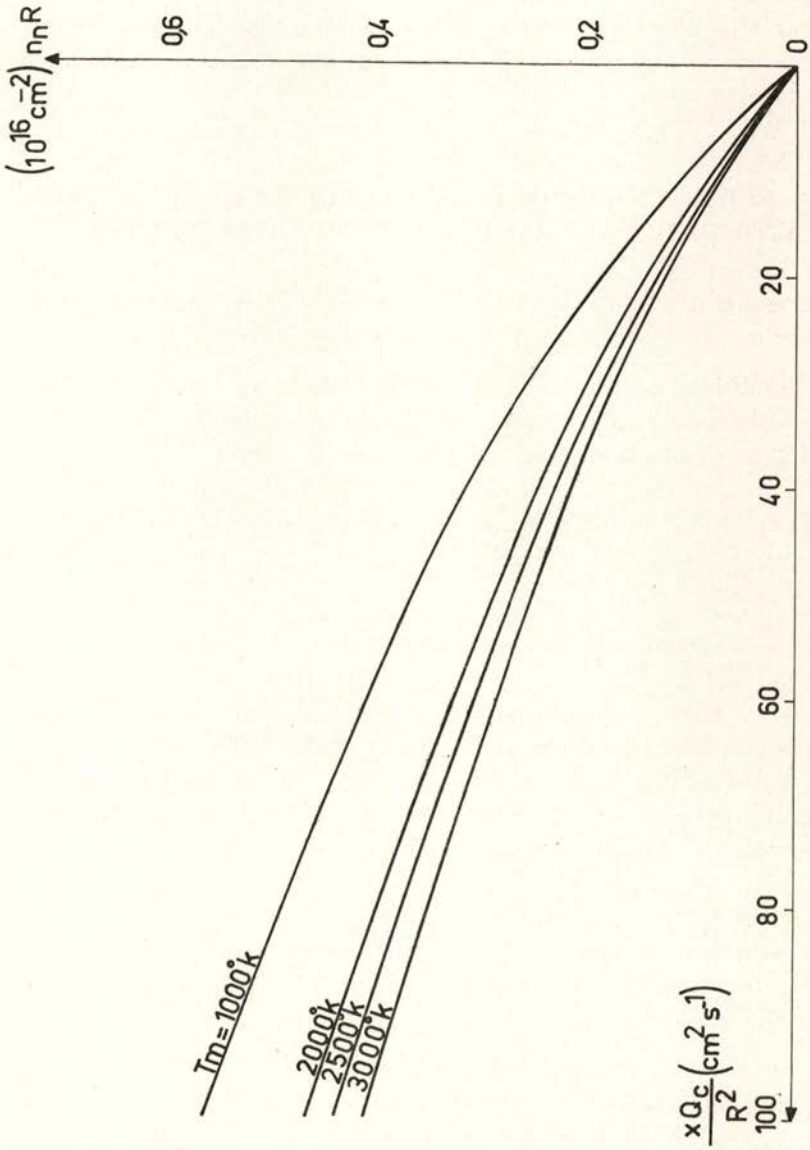


Fig. 14 — Valeurs du produit $n_n R$ en fonction de $\frac{x\, Q_c}{R^2}$ pour différentes valeurs de T_m

Soulignons encore que ces courbes ne sont applicables que si la pression dans l'enceinte est suffisamment faible pour que la condition (28) se trouve vérifiée. Si par contre P_E devient de l'ordre du Torr, la pression effective à chaque abscisse du canal s'en trouve augmentée par rapport à celle qui est donnée par les courbes de la Figure 14.

Ceci est en accord avec les résultats expérimentaux qui montrent un déplacement du maximum de température cathodique vers la sortie du canal, lorsqu'on augmente P_E; on aura donc tendance à croire que l'abscisse de ce maximum correspond à une pression locale bien déterminée.

4 — EFFETS THERMIQUES À L'INTÉRIEUR DU CANAL CATHODIQUE: ÉCHAUFFEMENT DU GAZ NEUTRE

Le gaz neutre qui s'écoule le long du canal cathodique est soumis à plusieurs processus d'échauffement dont les principaux sont:

a) Collisions élastiques avec les électrons.
b) Collisions de 2ème espèce avec les atomes excités.
c) Conduction thermique gaz-métal de la cathode.

Nous allons évaluer sucessivement l'importance de ces trois processus.

4.1 — *Collisions élastiques électron-neutre*

Les électrons présents dans la région cathodique sont produits: par émission thermoionique de la paroi métallique (dont la température à l'abscisse du maximum peut atteindre 3000° K); par émission secondaire de cette paroi, bombardée par des atomes métastables et des ions; et par ionisation du gaz neutre à l'intérieur du canal cathodique.

En raison de l'existence de la gaine ionique qui crée um champ électrique radial au voisinage de la paroi, les électrons libérés de celle-ci acquièrent une énergie qui, suivant les conditions locales, peut être suffisante pour créer:

— des atomes excités dans l'état métastable;
— une ionisation en deux étapes, en passant par l'état métastable;
— l'ionisation directe des atomes d'Argon.

D'autre part, les électrons (thermalisés) du plasma de la C. P. I. peuvent aussi exciter ou ioniser les atomes neutres. Il ne s'agit évidemment que des électrons de la queue de la fonction de distribution électronique ($T_e \sim 2$ à $5\ eV$).

Cependant tous ces électrons effectuent entre temps des collisions élastiques avec les atomes neutres. Lors de chacune de ces collisions l'énergie ΔE transférée à l'atome vaut :

$$\Delta E = E_o \frac{2\,m}{M} \tag{32}$$

E_o étant l'énergie initiale de l'électron, m et M les masses de l'électron et de l'atome. Cependant, le grand nombre de collisions de ce type peut conduire à un échauffement du gaz non négligeable.

On peut effectuer un calcul d'ordre de grandeur basé sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

— Les électrons d'émission cathodique perdent leur énergie principalemente par collision inélastique.

— Prenons une C. P. I. suffisamment longue pour que le potentiel «moyen» de la gaine ionique y soit $\overline{V}_g = 36\ V$ (par exemple : $x_o = 6$ cm ; $X_I = 8\ V/\text{cm}$; $V(0) = 60\ V$; $V(x_o) = 12\ V$).

— Considérons que la totalité du courant de la décharge I provient du courant d'émission cathodique, ce qui est, évidemment, une hypothèse extrême.

Ces hypothèses sont suffisantes pour calculer l'échauffement du gaz par collision élastique avec les électrons d'émission cathodique. Pour ce qui est des collisions avec les électrons thermalisés du plasma de la C. P. I., nous admettrons une densité de ces électrons $n_e = 10^{14}\ \text{cm}^{-3}$, sur la base de résultats expérimentaux confirmés [16] [17] [18].

a) *Échauffement par les électrons d'émission*

Il s'agit maintenant de calculer combien de collisions élastiques électron-neutre effectuent en moyenne les électrons d'émission, pendant le temps qu'il leur faut pour perdre la totalité de leur énergie par choc inélastique. Si l'on prend comme référence le processus d'exci-

tation des niveaux métastables ($V_m = \overline{V}_g / 3$; section efficace σ^m), ce nombre est de l'ordre de :

$$N_{el} = 3 \frac{\sigma^{en}}{\sigma^m} \tag{33}$$

par électron. La puissance initiale des électrons qui constituent le courant d'émission sera :

$$W_o = \overline{V}_g \, I \tag{34}$$

Finalment, la puissance transmise au gaz par ces électrons (ΔW_o) sera :

$$\Delta W_o = 3 \frac{\sigma^{en}}{\sigma^m} \frac{2m}{M} \overline{V}_g \, I \tag{35}$$

Nous poursuivons notre calcul d'ordre de grandeur en nous donnant des conditions extrêmes : attribuons ainsi à σ^{en} la valeur maximale qu'elle prend dans l'Argon (correspondant à l'énergie de 12 $e\,V$) et à σ^m une valeur moyenne :

$$\sigma^{en} = 14{,}2 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$$
$$\sigma^m = 3 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$$

On obtient ainsi, pour un courant moyen $I = 30\ A$:

$$\Delta W_o = 0{,}63 \text{ watt}$$

b) *Échauffement par les électrons du plasma de la C. P. I.*

En raison de leur énergie assez faible ($T_e \backsim 2$ à 5 $e\,V$) la perte d'énergie des électrons thermalisés se fait surtout par collision élastique. Le taux de ces collisions (avec les neutres) dans le canal cathodique s'écrit :

$$\tau^{en} = n_e \, n_n < \sigma^{en} \, w_e > \tag{36}$$

La puissance ΔW_1 fournie au gaz dans la C. P. I. sera donc :

$$\Delta W_1 = n_e \, n_n < \sigma^{en} \, w_e > \frac{2m}{M} \frac{3}{2} \, k \, T_e \, \pi \, R^2 \, x_o \tag{37}$$

soit, pour $\sigma^{en}=5\times10^{-16}\,\mathrm{cm}^2$ ($T_e=5\ e\,V$), $R=0{,}44\,\mathrm{cm}$, $n_n=5\times10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$ et $x_o=5\,\mathrm{cm}$, on obtient :

$$\Delta W_1 \leqslant 4{,}3 \text{ watts}$$

4.2 — *Collisions de 2ème espèce atome-atome métastable*

Ce processus, traduit par l'équation de réaction :

$$A + A^* \rightarrow 2\,A + E_2 \tag{38}$$

dégage, pour chaque collision, une énergie E_2 importante. Si l'on suppose que les deux atomes se retrouvent après la collision, dans l'état fondamental, l'énergie libérée est de $E_2 = 11{,}6\ e\,V$ (énergie des niveaux métastables de l'Argon).

Le nombre de collisions de ce type, par unité de volume et par unité de temps, s'écrit :

$$\tau_{mn} = n_m\, n_n\, \sigma_2^{mn}\, w_m \tag{39}$$

avec : n_m la densité des métastables.

n_n la densité des atomes neutres.

σ_2^{mn} la section efficace de la réaction de 2ème espèce.

w_m la vitesse thermique des métastables.

Considérons, comme auparavant, une situation extrême :

— colonne longue : $x_o = 5$ cm
— fort rayon : $R = 0{,}44$ cm
— T_m (température des métastables) 3000° K
— $n_n = 5 \times 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$ (*)
— $n_m = 5 \times 10^{14}\,\mathrm{cm}^{-3}$
— les densités des neutres et des métastables seront prises comme constantes sur toute la C. P. I. (ceci correspond encore à nous situer à une limite supérieure).

(*) Comme nous le verrons dans le chamitre II-6, ces chiffres, quoique élevés, sont acceptables comme des limites supérieures.

Dans ces conditions, la puissance fournie par les métastables au gaz sera ($\sigma_2^{mn} = 2{,}1 \times 10^{-20}$ cm^2) :

$$\begin{aligned} &\Delta W_2 \leqslant n_m\, n_n\, \sigma_2^{mn}\, w_m\, E_2\, \pi\, R^2\, x_o \\ &\Delta W_2 \leqslant 0{,}21 \text{ watt} \end{aligned} \tag{40}$$

Du fait de l'ensemble de ces processus collisionnels le gaz absorbe dans la C. P. I. une puissance $\Delta W_{coll.}$ donné par :

$$\begin{aligned} &\Delta W_{coll.} = \Delta W_0 + \Delta W_1 + \Delta W_2 \\ &\Delta W_{coll.} < 5{,}5 \text{ watts} \end{aligned} \tag{41}$$

4.3 — *Échauffement du gaz par la paroi cathodique*

A l'inverse des termes précédants, ce terme d'échauffement ne peut pas être évalué a priori: il dépend, en effet, des températures relatives du gaz et de la paroi métallique. De plus, il n'est même pas évident quel est son signe: il sera positif si la cathode est plus chaude que le gaz, négatif dans le cas inverse. Or, si la cathode est à haute température en raison des processus de bombardement que nous détaillerons dans le chapitre suivant, le gaz neutre a, lui aussi, des processus d'echauffement spécifiques (collisions élastiques $e-n$ et collisions de 2ème espèce $n-m$) qui peuvent amener le gaz à une température encore plus élevée.

Cependant il faut signaler que ces processus n'ont lieu que dans la région de la C.P.I.; pour des abscisses plus grandes où il n'y a pas de plasma, le gaz neutre ne peut être chauffé que par la conduction thermique à partir de la paroi. Celle-ci a dans la longueur qui précède la C.P.I. une température minimale (tout près du support refroidi) d'environ 800° C; la température maximale est variable, comme nous l'avons précisé, mais en tout cas supérieure à 1500° C.

Le gaz neutre, initialement froid, est donc chauffé à partir de la température ambiante jusqu'à une température de l'ordre du millier de °C, exclusivement par conduction thermique métal-gaz. Une fois dans la C.P.I. le gaz est encore chauffé par les collisions — éventuellement il sera porté à une température supérieure à celle de la paroi. Nous allons considérer séparément ces deux zones (cf. Figure 15).

a) *Zone précédant la C. P. I.* ($x > x_o$)

Nous avons vu qu'il y avait un transfert de chaleur dans le sens métal → gaz dans la longueur de canal qui précède la C. P. I.; nous voulons évaluer la puissance transmise au gaz dans cette région.

Soit le gaz introduit dans le canal cathodique avec um débit Q_c et une température initiale T_1, voisine de la température ambiante ($T_1 \sim 300^o\ K$). Ce gaz traverse la longueur de canal qui précéde la C. P. I. et dont la température (variable suivant l'abscisse) de la paroi, T_p, peut atteindre environ $2500^o\ K$.

Le calcul de la tampérature T_2 du gaz au bout de cette zone est basé sur une méthode proposée par Mac Adam [22]; les détails de ce calcul sont présentés dans l'Appendice III. On aboutit au résultat suivant:

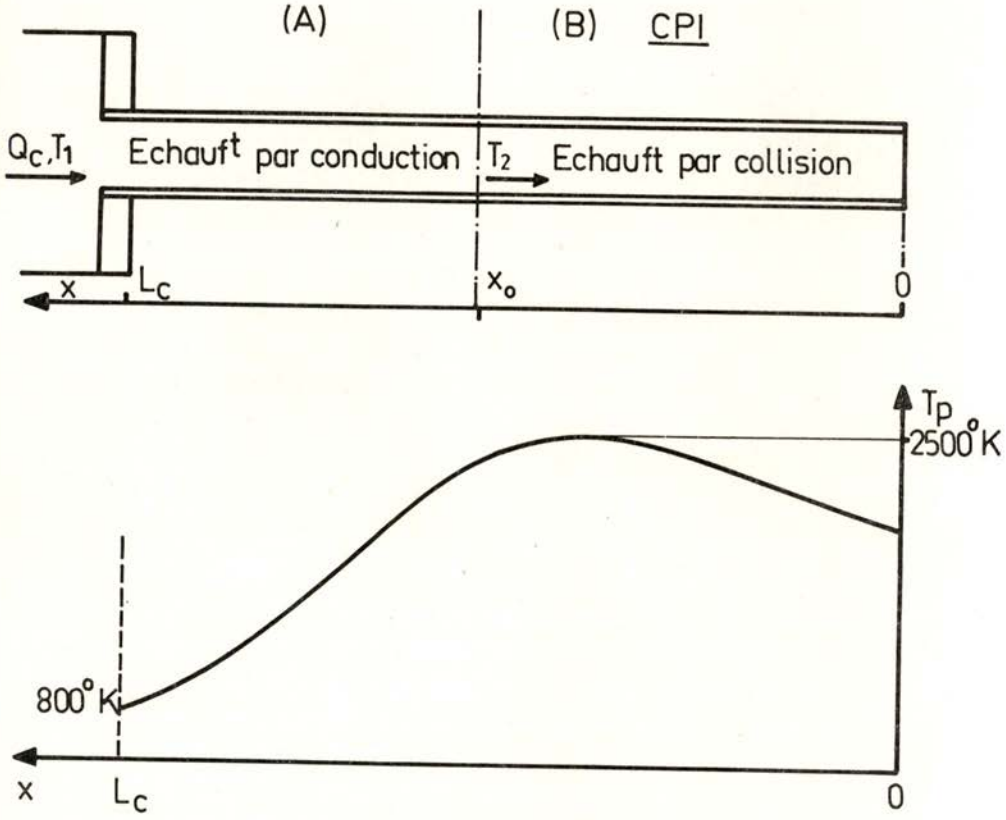


Fig. 15 — Régions de la cathode suivant le processus dominant d'échauffement du gaz

Pour les ordres de grandeur de température qui nous concernent, le gaz d'Argon se met approximativement en équilibre thermique avec la paroi au bout d'un parcours L_{th} (longueur d'équilibre thermique) qui est donné (numériquement) par :

$$L_{th} = \frac{Q_c}{3} \quad (L_{th} \text{ en cm}; \; Q_c \text{ en cm}^3\text{s}^{-1}) \tag{42}$$

Même pour des débits très forts (le plus grand débit que nous avons utilisé dans nos expériences était $Q_c = 3 \text{ cm}^3/\text{s}$) cette longueur ne dépasse pas 1 cm et décroît linéairement avec le débit.

On conçoit que dans ces conditions le gaz suit les variations de la température de la paroi avec un certain décalage, faible pour des valeurs courantes du débit cathodique.

La limite supérieure de la puissance ΔW_{pg} transférée au gaz par la paroi dans la partie du canal qui précède la C. P. I. correspond au cas $T_2 = T_{p_{max}}$. Si l'on pose $T_{p_{max}} = 2500^o\ K$, $T_1 = 300^o\ K$, $Q_c = 3 \text{ cm}^3\text{ s}^{-1}$ ($q_c = 5{,}4 \times 10^{-3} g\ s^{-1}$) et $C_p\ (2500^o\ K) = 0{,}52\ J/g^o\ K$ [23] on aura :

$$\Delta W_{pg} = q_c\, C_p\, (T_p - T_1)$$
$$\Delta W_{pg} < 3{,}5 \text{ watts} \tag{43}$$

b) *C. P. I.* ($x \leqslant x_o$)

Le gaz qui pénètre dans cette région a déjà une température très voisine de celle de la paroi; il sera porté à une température encore supérieure en raison des processus de collision. Cependant le couplage thermique existant entre le gaz et la paroi métallique, limite la température que le gaz peut atteindre ; c'est cet effet que nous essayerons d'évaluer quantitativement.

Soit $\Delta W_{coll.}$ la puissance libérée au sein du gaz dans la C. P. I. par l'ensemble des processus de collision (paragraphe II-4.2).

Cette puissance fera augmenter la température moyenne du gaz, qui deviendra de ce fait plus chaud que la paroi. Ceci implique l'apparition d'un gradient radial de température au voisinage de la paroi, provoquant un flux de chaleur dans le sens gaz-métal.

Il est bien évident qu'une limite supérieure de la puissance ainsi transférée est donée par $\Delta W_{coll.}$ (le gaz ne pouvant transmettre au métal une puissance plus grande que celle qu'il reçoit du fait des collisions).

Nous pouvons donc écrire l'équation de transfert de chaleur par conduction radiale sous la forme d'une inégalité :

$$\Delta W_{coll.} > 2\,\pi\,R\,x_o\,\lambda\left(\left|\frac{dT}{dr}\right|\right)_{r=R} \tag{44}$$

d'où :

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} < \frac{\Delta W_{coll.}}{2\,\pi\,R\,x_o\,\lambda} \tag{45}$$

En fait, le gradient radial de température doit être croissant entre l'axe de la colonne et la paroi; on peut donce écrire, a fortiori :

$$\frac{T_M - T_p}{R} < \frac{\Delta W_{coll.}}{2\,\pi\,R\,x_o\,\lambda} \tag{46}$$

T_p étant la température du gaz pour $r = R$ et T_M la température maximale possible du gaz dans une section transversale (cf. Figure 16).

On aura alors pour $x_o = 5$ cm, $\Delta W_{coll.} = 5$ watts, $\lambda\,(2500^o\,K) = 6{,}91 \times 10^{-4}\ W/\text{cm}\ ^oK$ [24] :

$$T_M - T_p < 230^o\,K$$

c'est à dire, dans l'hypothèse la plus défavorable, l'écart relatif entre la température moyenne du gaz dans une section transversale de la C. P. I. et la température de la paroi ne dépasse pas 5 %.

4.4 — *Conclusions*

Résumons rapidement nos résultats. Il y a deux zones, le long de la cathode, correspondant à des processus différents d'échauffement du gaz :

— *Zone qui précède la C. P. I.* : le gaz y entre froid et se met rapidement en équilibre avec la paroi de la cathode par conduction thermique. La longueur d'équilibre thermique varie de quelques dixièmes de millimètre (très faible débit) à 1 cm (débit maximum) ; la puissance

transférée par ce processus est de l'ordre des centièmes d'watt à quelques watts suivant les débits.

— *C. P. I.*, où le gaz entre déjà à une température élevée; il y est encore chauffé par les collisions, ce qui implique un transfert de chaleur dans le sens gaz → paroi.

La puissance ainsi transférée ne dépasse pas quelques watts; la température moyenne du gaz s'écarte de moins de 5 % de celle de la paroi.

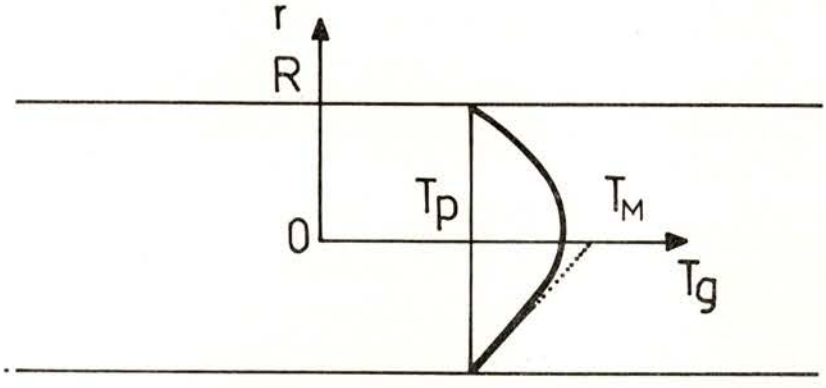


Fig. 16 — Répartition radiale de la température du gaz dans la C. P. I. (qualitatif)

5 — EFFETS THERMIQUES DANS LA CATHODE: ÉCHAUFFEMENT DE LA PAROI

La paroi cathodique est chauffée par les processus suivants:

— *bombardement ionique*
— bombardement par les métastables
— bombardement par le rayonnement du plasma
— effet Joule dans le métal
— conduction thermique gaz-métal (dans la C. P. I.).

Les processus qui refroidissent la paroi sont:

— *rayonnement de la paroi*
— émission thermoionique
— évaporation de la cathode
— conduction thermique métal-gaz (dans la zone qui précède la C.P.I.)
— *conduction thermique par le métal vers le support de la cathode.*

Nous allons étudier successivement chacun de ces processus. En anticipant nos conclusions, nous avons souligné les processus dominants.

5.1 — *Processus d'échauffement*

a) *Bombardement ionique*

D'après le modèle que nous avons choisi (Ch. II-2), chaque ion arrivant à la cathode est soumis à un champ électrique longitudinal X_I qui l'entraîne à l'intérieur du canal cathodique. D'autre part, il y aura des ions créés à l'intérieur même du canal par collision électron-neutre ou électron-métastable.

Ces ions ne voient un champ électrique radial qu'en arrivant au voisinage de la paroi. Ils diffusent donc en raison de leur agitation thermique jusqu'à atteindre ce voisinage; une fois qu'ils y sont parvenus, le champ radial de la gaine ionique les entraîne vers la paroi.

Les ions peuvent y libérer l'énergie cinétique acquise dans la gaine (potentiel $V(x)$), plus leur énergie de recombinaison avec les électrons du métal (proportionnelle à $V_i - \varphi$; V_i = potentiel d'ionisation de l'Argon ; φ travail de sortie de tantale) (*). La puissance dissipée par unité de surface de la paroi en raison de ce bombardement ionique (q_i) s'écrit donc :

$$q_i(x) = j_{i_r} \cdot [V(x) + V_i - \varphi] \qquad (47)$$

j_{i_r} étant la composante radiale de la densité du courante ionique.

b) *Bombardement par les métastables*

Les atomes dans l'état métastable qui existent à l'intérieur du canal cathodique atteignent la paroi du fait de leur agitation thermi-

---

(*) Ceci n'est exact que si l'on néglige la possibilité d'émission secondaire d'électrons du métal de par ce bombardement ionique, auquel cas une partie de l'énergie de l'ion serait consacrée à l'arrachement d'électrons secondaires. En fait le coefficient d'émission secondaire correspondant à des ions de 50 eV est [25] $\gamma_i = 0{,}1$ électron / ion et nous n'en tiendrons pas compte.

que. Si leur densité locale est $n_m(x)$ et leur énergie thermique moyenne w_m, le flux de métastables sur la paroi (ϕ_m) s'écrit:

$$\phi_m(x) = \frac{n_m(x)\, w_m}{4} \tag{48}$$

Si l'on suppose que ces métastables sont à la température de la paroi, il n'y a pas d'échange de chaleur par conduction. En revanche, ils disposent de leur énergie potentielle d'excitation ($\varphi_m = 11{,}6\ V$) qui peut être dissipée dans la paroi. Si l'on admet que l'émission secondaire d'électrons par ces métastables est négligeable et qu'ils se retrouvent, après le choc sur la paroi, dans l'état fondamental, la densité de puissance libérée par ce processus est donnée par:

$$q_m(x) = \frac{n_m(x)\, w_m\, q\, \varphi_m}{4} \tag{49}$$

c) *Bombardement par le rayonnement du plasma*

L'évaluation de ce terme est beaucoup plus compliquée que celle des termes précédents. En effet, le plasma de la C. P. I. est fortement hors d'équilibre et il n'est pas aisé de déterminer les populations des divers niveaux radiatifs.

Pour ce qui est de l'émission de spectre continu, nous nous limiterons au calcul du rayonnement de Bremsstrahlung par interaction électron-ion.

La puissance libérée par unité de volume d'un plasma de densité électronique n_e et de tempéreture électronique T_e est donnée par: [26].

$$\mathscr{B} = 4{,}8 \,.\, 10^{-37}\, Z^2\, n_e^2\, T_e^{1/2} \text{ (unités } (MKS;\ T_e \text{ en } k\,eV) \tag{50}$$

Dans le cas où le plasma n'absorberait pas ce rayonnement, la densité de puissance incidente sur la paroi ($q_{ph.}$) serait donnée par:

$$q_{ph.} = \frac{\mathscr{B}\, R}{2}\ ,$$

soit, finalement:

$$q_{ph.} = 7{,}6 \,.\, 10^{-33}\, n_e^2\, T_e^{1/2}\, R \,(W\ \mathrm{cm}^{-2};\ (\mathrm{cm}^{-3})^2;\ (eV)^{1/2};\ \mathrm{cm}) \tag{51}$$

d) *Effet Joule dans la paroi cathodique*

Considérons à l'abscisse x de la cathode un tronçon de paroi de longueuer dx. Le courant que traverse cette longueur de métal (vers le support cathodique) s'écrit :

$$I(x) = 2\pi R \int_o^x [j_{ir}(x) + j_e^c(x)]\, dx \tag{52}$$

j_{ir} et j_e^c étant les densités de courant ionique radial et électronique d'émission et R le rayon de la cathode.

La puissance dissipée par unité de surface du métal q_J s'écrit simplement :

$$q_J(x) = \frac{\rho}{e} \left[\int_o^x [j_{ir}(x) + j_e^c(x)]\, dx\right]^2 \tag{53}$$

ρ étant la résistivité du tantale ($\rho = 10^{-4}\,\Omega\,\text{cm}$) [27] et e l'épaisseur de la paroi.

e) *Conduction thermique radiale gaz-paroi (dans la C. P. I.)*

Ce terme n'est pas aussi facile à évaluer que les précédents ; en effet tout ce que nous connaissons c'est une limite supérieure $\Delta W_{gp} \leqslant \Delta W_{coll.}$ de la puissance qui peut être transférée par ce processus, de l'ensemble de la C. P. I. à la paroi qui l'entoure. (cf. paragraph 4.3.*b*). On aura alors :

$$\bar{q}_{g.p.} < \frac{\Delta W_{coll.}}{2\pi R x_o} \tag{54}$$

$\bar{q}_{gp}$ étant la puissance moyenne transférée par unité de surface métallique, et $\Delta W_{coll.}$ la puissance dissipé dans la gaz de la C. P. I. par collision (pouvant atteindre environ 5 watts).

f) *Terme d'échauffement de la paroi*

Tous les processus d'échauffement de la paroi cathodique seront calculés numériquement lorsque nous disposerons des valeurs qui prennent la densité du courant ionique radial et de la densité des métastables tout au long de la C. P. I.

Ces termes peuvent se regrouper dans une fonction $q_r(x)$ qui représente le flux radial de chaleur sur la paroi intérieure de la cathode :

$$q_r(x) = q_i + q_m + q_{ph} + q_J + q_{g.p.} \tag{55}$$

5.2 — *Processus de perte de chaleur de la paroi cathodique*

a) *Rayonnement de la paroi*

La paroi cathodique a une répartition longitudinale de température $T(x)$ que nous considérons comme inconnue du point de vue théorique. Le rayonnement thermique de la paroi extérieure de la cathode constitue un processus de refroidissement de celle-ci ; la puissence rayonnée par unité de surface émissive s'obtient par la loi de Stéphan :

$$p_{ray.}(T) = \varepsilon(T)\,\sigma\,T^4 \tag{56}$$

$\varepsilon(T)$ étant l'émissivité du Tantale et σ la constante de Stéphan ($\sigma = 5{,}67 \times 10^{-12}\ W\ \mathrm{cm}^{-2}\,(^oK)^{-4}$).

Pour le Tantale l'émissivité croît d'une manière approximativement linéaire en fonction de la température entre 300 et 3000° K, et nous pouvons écrire :

$$\varepsilon(T) = \varepsilon(T_o) + \alpha(T - T_o) \tag{57}$$

avec :

$$T_o = 300^o\,K,\ \varepsilon(T_o) = 0{,}05 \text{ et } \alpha = 1{,}05 \times 10^{-4}\,(^oK)^{-1}\ [28].$$

b) *Émission thermoélectronique*

La densité du courant électronique émis par une surface métallique portée à la température T s'obtient à partir de l'équation de Richardson-Dushman :

$$j_e^c = A\,T^2\,e^{-b_o/T} \tag{58}$$

A et b_o étant des constantes caractéristiques du métal. Pour le Tantale on a [28] : $A = 55\ A\ (\mathrm{cm}\ ^oK)^{-2}$ et $b_o = 4{,}86 \times 10^4\,(^oK)$.

À chaque électron émis il correspond une énergie dépensée $e\varphi$ (φ étant le travail de sortie du métal: $\varphi = 4{,}12\ V$ pour le Tantale). La puissance perdue par unité de surface de la cathode s'écrit donc:

$$\mathcal{P}_{th}(T) = A\,\varphi\,T^2\,e^{-b_0/T} \tag{59}$$

c) *Évaporation du métal cathodique*

La puissance dissipée par unité de surface cathodique par ce processus s'obtient à partir de [29]:

$$\mathcal{P}_{ev}(T) = Q_s\,C\,T^{-1/2}\,e^{-D/T} \tag{60}$$

Q_s étant la chaleur de sublimation ($Q_s = 4{,}17 \times 10^3\ J/g$ pour le Tantale [30]); C et D sont deux constantes caractéristiques du métal ($C = 8{,}1 \times 10^{-9}\ g\,cm^{-2}\,s^{-1}\,(^oK)^{1/2}$ et $D = 9{,}2 \times 10^{-4}\ ^oK$ pour le Tantale [29]).

d) *Conduction thermique métal-gaz*

Cet effet, qui a lieu dans la zone qui précède la C. P. I., a déjà été étudié dans le paragraphe II-4.3. Nous y avons évalué une limite supérieure de la puissance transférée dans cette région entre la paroi et le gaz, ΔW_{pg}.

On peut alors écrire:

$$\mathcal{P}_{p.g.} < \frac{\Delta W_{pg}}{2\pi R\,(L_c - x_o)} \tag{61}$$

$\mathcal{P}_{p.g.}$ étant la puissance perdue par l'unité de surface cathodique dans la partie de la cathode qui précède la C. P. I. et dont la longueur est $L_c - x_o$.

e) *Terme de refroidissement radial de la paroi cathodique*

Soit $p_r(T)$ la puissance totale perdue radialement par l'unité de surface de la paroi, par l'ensemble des processus de transfert de chaleur que nous venons de décrire; on aura:

$$\mathcal{P}_r(T) = \mathcal{P}_{ray} + \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_{ev} + \mathcal{P}_{p.g} \tag{62}$$

Nous examinerons séparément les pertes par conduction thermique au sein du métal, vers le support cathodique ; en effet ce flux de chaleur est longitudinal et non pas radial comme les précédents. Nous l'obtiendrons à partir du bilan des processus radiaux d'échauffement et de refroidissement de la paroi.

5.3 — *Bilan thermique de la paroi cathodique*

Nous allons considérer une tranche de la paroi cathodique (rayon intérieur R, épaisseur e), de longueur élémentaire dx ; soit x son abscisse et T sa température.

Le bilan d'énergie dans cette tranche de la paroi peut s'écrire (en négligeant e devant R, ce qui est justifié pour les cathodes que nous utilisons normalement) :

$$[q_r(x) - p_r(T)]\ 2\pi R\, dx - \frac{dp_L}{dx} 2\pi R e\, dx = 0 \qquad (63)$$

p_L étant la puissance écoulée longitudinalement par unité de surface de la section métallique transversale.

D'autre part, on peut obtenir p_L à partir de l'équation de la conduction thermique :

$$p_L = -\lambda \frac{dT}{dx} \qquad (64)$$

λ étant la conductibilité thermique du métal. On aura alors :

$$q_r(x) - p_r(T) = -e \frac{d}{dx}\left[\lambda \frac{dT}{dx}\right] \qquad (65)$$

Les équations (55), (62) et (65) déterminent la fonction $T(x)$. Si l'on néglige pour le moment la variation $\lambda(T)$, l'équation (65) devient :

$$q_r - p_r = -e\lambda \frac{d^2T}{dx^2} \qquad (66)$$

On peut en tirer les conclusions qualitatives suivantes :

— Les points d'inflexion de la courbe de $T(x)$ correspondent à l'égalité des flux radiaux de perte et d'apport de chaleur sur la paroi cathodique (cf. Fig. 17).

— Le région centrale de la courbe, où $\frac{d^2T}{dx^2} < 0$, correspond à un apport de chaleur supérieur aux pertes radiales.

— Le minimum de $\frac{d^2T}{dx^2}$ correspond alors au maximum de l'échauffement net radial $(q_r - p_r)$ de la paroi.

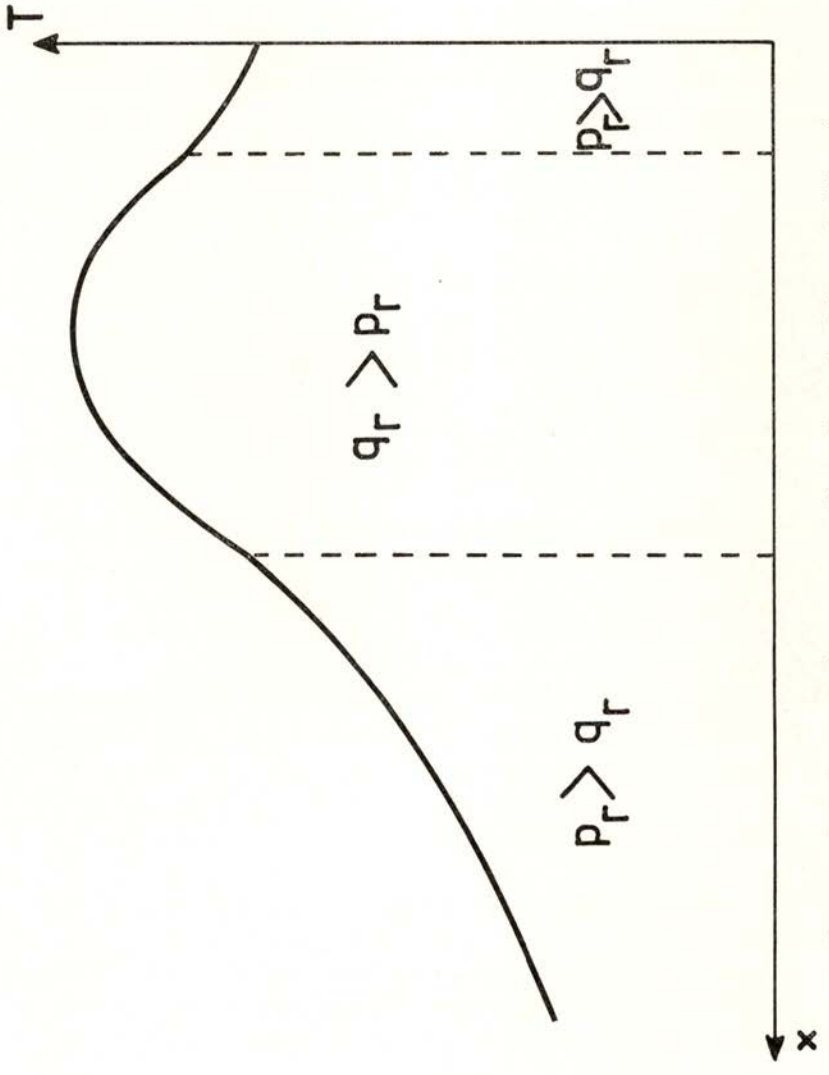


Fig. 17 — Relations entre les termes radiaux d'apport et de perte d'énergie dans la paroi cathodique

6 — CALCUL DES PROCESSUS INÉLASTIQUES À L'INTÉRIEUR DU CANAL CATHODIQUE

6.1 — *Modèle de calcul*

Nous voulons calculer les taux de production d'électons, d'ions et de métastables à l'intérieur du canal cathodique. Or, ces taux sont variables suivant l'abscisse considérée, non seulement en raison de la variation longitudinale de la densité des particules neutres, mais aussi à cause des électrons émis par la paroi qui varient, et en énergie et en densité de courant.

Le problème est encore rendu compliqué par le fait que les collisions inélastiques électron d'émission-atome neutre n'ont pas lieu à l'abscisse du point d'émission; il faut donc tenir compte du mouvement des particules pendant le temps qui s'écoule entre l'émission d'un électron et le choc inélastique qu'il effectuera.

Finalement et comme nous l'avons déjà signalé, le même électron peut être à l'origine de plusieurs processus inélastiques successifs, éventuellement de nature différente. Par exemple, un électron de 16 eV peut ioniser un atome d'Argon, auquel cas il ne lui reste plus assez d'énergie pour d'autres processus inélastiques; mais il peut aussi exciter d'abord un atome neutre en le portant à l'état métastable, et ioniser ensuite un autre métastable. Finalement, il peut ne faire que des ionisations d'atomes métastables jusqu'à la perte de son énergie initiale.

Si l'on considère que le nombre et la nature des processus possibles augmente pour des électrons ayant des énergies initiales plus grandes, et que les sections efficaces de ces processus inélastiques varient beaucoup pour la gamme des énergies en cause, on se rend compte que le problème ne peut être résolu d'une manière simple.

Remarquons que, si l'on ne considère que les processus inélastiques d'excitation des niveaux métastables à partir de l'état fondamental, d'ionisation des atomes neutres et d'ionisation des atomes métastables, les électrons qui effectuent ces types de collisions perdront des énergies qui sont respectivemente $E_m = 11{,}6\ eV$; $E_i = 15{,}7\ eV$; $E_i - E_m = 4{,}1\ eV$.

Nous allons considérer que ce dernier processus correspond à *une unité* de perte d'énergie ($\simeq 4\ eV$) ; l'excitation correspondra à environ 3 unités, l'ionisation des atomes neutres à environ 4 unités. D'autre part, nous allons répartir les électrons d'émission para «groupes d'énergie» discrets, séparés précisément par 1 unité de perte d'énergie. Pour

cela, nous considérons une division spatiale de la cathode en tranches de longueur Δx telle que :

$$\Delta x \,.\, X_I = V_i - V_m = 4\ V \tag{67}$$

X_I étant le champ électrique longitudinal à l'intérieur du canal cathodique. Étant donné que le potentiel de la gaine accompagne les variations du potentiel dans la colonne (cf. parag. II.2.2.5), l'énergie initiale moyenne des électrons émis dans deux tranches successives diffère effectivement de 4 eV (cf. Fig. 18).

Le potentiel de la gaine sera considéré comme constant dans chaque tranche et égal à la moyenne des valeurs que le potentiel y prend effectivement. Il y aura donc une correspondance biunivoque entre le groupe d'énergie des électrons émis et la localisation spatiale de la tranche émettrice. D'autre part les pertes d'énergie de ces électrons par collision inélastique se traduisent par la décroissance du numéro d'ordre qui désigne leur groupe d'énergie; nous présentons dans la Fig. 19 le schéma des processus possibles pour des électrons ayant une énergie initiale de 30 eV.

Notre méthode de travail consiste à établir, pour chaque tranche, le bilan des électrons appartenant à chaque groupe d'énergie, compte tenu des processus de peuplement et de dépeuplement qui lui correspondent, et aussi des écharges possibles entre tranches adjacentes.

6.2 — *Notation*

1) Dans ce qui suit, cheque tranche sera désignée par sa lettre d'identification (Fig. 18); de même, l'énergie des électrons est traduite par le numéro d'ordre du groupe d'énergie respectif (par exemple 18 V → groupe 4 cf. Fig. 19).

2) Les grandeurs qui portent en indice deux chiffres, concernent des processus de collision électron-particule lourde : le premier indice indique le groupe d'énergie initiale de l'électron; le deuxième, le groupe d'énergie finale. Comme généralisation, la répétition de l'indice indique un processus élastique.

Dans cette notation, l'écart entre les deux indices définit le nature des processus inélastiques; ionisation à partir de l'état fondamental (16 V soit 4 unités d'écart); excitation (3 unités); ionisation de métastables (1 unité). Exemple :

σ_{33} — section efficace de collision élastique électron-neutre (électrons de 14 eV).

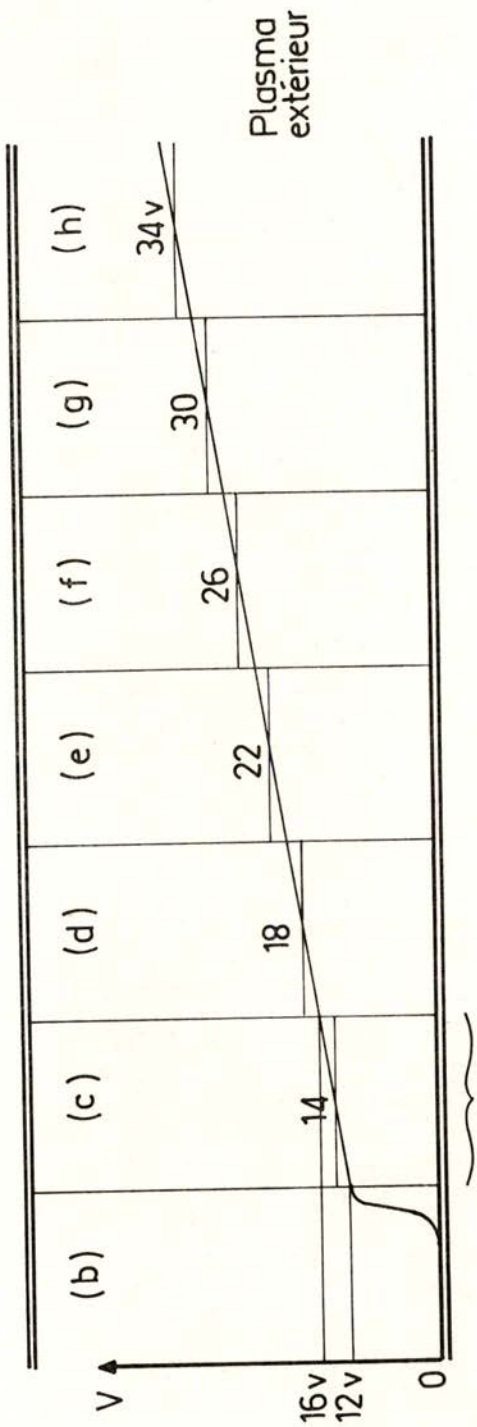


Fig. 18 — Schéma du découpage de la C. P. I. en tranches, suivant l'énergie des électrons émis

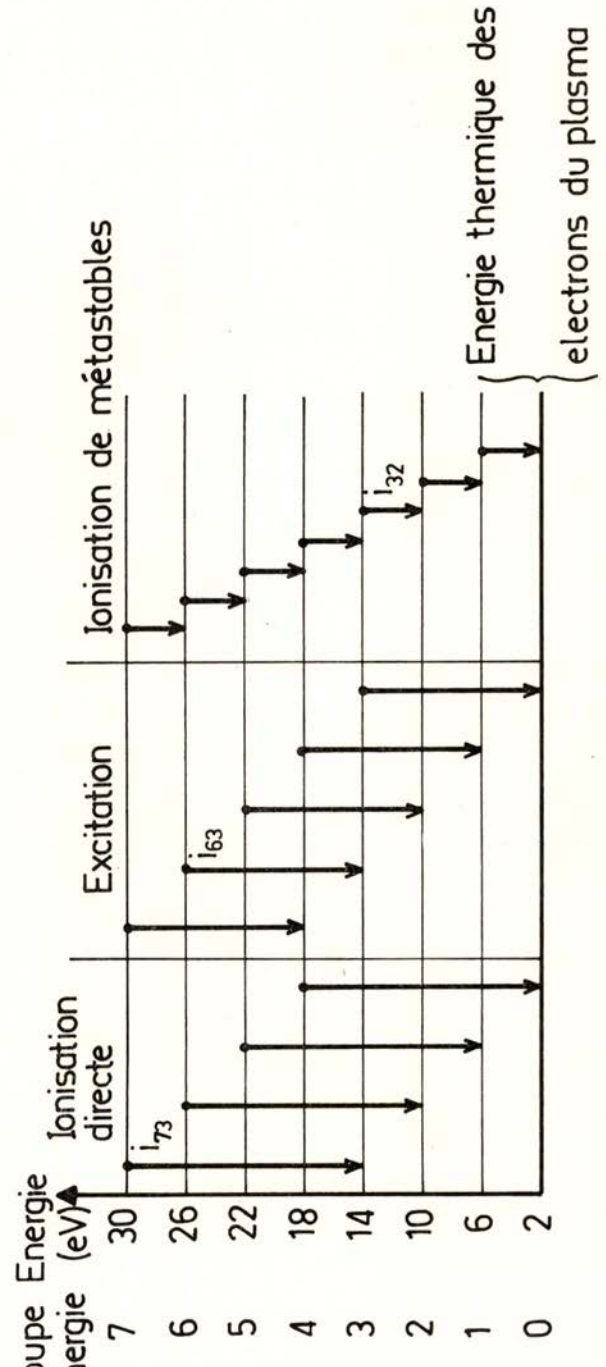


Fig. 19 — Schéma des processus possibles de perte d'énergie des électrons par collision inélastique

λ_{21}^{c} — libre parcours moyen des électrons du groupe 2 vis à vis des collisions inélastiques électron-atome métastable dans la tranche c (l'électron de 10 eV aura 6 eV à la fin de la collision).

3) Le nombre d'électrons participant à un processus donné, par unité de volume et par unité de temps, est désigné par la lettre i; en indice seront portées les énergies; en exposant les localisations spatiales.

Ainsi, nous avons les processus possibles :

a) Émission cathodique.

Une lettre en exposant indique la tranche où l'émission a eu lieu; le chiffre en indice, le groupe d'énergie des électrons émis. Étant donné que, suivant notre découpage spatial de la cathode, à chaque tranche correspond un seul groupe d'énergie des électrons d'émission, cette notation est redondante; nous l'adoptons néanmoins par souci de clarté (ex. : i_4^d).

b) Processus de collision inélastique à l'intérieur d'une tranche.

La tranche est désignée par une lettre en exposant; les énergies initiale et finale, par deux indices comme il a déjà été dit (ex. : i_{21}^{c}).

c) Processus de diffusion des électrons entraînant leur migration vers une tranche adjacente, sans qu'il y ait changement de groupe d'énergie : deux lettres seront portées en exposant, indiquant respectivement les tranches initiale et finale. Un seul indice désignera le groupe d'énergie des électrons (ex. : i_1^{cd}).

4) Les densités des particules seront désignées par la lettre n affectée des indices n, m, e ou i selon qu'il s'agit de particules neutres, de métastables, d'électrons ou d'ions.

Dans le cas des électrons un indice suivant le groupe d'énergie figurera aussi.

Exemples :

n_{e3}^{f} — densité des électrons de 14 eV dans la tranche f.

n_{eo}^{d} — densité des électrons thermalisés dans la tranche d.

6.3 — *Calcul général des processus inélastiques dans les tranches*

a) *Probabilité de collision inélastique*

Chaque tranche est «alimentée» par des électrons d'émission appartenant au groupe d'énergies correspondant au potentiel local de la gaine. Ces électrons effectuent des collisions élastiques sur les neutres et, de temps en temps, une collision inélastique de type donné, qui fait changer de groupe d'énergie les électrons concernés par ledit processus.

D'autres collisions s'en suivent, entraînant de nouvelles pertes d'énergie; l'état stationnaire se traduit par une certaine fonction de distribution dans la tranche, chaque groupe d'énergie p étant caractérisé par une densité des électrons n_{ep}.

Il faut cependant considérer que, non seulement des électrons appartenant à des groupes d'énergie variés ont pu sortir de la tranche par diffusion ou par mobilité, mais aussi des électrons provenant des tranches adjacentes ont pu entrer entre temps dans la tranche considérée par les mêmes raisons.

Nous allons résoudre formellement ce problème en comparant le nombre de processus inélastiques effectués à l'intérieur d'une tranche par les électrons du grupe p (quelle que soit l'origine de ces derniers), au nombre d'électrons de ce groupe qui ont eu origine dans la tranche même (soit, suivant les cas, des électrons d'émission ou ceux qui sont issus d'une transition à partir d'un groupe supérieur). Le rapport de ces deux nombres sera appelé *probabilité de collision inélastique* (α_p) des électrons du groupe p.

Considérons par exemple les électrons du groupe 4 dans la tranche e. Les électrons de ce groupe proviennent aussi bien de la transition i^e_{54}, que des processus de diffusion i^{de}_4 et i^{fe}_4; cependant, suivant notre définition, le nombre de processus inélastiques (par cm^3 et par s) effectués à l'intérieur de la tranche par les électrons du groupe 4 s'écrit:

$$i^e_{43} + i^e_{41} + i^e_{40} = i^e_{54}\,\alpha^e_4 \tag{68}$$

La perte nette d'électrons, par diffusion ou par mobilité est donnée par le bilan entre les électrons sortis de la tranche sans avoir fait de collision inélastique, et ceux qui y sont entrés; soit:

$$\Delta i_4 = i^{ef}_4 + i^{ed}_4 - (i^{de}_4 + i^{fe}_4) = i^e_{54}\,(1 - \alpha^e_4) \tag{69}$$

Nous n'expliciterons pas les valeurs des α_p dans une première phase de nos calculs; nous établirons plus tard des critères permettant de les déterminer dans chaque cas.

b) *Répartition des processus inélastiques possibles*

Lorsque le groupe d'énergie des électrons permet l'existence simultanée de processus inélastiques de nature différente, ces processus se répartissent proportionnellement aux fréquences de collision correspondantes. Ainsi, pour les électrons du groupe 4 dans la tranche *e* (par exemple) trois types de processus inélastiques sont possibles (excitation, ionisation directe et ionisation de métastables), comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent; le nombre de processus pour chacune de ces collisions sera donné par:

$$
\begin{aligned}
i^e_{40} &= i^e_{54}\,\alpha_4\,\frac{n^e_n\,\sigma_{40}}{n^e_n(\sigma_{40}+\sigma_{41})+n^e_m\,\sigma_{43}} \\
i^e_{41} &= i^e_{54}\,\alpha_4\,\frac{n^e_n\,\sigma_{41}}{n^e_n(\sigma_{40}+\sigma_{41})+n^e_m\,\sigma_{43}} \qquad (70) \\
i^e_{43} &= i^e_{54}\,\alpha_4\,\frac{n^e_m\,\sigma_{43}}{n^e_n(\sigma_{40}+\sigma_{41})+n^e_m\,\sigma_{43}}
\end{aligned}
$$

c) *Calcul appliqué à la tranche c: terme d'ionisation*

Nous allons considérer d'abord la tranche *c* à laquelle correspond une énergie initiale des électrons d'émission, à peine suffisante pour exciter les niveaux métastables de l'Argon. Nous prouverons par la suite que les processus inélastiques débutent dans cette tranche, celles qui la précèdent ayant des potentiels de gaine insuffisants.

Nous allons détailler le calcul pour cette tranche, dans la mesure où ceci permettra d'illustrer notre méthode.

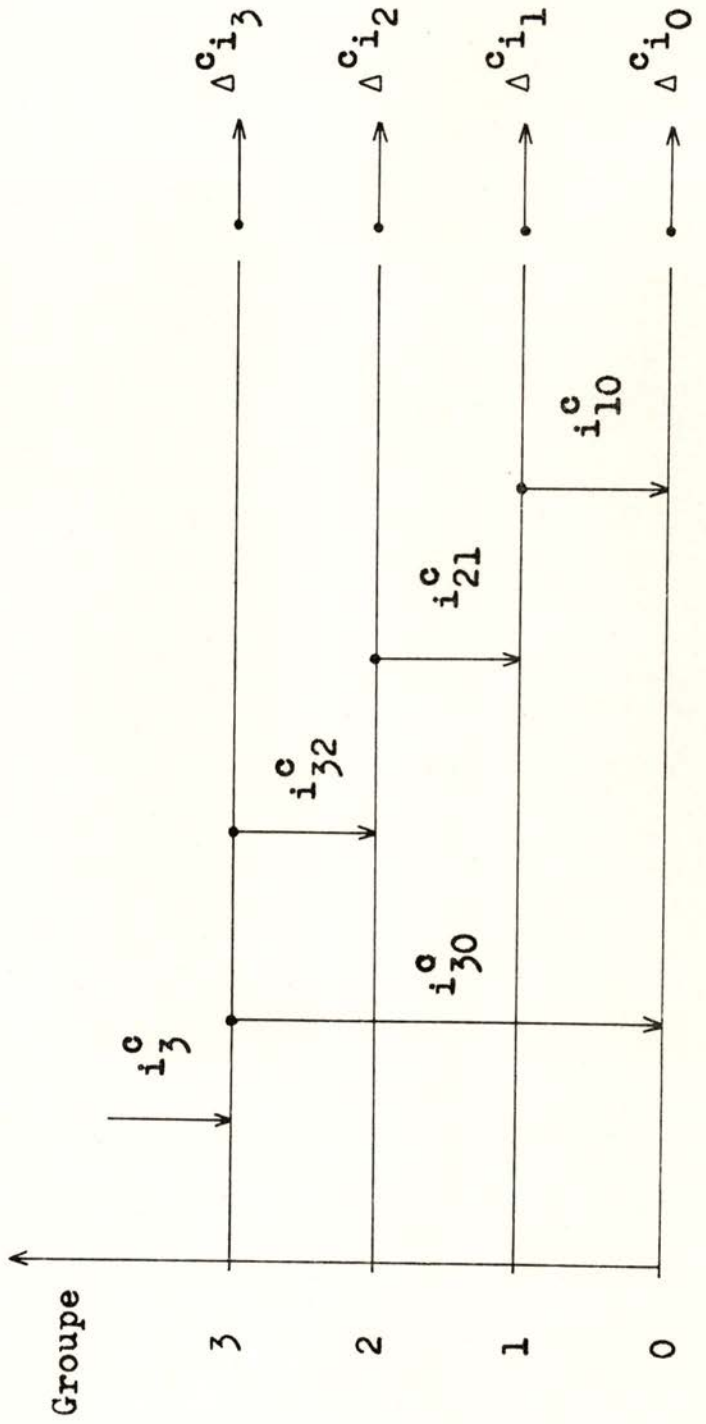


Fig. 20 — Transitions possibles dans la tranche c

Électrons du groupe 3

$$i_3^c = i_{30}^c + i_{32}^c + \Delta^c i_3$$

$$i_{30}^c = i_3^c \alpha_3^c \frac{n_n^c \sigma_{30}}{n_n^c \sigma_{30} + n_m^c \sigma_{32}}$$

$$= i_3^c \alpha_3^c \frac{\sigma_{30}/\sigma_{32}}{\frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^c} \quad \text{avec} \quad m^c = \frac{n_m^c}{n_n^c} \tag{71}$$

$$i_{32}^c = i_3^c \alpha_3^c \frac{m^c}{\frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^c} \tag{72}$$

$$\Delta^c i_3 = i_3^c (1 - \sigma_3^c)$$

Électrons du groupe 2

$$i_{32}^c = i_{21}^c + \Delta^c i_2$$

$$i_{21}^c = i_{32}^c \alpha_2^c \tag{73}$$

$$\Delta^c i_2 = (1 - \alpha_2^c)\, i_{32}^c$$

Électrons du groupe 1

$$i_{21}^c = i_{10}^c + \Delta^c i_1$$

$$i_{10}^c = i_{21}^c \alpha_1^c \tag{74}$$

$$\Delta^c i_1 = (1 - \alpha_1)\, i_{21}^c$$

Électrons du groupe 0

$$i_{30}^c + i_{10}^c + \mathscr{S}^c = \Delta^c i_0 \tag{75}$$

$\mathscr{I}_c$ étant le terme d'ionisation (nombre de paires électron froid-ion créés par unité de volume et par unité de temps dans la tranche) ; on a :

$$\mathscr{I}^c = i^c_{32} + i^c_{21} + i^c_{10} \tag{76}$$

soit, d'après (72), (73) et (74) :

$$\mathscr{I}^c = i^c_3\, \alpha^c_3\, \frac{m^c}{\frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^c}\, [1 + \alpha^c_2\, (1 + \alpha^c_1)] \tag{77}$$

Dans cette équation la valeur de $\mathscr{I}^c$ apparait comme une fonction de m^c («degré d'excitation de métastables» du plasma dans la trache c).

d) *Équation de conservation des métastables*

La création des métastables est due aux collisions d'excitation; leur disparition se fait : par ionisation, par diffusion longitudinale et par désexcitation sur la paroi cathodique. Ce dernier terme, que nous désignous par i_P (paroi) s'écrit, dans l'hypothèse où tous les métastables arrivés sur la paroi se désexcitent ;

$$i^c_P = \frac{n^c_m\, w_m}{2\, R} \quad (cm^{-3}\, s^{-1}) \tag{78}$$

w_m étant leur vitesse d'agitation thermique.

Nous allons négliger les pertes des métastables dues à la diffusion longitudinale, devant l'ensemble des partes par collision inélastique et par désexcitation sur la paroi. Cette hypothèse est assez raisonnable; comparons déjà les pertes par diffusion longitudinnale à celles dues à l'absorption par la paroi. Leur rapport θ vaut :

$$\theta = \frac{D_m\, \nabla^2_x\, n_m}{\frac{n_m\, w_m}{2\, R}} \tag{79}$$

En explicitant D_m (coefficient de diffusion des métastables) et en posant $\frac{\nabla_x^2 n_m}{n_m} = \frac{1}{L^2}$, ou aura :

$$\theta = \frac{l^2}{L^2} \tag{80}$$

avec

$$l^2 = \frac{2 R k T_m}{M n_n \sigma^{mn} \bar{w}_m^2} \tag{81}$$

σ^{mn} étant la section efficace de collision élastique des métastables sur les atomes neutres non-excités.

Pour $T_m = 0{,}25\ e\ V$; $n_n = 10^{16}\ \text{cm}^{-3}$; $\sigma^{mn} = 35 \times 10^{-16}\ \text{cm}^2$ [20] et $R = 0{,}4$ cm, on obtient :

$$l = 0{,}18\ cm$$

Si l'on considère L du même ordre de grandeur que la longueur de la C. P. I. (quelques centimètres), $\theta \ll 1$ et notre hypothèse est raisonnable.

Nous avons aussi négligé la destruction des métastables par collision de deuxième espèce sur les atomes neutres non-excités. En effet la section efficace correspondante est très faible ($\sigma_{2e}^{mn} = 2 \times 10^{-20}\ \text{cm}^2$ [31]) ; ce processus est beaucoup moins probable que la destruction des métastables par ionisation (dont la section efficace vaut, au moins, $10^{-16}\ cm^2$), car on a dans tous les cas :

$$\frac{n_{e3}\, \sigma_{32}}{n_n\, \sigma_{2e.}^{mn}} \gg 1$$

L'équation de conservation des métastables s'écrit, dans ces conditions :

$$i_{30}^e = i_{32}^e + i_{21}^e + i_{10}^e + i_P^c \tag{82}$$

Après quelques lignes de calcul on obtient:

$$m^c - r^c \left\{ 1 - \frac{m^c}{\frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^c} \left[2 + \alpha_2^c \left(1 + \alpha_1^c \right) \right] \right\} = 0 \tag{83}$$

r^c désignant le paramètre :

$$r^c = \frac{2\,R}{w_m} \cdot \frac{i_3^c\,\alpha_3^c}{n_n^c} \tag{84}$$

Ce paramètre (introduit surtout pour des raisons de commodité de calcul) dépend des conditions expérimentales : débit du gaz, rayon du canal cathodique et courant de la décharge. Le débit et le rayon déterminent la valeur locale de la densité n_n ; le courant de la décharge est lié à la valeur locale de la température de la paroi et donc, à la densité du courant thermoionique d'émission. Les valeurs de α dépendent non seulement des sections efficaces des collisions inélastiques possibles, mais aussi des échanges d'électrons entre tranches voisines.

Les équations (77) et (83) permettent d'obtenir, en fonction de r^c, les valeurs de $\mathscr{Y}^c$ et de m^c, une fois connues les valeurs de α_1, α_2 et α_3.

e) *Expressions générales*

Pour la tranche d on obtient par la même méthode :

$$\mathscr{Y}^d = i_4^d \alpha_4^d \left\{ 1 - (1 - \alpha_1^d) \frac{\sigma_{41}/\sigma_{43}}{\frac{\sigma_{40}+\sigma_{41}}{\sigma_{43}} + m^d} + \frac{(m^d)^2}{\left(\frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^d\right)\left(\frac{\sigma_{40}+\sigma_{41}}{\sigma_{43}} + m^d\right)} \alpha_3^d \left[1 + \alpha_2^d (1 + \alpha_1^d) \right] \right\} \tag{85}$$

$$m^d - r^d \left\{ (1 - \alpha_1^d) \frac{\sigma_{41}/\sigma_{43}}{\frac{\sigma_{40}+\sigma_{41}}{\sigma_{43}} + m^d} - \frac{m^d}{\frac{\sigma_{40}+\sigma_{41}}{\sigma_{43}} + m^d} \left\{ 1 - \alpha_3^d \left[1 - \frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^d \left[2 + \alpha_2^d (1 + \alpha_1^d) \right] \right] \right\} \right\} = 0 \tag{86}$$

Avec $\qquad m^d = \dfrac{n_m^d}{n_n^d} \qquad$ et $\qquad r^d = \dfrac{2\,R}{w_m} \dfrac{i_4^d\,\alpha_4^d}{n_n^d}$

Nous avons aussi établi les équations correspondantes pour les tranches e, f, g, h et i; il est exclu de les présenter ici en raison de leur taille, qui devient monstrueuse. Pour cette raison nous avons préféré établir des relations de récurrence permettant d'obtenir ces équations pour la tranche d'ordre immédiatement supérieur à la tranche k (et que nous désignons, faute de mieux, par l'exposant $k+1$), à partir des équations correspondant aux tranches précédentes.

En combinant les équations d'ionisation et de conservation des métastables, de façon à faire intervenir dans la première le terme $\frac{m^k}{2r^k}$, on peut écrire ces équations sous la forme :

$$\begin{cases} \mathscr{Y}^k = \dfrac{1}{2}\, i_s^k\, \alpha_s^k \left(f^k - \dfrac{m^k}{r^k} \right) & (87) \\[2ex] \dfrac{m^k}{r^k} = g^k & (88) \end{cases}$$

(s étant le groupe d'énergie des électrons d'émission dans la tranche k).

On peut obtenir $\mathscr{Y}^{k+1}$ et $\dfrac{m^{k+1}}{r^{k+1}}$ sous la forme (87) et (88) en posant :

$$\begin{aligned} f^{k+1} = 2 + \frac{1}{\dfrac{\sigma_{(s+1)\,(s-3)} + \sigma_{(s+1)\,(s-2)}}{\sigma_{(s+1)\,(s)}} + m^{k+1}} \Big\{ & \frac{\sigma_{(s+1)\,(s-3)}}{\sigma_{(s+1)\,(s)}} \left[\alpha_{s-3}^{k+1} A^{k+1} (f^{k-3}) \right] \\ & + \frac{\sigma_{(s+1)}\, \sigma_{(s-2)}}{\sigma_{(s+1)\,(s)}} \left[-1 + \alpha_{s-2}^{k+1} A^{k+1} (f^{k-2}) \right] \\ & + m^{k+1} \left[-1 + \alpha_s^{k+1} A^{k+1} (f^k) \right] \Big\} \end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned} g^{k+1} = \frac{1}{\dfrac{\sigma_{(s+1)\,(s-3)} + \sigma_{(s+1)\,(s-2)}}{\sigma_{(s+1)\,(s)}} + m^{k+1}} \Big\{ & \frac{\sigma_{(s+1)\,(s-3)}}{\sigma_{(s+1)\,(s)}} \left[\alpha_{s-3}^{k+1} A^{k+1} (g^{k-3}) \right] \\ & + \frac{\sigma_{(s+1)\,(s-2)}}{\sigma_{(s+1)\,(s)}} \left[1 + \alpha_{s-2}^{k+1} A^{k+1} (g^{k-2}) \right] \\ & + m^{k+1} \left[-1 + \alpha_s^{k+1} A^{k+1} (g^k) \right] \Big\} \end{aligned} \tag{90}$$

avec

$$\alpha_o^{k+1} = 0 \tag{91}$$

$$f^a = 1 \tag{92}$$

$$f^b = 1 + \alpha_1^b \tag{93}$$

$$g^a = -1 \tag{94}$$

$$g^b = (1 + \alpha_1^b) \tag{95}$$

$A^{k+1}(f^l)$ désigne l'application à la tranche $k+1$, de la forme que la grandeur f prend dans la tranche l; on effectue cette application en remplaçant l'indice de localisation l, partout où il figure dans l'explession de f^l, par l'indice de localisation $k+1$. $A^{k+1}(g^l)$ désigne de la même manière l'application de g^l à la tranche $k+1$.

On aura, par exemple: (cf. éq. (92) et (95))

$$A^d(f^a) = 1$$

$$A^d(g^b) = -(1 + \alpha_1^d)$$

On obtient ainsi les expressions du terme d'ionisation pour les tranches c, d et e:

$$\mathscr{S}^c = \frac{1}{2} i_3^c \alpha_3^c \left\{ 2 + \frac{1}{\frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m_c} \left[\frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}}(-1) + m^c(-1 + \alpha_2^c(1 + \alpha_1^c)) \right] - \frac{m^c}{\gamma^c} \right\} \tag{96}$$

$$\mathscr{S}^d = \frac{1}{2} i_4^d \alpha_4^d \left\{ 2 + \frac{1}{\frac{\sigma_{40}+\sigma_{41}}{\sigma_{43}} + m^d} \left\{ \frac{\sigma_{40}}{\sigma_{43}}(0) + \frac{\sigma_{41}}{\sigma_{43}}(-1 + \alpha_1^d) \right.\right.$$

$$\left.\left. + m^d[-1 + \alpha_3^d[2 + \frac{1}{\frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^d}(-\frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^d[-1 + \alpha_2^d(1 + \alpha_1^d)])]] \right\} - \frac{m^d}{\gamma^d} \right\} \tag{97}$$

$$\mathscr{S}^e = \frac{1}{2}\, i_5^e\, \alpha_5^e \Big\{ 2 + \frac{1}{\dfrac{\sigma_{51}+\sigma_{52}}{\sigma_{54}} + m^e} \Big\{ \frac{\sigma_{51}}{\sigma_{54}} (\alpha_1^e) + \frac{\alpha_{52}}{\sigma_{54}} [-1+\alpha_2^e (1+\sigma_1^e)] + m^e [-1+\alpha_4^e A^e (f^d)] \Big\} - \frac{m^e}{\gamma^e} \Big\} \tag{98}$$

De même, on aura les équations de conservation des métastables :

$$\frac{m^c}{\gamma^c} = \frac{1}{\dfrac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^c} \Big\{ \frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} \cdot (1) + m^c [-1-\alpha_2^c (1+\alpha_1^c)] \Big\} = g^c \tag{99}$$

$$\frac{m^d}{\gamma^d} = -\frac{1}{\dfrac{\sigma_{40}+\sigma_{41}}{\sigma_{43}} + m^d} \Big\{ \frac{\sigma_{40}}{\sigma_{43}} (0) + \frac{\sigma_{41}}{\sigma_{43}} (1-\alpha_1^d) + m^d [\ 1+\alpha_3^d A^d (g^c)] \Big\} = g^d \tag{100}$$

$$\frac{m^e}{\gamma^e} = \frac{1}{\dfrac{\sigma_{51}+\sigma_{52}}{\sigma_{54}} + m^e} \Big\{ \frac{\sigma_{51}}{\sigma_{54}} \cdot (-\alpha_1^e) + \frac{\sigma_{52}}{\sigma_{54}} [1-\alpha_2^e (1+\alpha_1^e)] + m^e [-1+\alpha_4^e A^e (g^d)] \Big\} \tag{101}$$

etc. . .

f) *Calcul des probabilités de collision inélastique* α_k

Ce calcul présente des aspects différents selon que les électrons du groupe considéré sont entraînés par mobilité ou par diffusion. Or nous avons vu (cf. parag. II-2.2.4) que pour les électrons les plus lents la mobilité était le processus dominant; pour les groups d'énergies élevées la diffusion est le processus qui l'emporte car les gradients de densité des électrons peuvent atteindre des valeurs considérables pour ces énergies.

Électrons des groupes 1 et 2

Le temps t_μ qu'un électron met à parcourir l'épaisseur Δx d'une tranche, entraîné par le champ électrique longitudinal X, vaut:

$$t_\mu = \frac{\Delta x}{\mu_e X} = \frac{\Delta x\, n_n}{(\mu_e n_n) X} \tag{102}$$

où nous avons mis en évidence le fait que la mobilité électronique est inversement proportionnelle à la densité des neutres.

Le seul processus inélastique possible pour les électrons des groupes 1 et 2 est l'ionisation des métastables, dont les sections efficaces sont, respectivement:

$$\sigma_{10} = 2{,}7 \times 10^{-16}\ \text{cm}^2$$

$$\sigma_{21} = 7{,}0 \times 10^{-16}\ \text{cm}^2$$

Ce type de collisions ayant une fréquence proportionnelle à la densité n_m des métastables (qui ne dépasse pas, comme nous le verrons, 10^{14} cm^{-3}), la durée de vie de ces électrons est assez longue (de l'ordre de 1μs). En fait, cette durée est supérieure au temps t_μ pris pour les électrons pour s'échapper des tranches d'où ils sont originaires (cf. Appendice IV).

Dans ces conditions il est clair que les probabilités α_2 et α_1 correspondant à ces collisions doivent être voisines de zéro pour toutes les tranches considérées.

Cas intermédiaires

Examinons maintenant ce qui se passerait pour les électrons des groupes d'énergies immédiatement supérieures, s'ils étaient aussi contrôlés par mobilité (donc, dans tous les cas où les gradients de densité des électrons des groupes d'énergie correspodants sont faibles). Pour le groupe 3:

$$t_3 = t_{30} = \frac{1}{n_n\, \sigma_{30}\, w_{e3}} \tag{103}$$

Pour

$$\sigma_{30} = 0{,}5 \times 10^{-16}\,\text{cm}^2 \text{ et } w_{e3} = 2{,}3 \times 10^{8}\,\text{cm}\,s^{-1} \text{ on a :}$$

$$\begin{cases} n_n = 10^{15}\ \text{cm}^{-3} \\ t_3 = 87\ \text{ns} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_n = 10^{16}\ \text{cm}^{-3} \\ t_3 = 8{,}7\ \text{ns} \end{cases}$$

Ce cas est donc différent des cas précédents (groupes 1 et 2) : le fait que des collisions inélastiques sur les neutres sont maintenant possibles, rend les durées de vie beaucoup plus courtes. Remarquons cependant que si la tranche que l'on considère est proche de l'extrémité de la cathode (où la densité des neutres est plus basse) la durée de vie des électrons de ce groupe est encore supérieure au temps de déplacement par mobilité. En revanche si la pression des neutres est plus forte, la durée de vie diminue alors que le temps de déplacement par mobilité croît; la durée de vie des électrons du groupe 3 devient très inférieure au temps de déplacement et la probabilité de collision inélastique à l'intérieur de la tranche approche l'unité. Il s'agit donc d'un cas intermédiaire difficile à analyser.

En revanche pour les groupes d'énergies suivants la situation est claire, car les électrons ont le temps d'effectuer une collision inélastique avant d'être entraînés en dehors de la tranche (cf. Appendice IV).

Donc, dans tous les cas où les électrons des groupes de nombre d'ordre supérieur à 3 sont contrôlés par mobilité, la probabilité de collision inélastique α est voisine de 1.

Nous supposerons que pour ces groupes, et à la seule exception du groupe d'ordre le plus élevé dans chaque tranche, (électrons d'émission) les gradients de densité électronique entre tranches voisines sont suffisamment faibles pour que la diffusion ne soit pas dominante ; nous prendrons donc, dans tous ces cas, $\alpha = 1$.

Électrons du groupe d'énergies supérieur dans chaques tranche

Pour ces électrons (provenant directement de l'émission cathodique) les gradients de densité sont importants entre tranches voisines. En effet, le potentiel de la gaine étant croissant vers la sortie de la cathode, le goupe d'énergie supérieur d'une tranche n'est pas

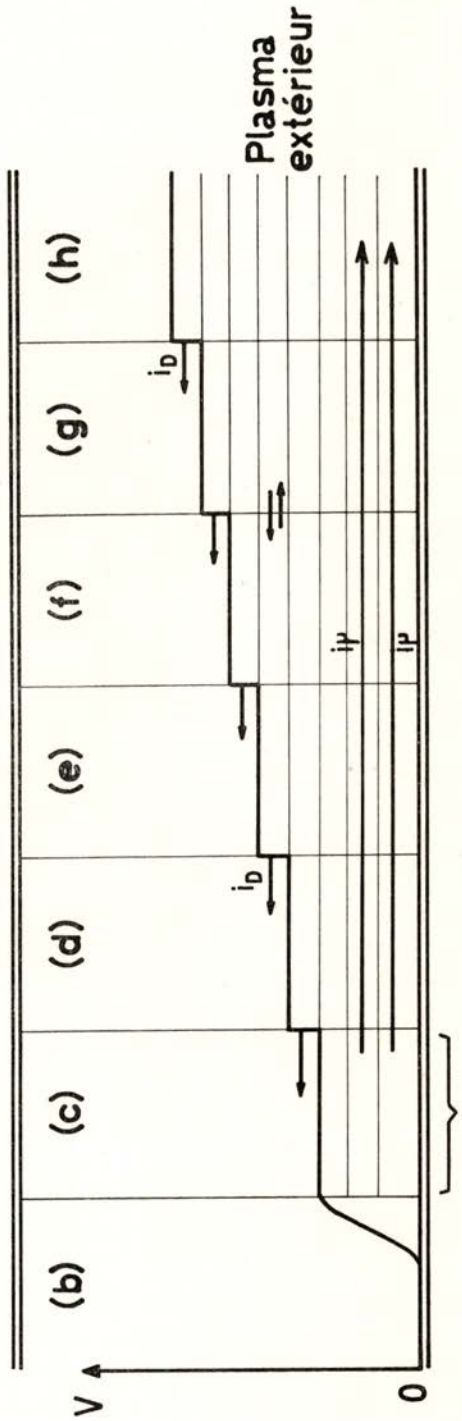


Fig. 21 — Schéma des mouvements macroscopiques des électrons das la C. P. I.

i_D : courant de diffusion
i_μ : courant de mobilité

représenté dans la tranche qui la précède, car le potentiel de la gaine y est moindre. Le courant électronique se dirige donc, pour ces électrons, dans le sens opposé à la force du champ électrique longitudinal (cf. Fig. 21).

Nous allons calculer la probabilité pour que des électrons émis dans une tranche avec une énergie initiale donnée, effectuent des collisions inélastiques *avant* de diffuser vers l'extérieur de cette tranche.

Ces électrons vont effectuer des collisions élastiques avec les neutres et feront éventuellement des collisions inélastiques. Soit N le nombre de collisions élastiques nécessaires en moyenne pour effectuer une collision inélastique du type quelconque. Il s'agit donc de calculer le pourcentage des électrons émis qui ont pu sortir de la tranche au bout de ces N collisions — c'est à dire, les électrons qui n'ont pas intervenu dans des processus inélastiques.

Il est bien évident qu'il ne suffit pas de calculer le déplacement *moyen* au bout de ces N collisions; même si cette longueur est inférieure à l'épaisseur Δx de la tranche, il y aura des électrons qui sont déjà sortis à l'extérieur de la tranche. Il est donc nécessaire de déterminer la fonction de distribution des positions occupées par les électrons émis, au cours de leur processus de diffusion thermique.

Il paraît raisonnable de réduire ce problème à l'étude d'un processus de «marche au hasard» unidimensionnelle, étant donné, d'une part, que nous sommes intéressés au déplacement longitudinal des électrons et d'autre part, que la paroi cathodique est parfaitement réfléchissante pour ces particules.

Nous prouvons dans l'Appendice V que, dans le cas qui nous concerne (émission uniformément répartie sur toute la longueur Δx d'une tranche, supposée centrée au point $x = 0$), la fonction de distribution spatiale des électrons au bout de N collisions de libre parcours moyen λ s'écrit:

$$F(x, N) = C\left\{G\left(B\,\frac{\Delta x}{2} - Bx\right) + G\left(B\,\frac{\Delta x}{2} + Bx\right)\right\} \qquad (104)$$

où:

C est une constante de normalisation

$G(X)$ est la fonction:

$$G(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^X e^{-y^2/2}\, dy \qquad (105)$$

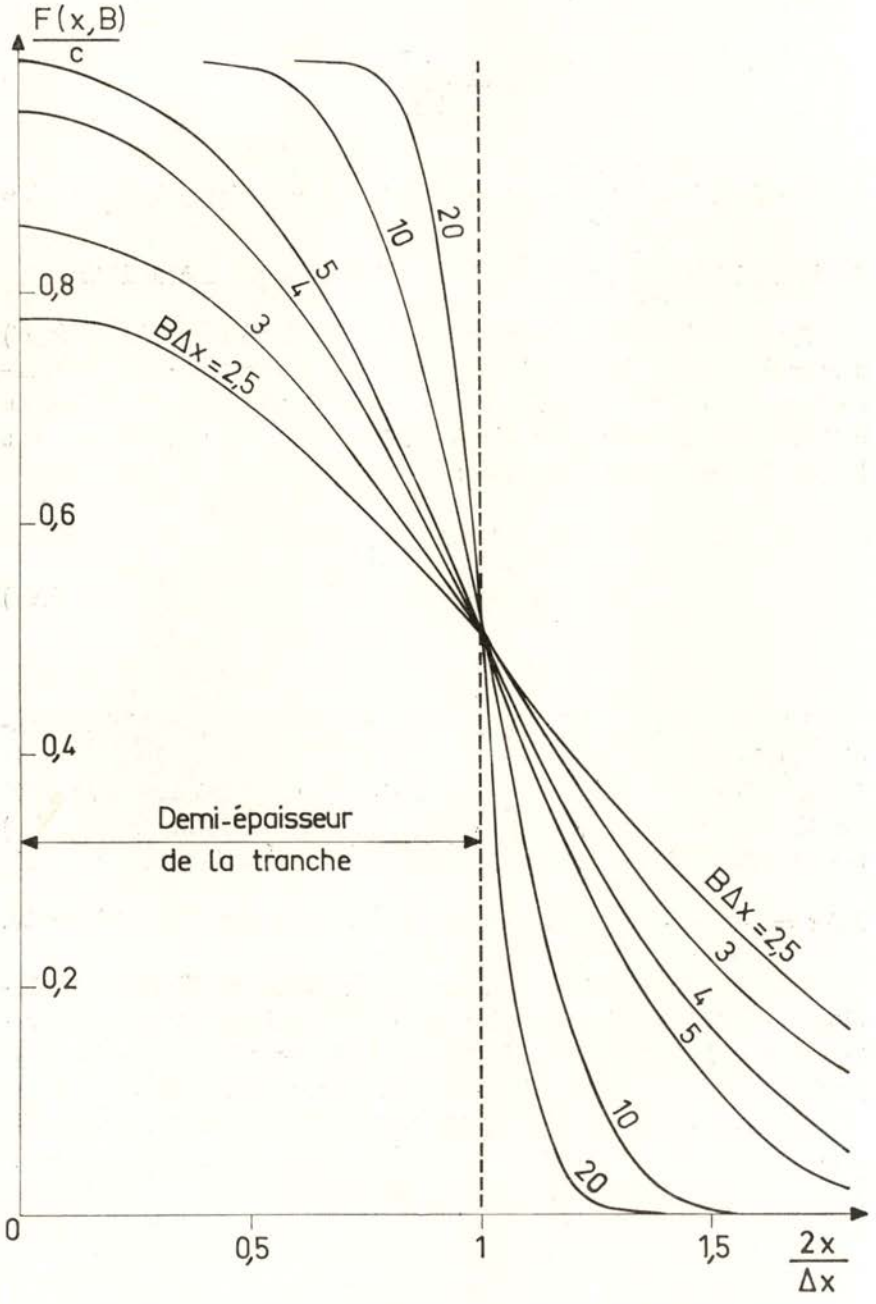


Fig. 22 — Fonction de distribution spatiale des électrons émis au bout de N collisions

B étant donné par:

$$B = \frac{1}{\sqrt{N}\,\lambda} \tag{106}$$

La fonction $\dfrac{F(x,B)}{C}$ est représentée dans la Figure 22 en fonction de la variable $\dfrac{2x}{\Delta x}$, pour plusieurs valeurs du paramètre $B\Delta x$.

La connaissance de la fonction de distribution spatiale $F(x,N)$ sera maintenant utile à résoudre le probème suivant: quel est le pourcentage α des électrons émis dans la tranche, qui reste à l'intérieur de cette tranche au bout de N collisions? Ce «facteur de permanence dans la tranche» α vaut évidemment:

$$\alpha = \frac{\int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} F(x,N)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,N)\,dx} \tag{107}$$

Etant donné que $F(x,N)$ peut être normalisé à l'unité (cf. Appendice V), le calcul de α nous impose simplement la connaissance de la fonction F dans l'intervalle $[-\Delta x/2, +\Delta x/2]$. L'intégration de cette fonction (dont les détails sont donnés dans la même Appendice) permet d'obtenir les valeurs du facteur α en fonction de la variable $B\Delta x = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{N}\,\lambda}$. Le résultat de ce calcul est présenté dans la Figure 23.

Pour identifier le facteur α que nous venons de définir à la probabilité de collision inélastique, il suffit de déterminer le «nombre caractéristique» N de collisions élastiques électron-neutre nécessaires à la production d'une collision inélastique de type quelconque.

Pour chaque type de collision inélastique, le nombre caractéristique correspondant s'obtient en faisant le rapport des fréquences de collision élastique et inélastique du type considéré. Par exemple, pour les électrons émis dans la tranche e (donc, appartenant au groupe 5) on aura:

$$N_{52} = \frac{\sigma_{55}}{\sigma_{52}} \text{(nombre caractéristique pour l'excitation)} \tag{108}$$

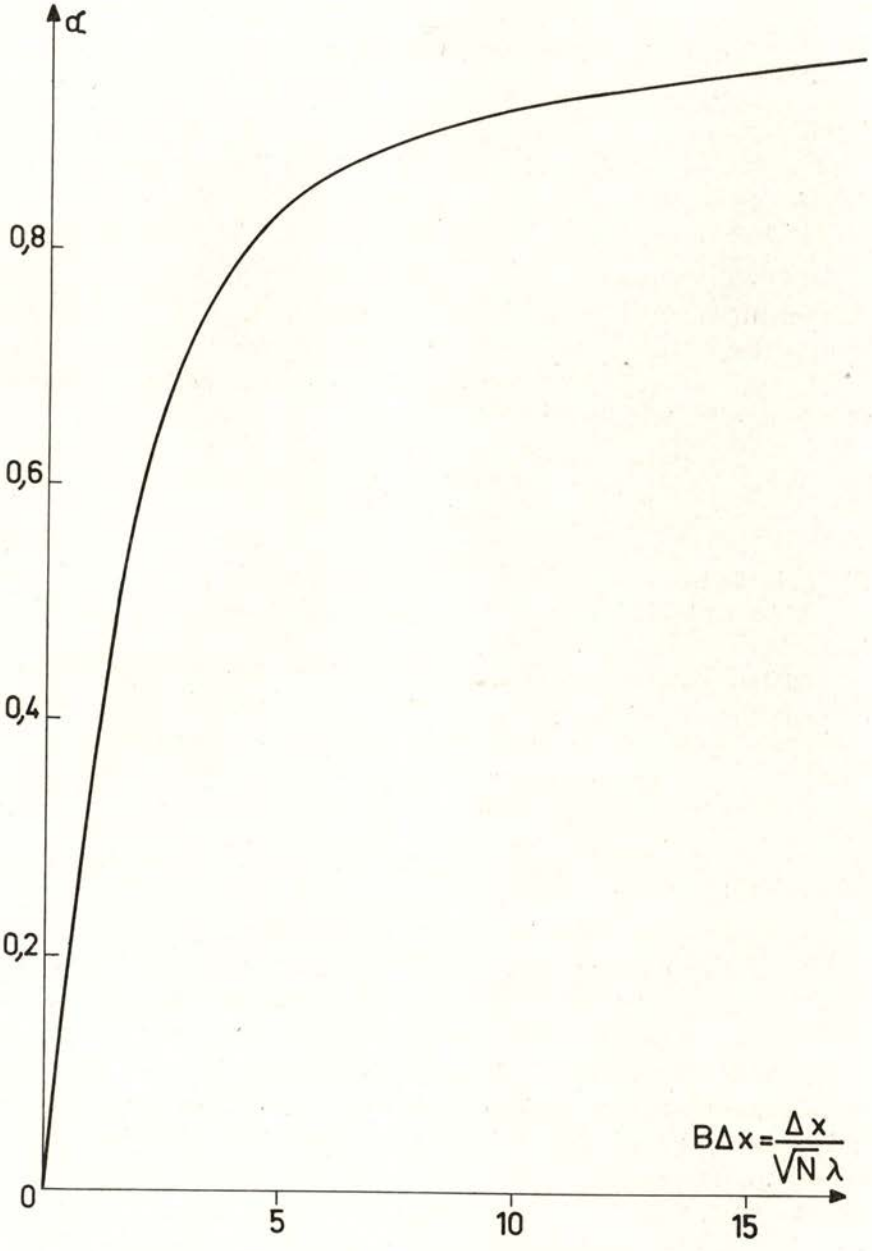


Fig. 23 — Facteur de permanence dans une tranche, α

$$N_{51} = \frac{\sigma_{55}}{\sigma_{51}} \text{ (nombre caractéristique pour l'ionisation directe)} \quad (109)$$

$$N_{54} = \frac{n_n\,\sigma_{55}}{n_m\,\sigma_{54}} \text{ (nombre caractéristique pour l'ionisation des métastables)} \quad (110)$$

Lorsque des collisions inélastiques de type différent peuvent avoir lieu simultanément das la tranche, il y a lieu de définir un «nombre caractéristique généralisé» (dans le cas présent, N_5). On l'obtient en remarquant que l'inverse d'un nombre caractéristique ($1/N$) représente la probabilité pour qu'un électron effectue la collision inélastique considérée au cours d'un seul choc. En raison de l'indépendance des divers types de collision inélastique possibles, leurs probabilités ($1/N$) s'ajoutent; on aura alors:

$$N_5^e = \frac{n_n^e\,\sigma_{55}}{n_n^e\,(\sigma_{52} + \sigma_{51}) + n_m^e\,\sigma_{54}} \quad (111)$$

N_5^e est le nombre de collisions élastiques que doit effectuer en moyenne un électron d'émission de la tranche e pour aboutir à une collision inélastique de type quelconque.

En introduisant cette valeur de N dans l'équation (106), à laquelle on peut donner la forme:

$$B_5^e = \frac{n_n^e\,\sigma_{55}}{\sqrt{N_n^e}} \quad (112)$$

on obtient:

$$B_5^e = n_n^e \sqrt{\sigma_{55}\,\sigma_{52}} \left(1 + \frac{\sigma_{51}}{\sigma_{52}} + \frac{n_m^e\,\sigma_{54}}{n_n^e\,\sigma_{52}}\right)^{1/2} \quad (113)$$

La valeur de $B_5^e\,\Delta x$ ainsi calculée sera introduite dans la courbe de la Figure 23 et nous obtiendrons alors le pourcentage α_5^e d'électrons qui perdent, de différentes façons, leur énergie à l'intérieur de la tranche.

En faisante varier $n_n\,\Delta x$ entre 5×10^{14} et $1{,}5\ 10^{16}$ cm^{-2} (ce qui correspond aux valeurs extrêmes $10^{15} \leqslant n_n \leqslant 10^{16}$ cm^{-3} et $0{,}5 \leqslant \Delta x \leqslant 1{,}5$ cm) et en substituant les sections efficaces par leurs valeurs on obtient les α^k pour les tranches d'ordre c jusqu'à k. Les résultats

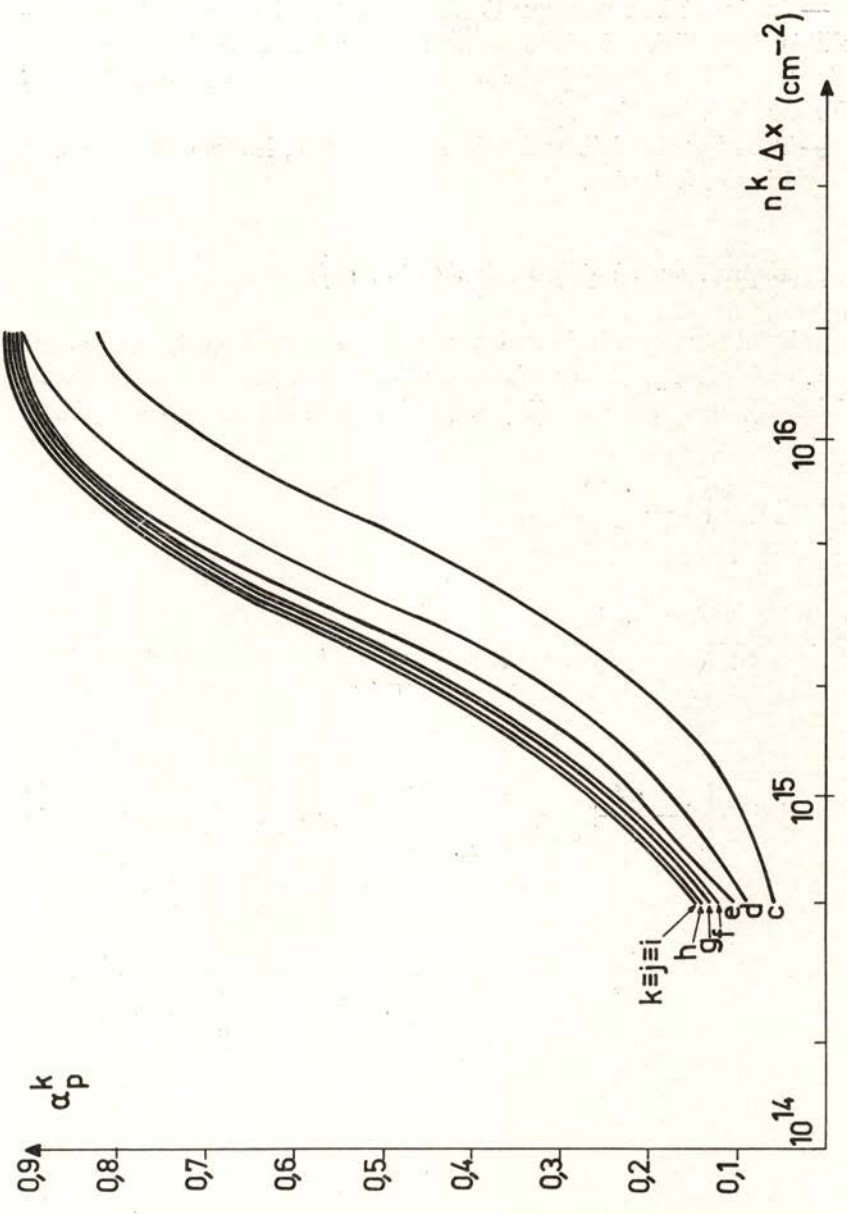


Fig. 24 — Probabilité de collision inélastique à l'intérieur de chaque tranche, pour les électrons d'émission

obtenus sont représentés dans la Figure 24. On en tire les conclusions suivantes :

— Au fur et à mesure que l'ordre de la tranche augmente, les probabilités de collision inélastique α tendent à devenir indépendantes de l'ordre de la tranche (les valeurs correspondant aux tranches i, j et k sont déjà identiques).

— Pour les plus faibles densités des neutres, les valeurs de α sont très inférieures à l'unité.

g) Expressions simplifiées de $\mathscr{S}$ et de m/r

Suivant les conclusions du paragraphe précédent, en posant $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $\alpha_{3\ldots s-1} = 1$, (s étant l'ordre du groupe des électrons d'émission), les équations (96) à (101) se simplifient et on obtient :

$$\mathscr{S}^c = i_3^c \alpha_3^c \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m^c}{r^c}\right)$$

$$\mathscr{S}^d = i_4^d \alpha_4^d \frac{1}{2}\left(2 - \frac{m^d}{r^d} - \frac{\dfrac{\sigma_{41}}{\sigma_{43}}}{\dfrac{\sigma_{40}+\sigma_{41}}{\sigma_{43}} + m^d}\right)$$

$$\mathscr{S}^e = i_5^e \alpha_5^e \frac{1}{2}\left\{2 - \frac{m^e}{r^e} + \frac{1}{\dfrac{\sigma_{51}+\sigma_{52}}{\sigma_{54}} + m^e}\left[-\frac{\sigma_{52}}{\sigma_{54}} + m^e\left(1 - \frac{\dfrac{\sigma_{41}}{\sigma_{43}}}{\dfrac{\sigma_{40}+\sigma_{41}}{\sigma_{43}} + m^e}\right)\right]\right\}$$

$$\mathscr{S}^f = i_6^f \alpha_6^f \frac{1}{2}\left\{2 - \frac{m^f}{r^f} + \frac{1}{\dfrac{\sigma_{62}+\sigma_{63}}{\sigma_{65}} + m^f}\left\{1 - \frac{1}{\dfrac{\sigma_{51}+\sigma_{52}}{\sigma_{54}} + m^f}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left[-\frac{\sigma_{52}}{\sigma_{54}} + m^f\left(1 - \frac{\dfrac{\sigma_{41}}{\sigma_{43}}}{\dfrac{\sigma_{40}+\sigma_{46}}{\sigma_{43}} + m^f}\right)\right]\right\}\right\}$$

. . . . . (114)

$$\frac{m^c}{r^c} = \frac{1}{\dfrac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^c} \left\{ \frac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} - m^c \right\}$$

$$\frac{m^d}{r^d} = \frac{1}{\dfrac{\sigma_{40} + \sigma_{41}}{\sigma_{43}} + m^d} \left\{ \frac{\sigma_{41}}{\sigma_{43}} - \frac{2\,(m^d)^2\,.}{\dfrac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^d} \right\}$$

$$\frac{m^e}{r^e} = \frac{1}{\dfrac{\sigma_{51} + \sigma_{52}}{\sigma_{54}} + m^e} \left\{ \frac{\sigma_{52}}{\sigma_{54}} + m^e \left[-1 + \frac{1}{\dfrac{\sigma_{40} + \sigma_{41}}{\sigma_{43}} + m^e} \left(\frac{\sigma_{41}}{\sigma_{43}} - \frac{2\,(m^e)^2}{\dfrac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^e} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{m^f}{r^f} = \frac{1}{\dfrac{\sigma_{62} + \sigma_{63}}{\sigma_{65}} + m^f} \left\{ \frac{\sigma_{63}}{\sigma_{65}} \left(1 - \frac{m^f}{\dfrac{\sigma_{30}}{\sigma_{32}} + m^f} \right) + \right.$$

$$\left. + m^f \left[-1 + \frac{1}{\dfrac{\sigma_{51} + \sigma_{51}}{\sigma_{54}} + m^f} \left\{ \frac{\sigma_{52}}{\sigma_{54}} + m^f \left[-1 + \ldots\ldots \right] \right\} \right. \right.$$

h) *Calcul numérique*

En introduisant dans les expressions (114) les valeurs des sections efficaces d'excitation [32], d'ionisation directe [33] et d'ionisation des métastables [33] (cf. Appendice VI), nous avons calculé les grandeurs $\dfrac{\mathscr{S}^k}{r_s^k \alpha_s^k} = f_1(r^k)$ et $m^k = f_2(r^k)$ pour toutes les tranches, de c à k; le paramètre r^k a été varié entre 10^{-5} et 1 (*). Les courbes correspondant à ces calculs sont représentées dans les Figures 25 e 26.

(*) Rappelons que $r^k = \dfrac{2\,R}{w_m} \dfrac{i_s^k \alpha_s^k}{n_n^k}$ et que $i_s^k = \dfrac{2\,j^k}{q\,R}$

j^k étant la densité du courant d'émission cathodique. Si l'on suppose que celle-ci varie entre 6×10^{-3} A/cm^2 et 20 A/cm^2 (valeurs qui correspondent à une émission thermoionique à des températures de 2.000° K et 2.900° K, respectivement) et que $10^{15} \leqslant n_k^k \leqslant 10^{16}$ cm^{-3}, on retrouve $10^{-5} < r^k < 1$.

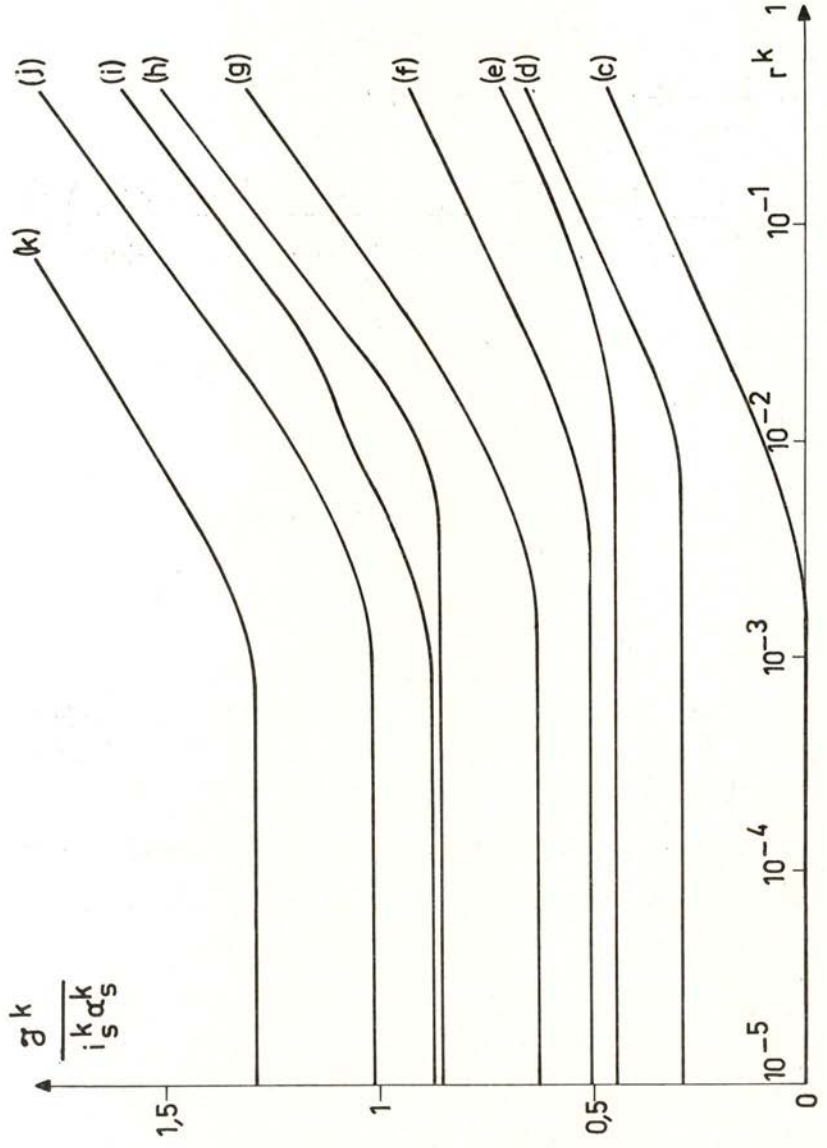


Fig. 25 — $\frac{\mathcal{J}^k}{i_s^k \alpha_s^k}$ en fonction de r^k pour les tranches c à k

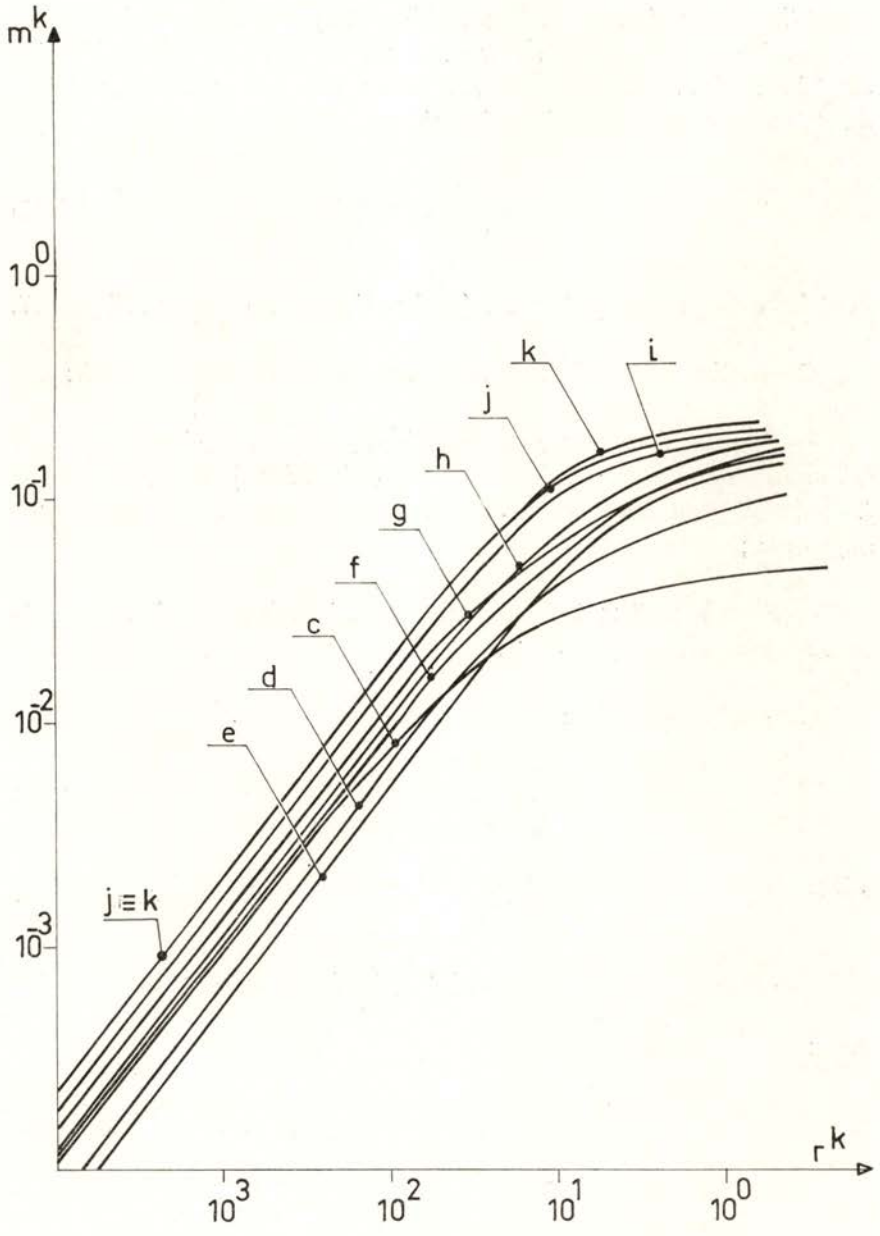


Fig. 26 — Degré d'excitation des métastables $m^k = f_2(r^k)$

i) *Terme d'ionisation* $\mathscr{S}^k$

L'interprétation de la Figure 25 n'est pas aisée en raison de la complexité du paramètre r^k, et aussi parce que, dans une situation expérimentale, à chaque tranche k correspond une valeur déterminée de r^k. Nous avons construit la fonction :

$$\frac{2R}{w_m}\frac{\mathscr{S}^k}{n_n^k} = r^k f_1(r^k) \tag{115}$$

dont les courbes sont présentées (en fonction de r^k) dans la Figure 27.

On en tire les conclusions suivantes pour les tranches d à k :

— Pour les faibles valeurs de r^k ($r^k < 10^{-3}$) la fonction représentée est une famille de droites (en échelle logarithmique) de pente β_o égale à l'unité et dont les ordonnées croissent lorsque l'ordre de la tranche augmente ;

— Pour $r^k > 5 \times 10^{-3}$ la pente de la familie de droites est légèrement plus élevée ($\beta_1 = 1{,}1$).

On peut donc écrire :

$$\frac{2R}{w_m}\frac{\mathscr{S}^k}{n_n^k} = a^k . (r^k)^{\beta} \tag{116}$$

soit :
$$\mathscr{S}^k = a_o^k i_s^k \alpha_s^k \quad \text{(pour } r^k < 10^{-3}\text{)} \tag{117}$$

$$\mathscr{S}^k = a_1^k \left(\frac{2R}{w_m n_n^k}\right)^{\beta_1 - 1} \times (i_s^k \alpha_s^k)^{\beta_1} \quad \text{(pour } r^k > 5 \times 10^{-3}\text{)} \tag{118}$$

avec :

k	d	e	f	g	h	i	j	k
a_o^k	0,30	0,41	0,45	0,60	0,80	0,90	1,0	1,2
a_1^k	0,48	0,67	0,87	1,26	1,42	1,58	1,9	2,2

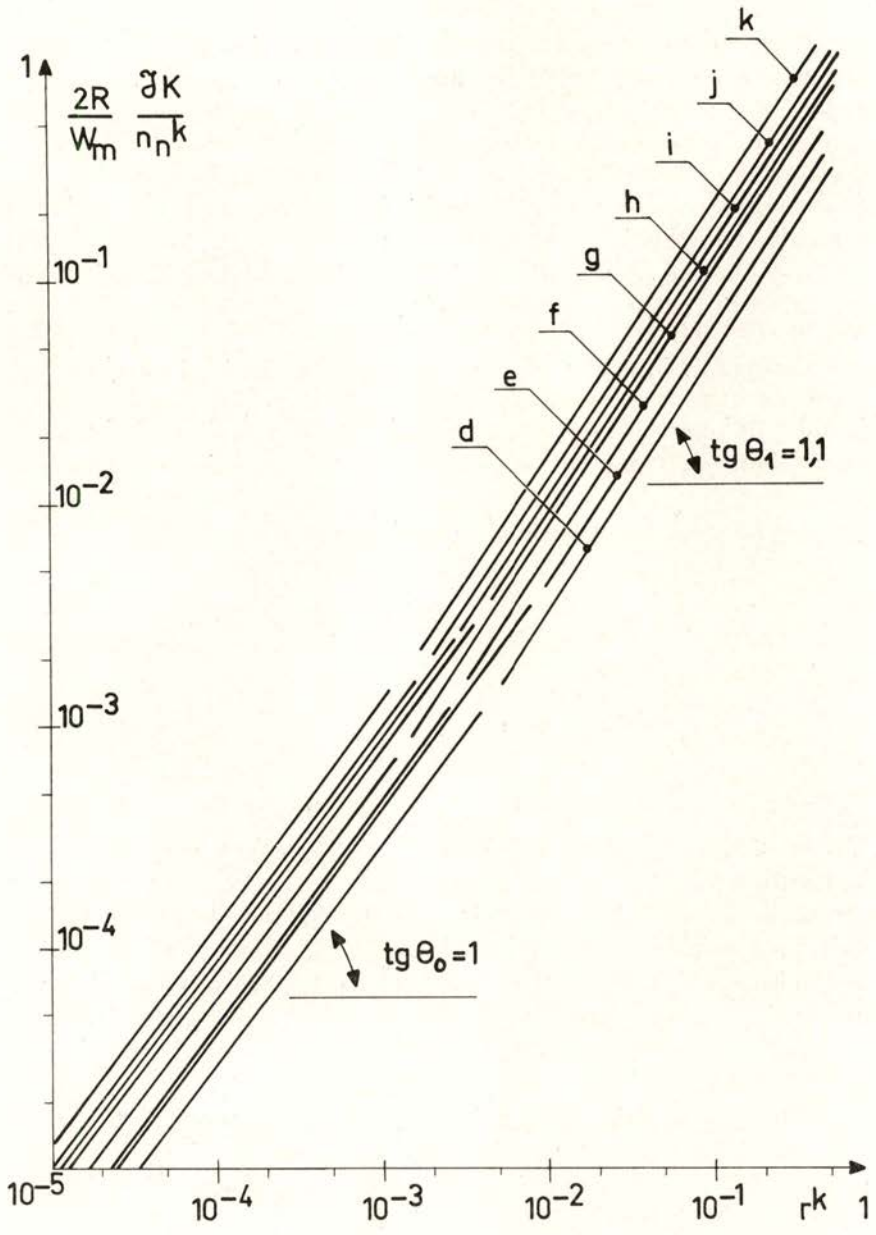


Fig. 27 — $\frac{2R}{w_m}\,\frac{\mathscr{S}^k}{n_n^k} = r^k f_1(r^k)$

— La tranche c est singulière, car la fonction $r^c f_1(r_c)$ n'appartient pas aux familles de droites considérées.

En remarquant que α_s^k est une fonction croissante de n_n^k on peut conclure que :

— Le terme d'ionisation $\mathscr{I}^k$ est croissant en fonction du courant d'émission i^k dans chaque tranche ; il lui est proportionel pour les faibles et moyens courants d'émission (faibles valeurs de r^k), croissant plus vite pour les fortes valuers de i^k ;

— Le terme $\mathscr{I}^k$ croît avec la densité des neutres de la tranche considérée (par l'intermédiaire de α_s^k).

On peut maintenant calculer le «rendement d'ionisation» $\eta^k = \dfrac{\mathscr{I}^k}{i^k}$ (nombre d'ions créés par électron émis par la paroi) en écrivant les expressions (117) et (118) sous les formes :

$$\eta^k = a_o^k \alpha_s^k \qquad (r^k < 10^{-3}) \tag{119}$$

$$\begin{aligned} \eta^k &= a_1^k \left(\frac{2R}{w_m} \frac{i_s^k}{n_n^k} \right)^{\beta_1 - 1} \cdot (\alpha_s^k)^\beta \quad (r^k > 5 \times 10^{-3}) \\ &= a_1^k \frac{4 j^k}{w_m n_n^k}^{\beta_1 - 1} \cdot (\alpha_s^k)^\beta \end{aligned} \tag{120}$$

Nous avons calculé η^k pour $20 > j^k > 6 \times 10^{-3}$ A / cm^2 et $5 \times 10^{14} < n_n^k \, \Delta x < 6 \times 10^{16}$ cm^{-2}. Les résultats sont présentés dans la Figure 28.

Cette figure est trompeuse ; une appréciation hâtive peut conduire à la conclusion que le rendement d'ionisation peut être voisin de l'unité. En fait, il n'en est rien. La densité des neutres n_n n'est pas une variable indépendante de k (ordre de la tranche considérée) : les tranches d'ordre le plus élevé sont justement celles où la pression est la plus faible.

Dans ces conditions, la partie des courbes de k élevé à forte densité n'a pas d'existence réelle ; l'utilisation de ces courbes impose le tracé préalable de la caractéristique $n_n(x)$ (caractéristique d'écoulement du gaz), explicitée sous la forme $n_n(k)$.

En anticipant le calcul numérique que nous allons présenter dans le chapitre 8, nous avons tracé une telle caractéristique pour une situation expérimentale précise ; nous vérifions ainsi que le rendement se situe dans ce cas entre 10 et 30 %.

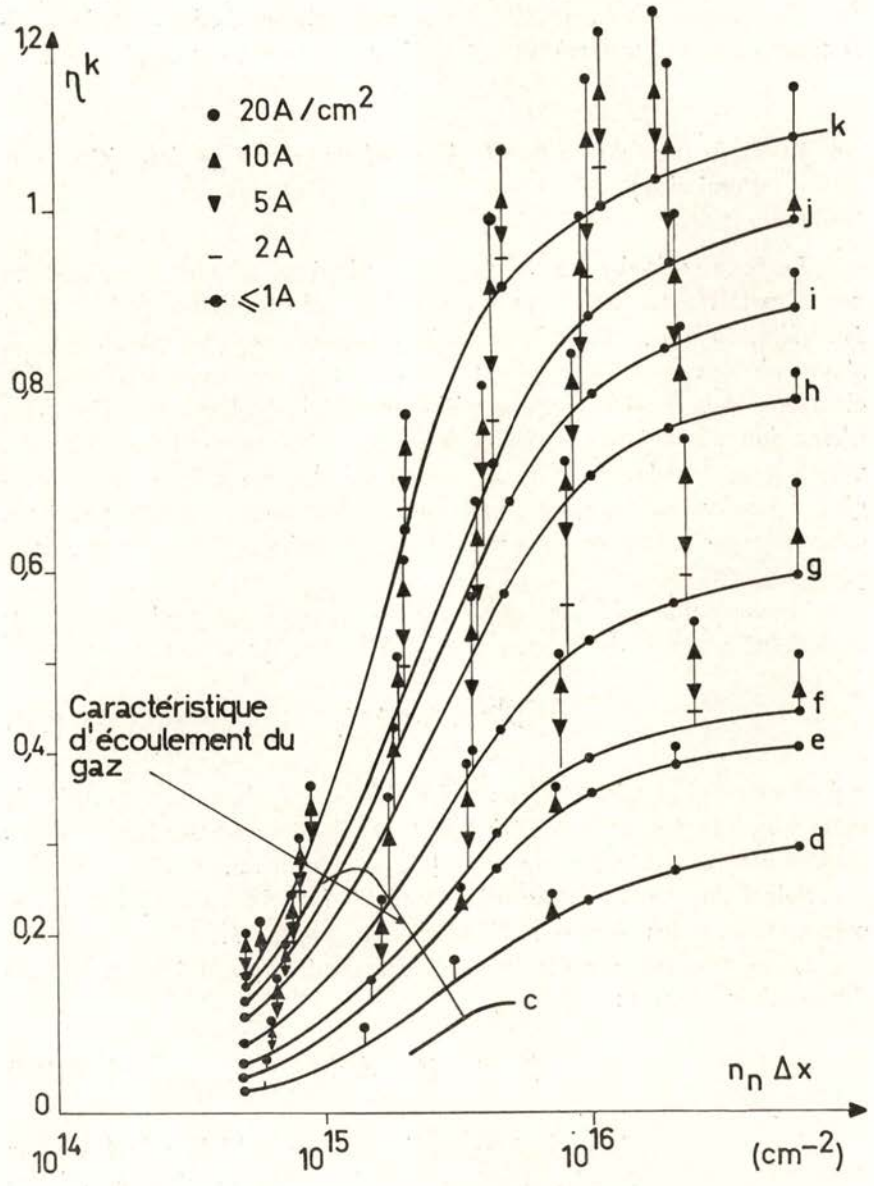


Fig. 28 — Rendement d'ionisation théorique $\eta^k = \frac{\mathcal{I}^k}{i_s^k}$

En fait le rendement d'ionisation varie relativement peu ; le terme d'ionisation dépend donc fortement de la température cathodique, dans la mesure où la densité du courant thermoionique varie rapidement pour des variations, même faibles, de cette température.

j) *Influence du courant électronique de diffusion* (électrons d'émission)

Le terme d'ionisation $\mathscr{I}^k$ que l'on vient de calculer ne réprésente pas la totalité des processus d'ionisation qui ont lieu dans la C. P. I. En effet, lorsqu'on regarde la méthode utilisée pour calculer $\mathscr{I}^k$, on s'aperçoit que ce terme ne concerne que les processus inélastiques des électrons émis dans la tranche même que l'on considère. Les électrons d'émission n'ayant pas participé à ces processus passent par diffusion vers la tranche d'ordre immédiatement inférieure, où ils seront à l'origine de nouveaux processus inélastiques dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'à présent. Le processus peut d'ailleurs se propager dans plusieurs tranches.

Nous sommes ainsi conduits à calculer, pour chaque tranche, non seulement le terme $\mathscr{I}^k$ donné par (cf. Figure 25) :

$$\mathscr{I}^k = i_s^k \alpha_s^k f^k(r^k) \tag{121}$$

qui correspond aux ions créés par les électrons émis dans la tranche k, mais aussi le terme correctif $\Delta \mathscr{I}^k$ des ions créés par les électrons rapides provenant des tranches $k+1$, $k+2$ etc. . . .

Soit l l'ordre de la dernière tranche (abscisse $x = 0$) à laquelle correspondent des électrons d'émission du groupe t.

Le nombre de ces électrons qui passent dans la tranche précédente est donné par :

$$i_t^{l\,(l-1)} = (1 - \alpha_t^l)\, i_t^l \tag{122}$$

Ces électrons d'énergie t vont effectuer des collisions inélastiques dans la tranche $l-1$, étant à l'origine d'un nombre $\Delta_t \mathscr{I}^{l-1}$ de processus inélastiques (la notation employée est apparente d'elle-même) donné par :

$$\Delta_t \mathscr{I}^{l-1} = i_t^{l\,(l-1)}\, \alpha_t^{l-1}\, f^l\,(r^{l\,(l-1)}) \tag{123}$$

$r^{l\,(l-1)}$ désignant la fonction :

$$r^{l\,(l-1)} = \frac{2R}{w_m} \frac{i_t^{l\,(l-1)}\,\alpha_t^{l-1}}{n_n^{l-1}} = \frac{2R}{w_m} \frac{(1-\alpha_t^l)\,\alpha_t^{l-1}\,i_t^l}{n_n^{l-1}} \tag{124}$$

Étant donné que tous les électrons de $i_t^{l\,(l-1)}$ n'ont pas effectué de collisions inélastiques dans la tranche $l-1$, il en passera dans la tranche $l-2$:

$$i^{(l-1)\,(l-2)} = (1-\alpha_t^{l-1})\,i_t^{l\,(l-1)} = (1-\alpha_t^l)\,(1-\alpha_t^{l-1})\,i_t^l \tag{125}$$

Le terme d'ionisation qui en découle dans la tranche $l-2$ vaut :

$$\Delta_t \mathscr{S}^{l-2} = i_t^{(l-1)\,(l-2)}\,\alpha_t^{l-2}\,f^l[r^{l\,(l-2)}] \tag{126}$$

$$r^{l\,(l-2)} = \frac{2R}{w_m} \frac{i_t^{(l-1)\,(l-2)}\,\alpha_t^{l-2}}{n_n^{l-2}} = \frac{2R}{w_m} \frac{(1-\alpha_t^l)\,(1-\alpha_t^{(l-1)})\,\alpha_t^{l-2}\,i_t^l}{n_n^{l-2}} \tag{127}$$

Dans cette tranche $l-2$, il y aura aussi à considérer comme précédemment, l'effect des électrons d'émission de la tranche $l-1$ (énergie $t-1$) qui ont aussi diffusé vers $l-2$. On aura :

$$\Delta^{t-1} \mathscr{S}^{l-2} = i_{t-1}^{(l-1)\,(l-2)}\,\alpha_{t-1}^{l-2}\,f^{l-1}[r^{(l-1)\,(l-2)}] \tag{128}$$

avec

$$r^{(l-1)\,(l-2)} = \frac{2R}{w_m} \frac{(1-\alpha_{t-1}^{l-1})\,\alpha_{t-1}^{l-2}\,i_{t-1}^{l-1}}{n_n^{l-2}} \tag{129}$$

L'accroissement net du terme d'ionisation $\mathscr{I}^{l-2}$ s'écrira :

$$\Delta \mathscr{I}^{l-2} = \Delta_t \mathscr{I}^{l-2} + \Delta_{t-1} \mathscr{I}^{l-2}$$

$$= i_{t-1}^{l-1} (1 - \alpha_{t-1}^{l-1}) \alpha_{t-1}^{l-2} j^{l-1} [r^{(l-1)(l-2)}]$$

$$+ i_t^l (1 - \alpha_t^l) (1 - \alpha_t^{l-1}) \alpha_t^{l-2} j^l [r^{l(l-2)}] \qquad (130)$$

Pour la tranche $l - p$ on aura :

$$\Delta \mathscr{I}^{l-p} = \Delta_t \mathscr{I}^{l-p} + \Delta_{t-1} \mathscr{I}^{l-p} + \ldots \Delta_{t-p+1} \mathscr{I}^{l-p} \qquad (131)$$

$$= \sum_{j=0}^{j=p-1} \left\{ i_{t-j}^{l-j} \cdot j^{l-j} [r^{(l-j)(l-p)}] \cdot \alpha_{t-j}^{l-p} \cdot \prod_{i=0}^{i=p-1} (1 - \alpha_{t-j}^{l-i}) \right\}$$

avec $$r^{(l-j)(l-p)} = \frac{2R}{w_m} \frac{i_{t-j}^{l-j} \alpha_{t-j}^{l-p}}{n_n^{l-p}} \prod_{i=0}^{i=p-1} (1 - \alpha_{t-j}^{l-i}) \qquad (132)$$

Les valeurs de i_{t-j}^{l-j} (courant d'émission de la tranche $l-j$) sont obtenues à partir de la caractérisrtique $T(x)$ de la cathode par application de l'équation de Richardson-Dushman. Les valeurs des α_{t-j}^{l-p} sont obtenues à partir des courbes de la Figure 24 en considérant la courbe α_{t-j}^{l-j} au point $n^{l-p} \Delta x$.

De même la fonction $j^{l-j} [r^{(l-j)(l-p)}]$ s'obtient à partir de la courbe d'ordre l-j de la Figure 25, pour le point d'abscisse égale à la valeur numérique de $r^{(l-j)(l-p)}$ (cf. éq. (132).

L'équation qui donne $\Delta \mathscr{I}^{l-p}$ n'est pas susceptible d'un traitement analytique, dans la mesure où elle fait intervenir les valeurs du courant d'émission de toutes les tranches de numéro d'ordre supérieur $(l, l-1 \ldots l-p+1)$.

Seul le calcul numérique nous permet d'obtenir, pour une situation expérimentale donnée, le terme d'ionisation totale $\mathscr{I}_T^k$ dans chaque tranche :

$$\mathscr{I}_T^k = \mathscr{I}^k + \Delta \mathscr{I}^k \qquad (133)$$

k) *Densité des métastables*

D'après les courbes de la Figure 26 le degré d'excitation de métastables du plasma, m, peut varier entre 10^{-5} et environ 0,15 suivant les valeurs de r^k et la tranche k considérées. Remarquons cependant que les valeurs les plus élevées correspondent aux fortes valeurs de r^k, c'est à dire, aux plus faibles densités des neutres, ce qui limite les valeurs que la densité des métastables peut atteindre.

On peut calculer, à partir de la fonction $m^k = f_2(r^k)$ le rapport:

$$\frac{m^k}{r^k} = \frac{i_P^k}{i_s^k \alpha_s^k} \tag{134}$$

avec:

$$i_P^k = \frac{n_m^k w_m}{2R} \tag{135}$$

i_P^k représente le nombre de métastables qui tombent sur la paroi cathodique par unité de volume et par unité de temps.

La fonction m^k/r^k se présente, en échelle semi-logarithmique, sous la forme de 2 familles de droites (cf. Figure 29):

$$\frac{m^k}{r^k} = a^k + \gamma \log r^k \tag{136}$$

Pour les faibles valeurs de r^k ($r^k \leqslant 5.10^{-3}$) $\gamma = 0$; α_2^k est donné par le tableau:

k	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a_2^k	1	0,71	0,56	1,1	1,38	1,12	1,46	1,76	1,76

Pour les fortes valeurs de k, $\gamma = -0,3$; α_3^k est donné par:

k	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a_3^k	—	0,1	0,13	0,17	0,27	0,3	0,46	0,49	0,51

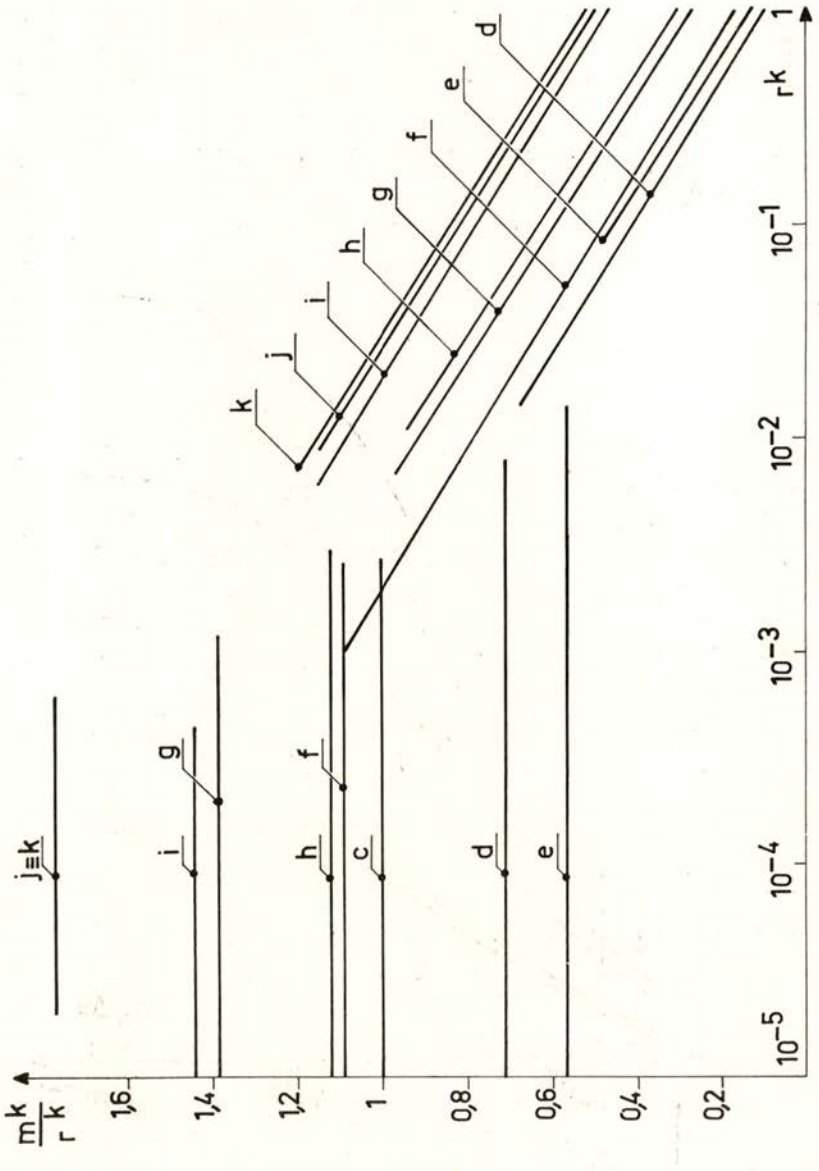


Fig. 29 — $\frac{m^k}{r^k} = \frac{1}{r^k} f_2(r^k)$

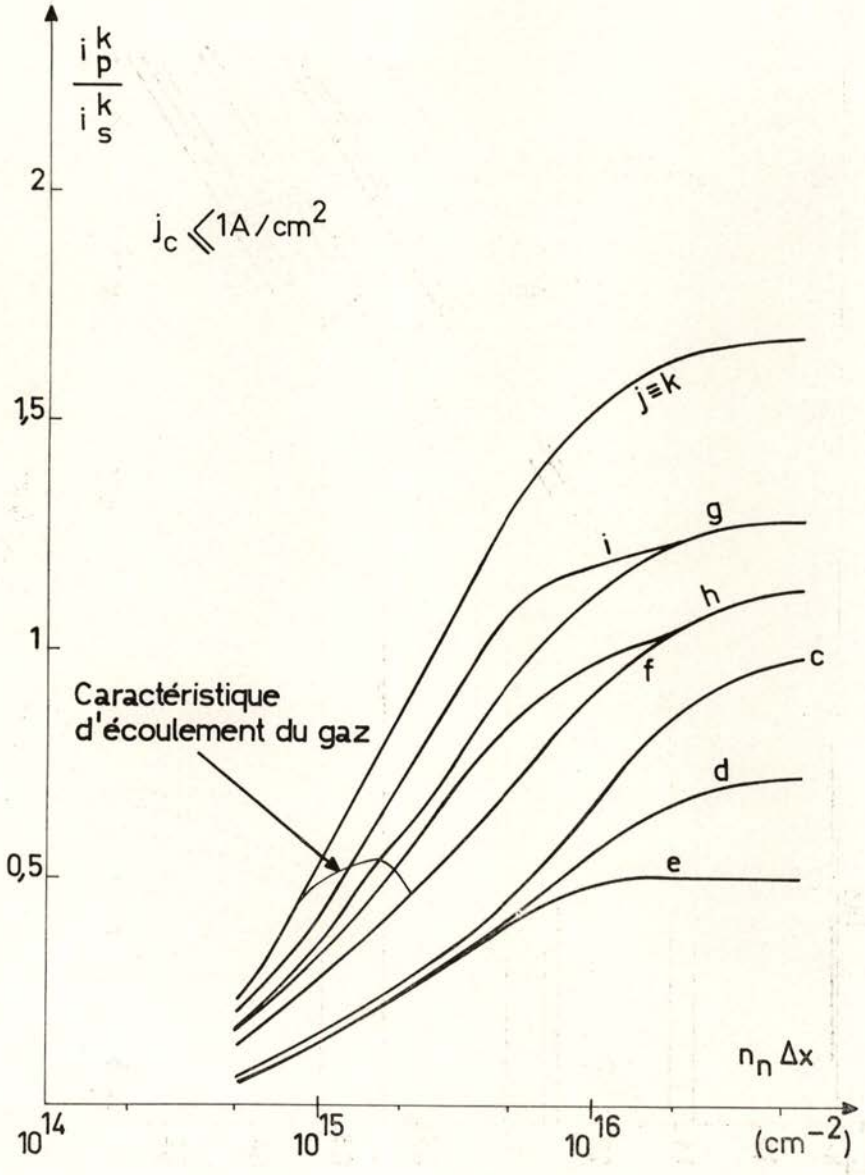


Fig. 30 — $\dfrac{i_P^k}{i_s^k} = \Psi_2 (n_n \Delta x)$ pour $j_c \leqslant 1 A / cm^2$

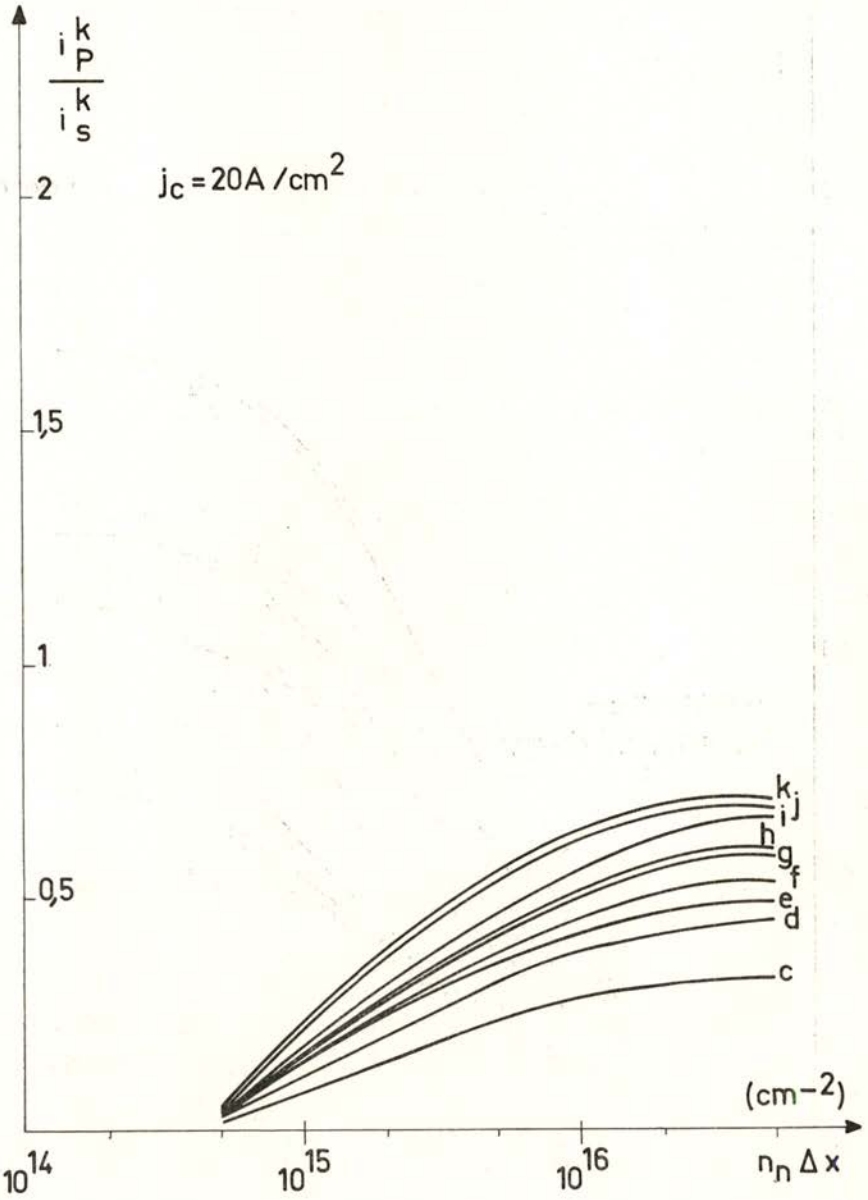


Fig. 31 — $\frac{i^k_P}{i^k_s} = \Psi_1 (n_n \Delta x)$ pour $j_c = 20\ A/\mathrm{cm}^2$

On peut donc poser :

$$(r^k \leqslant 5.10^{-3}) \quad \frac{i_P^k}{i_s^k} = a_2^k \alpha_s^k \tag{137}$$

$$(r > 10^{-2}) \quad \frac{i_P^k}{i_s^k} = \alpha_s^k (a_3^k + \gamma \log r^k) \tag{138}$$

La fonction $\frac{i_P^k}{i_s^k}$ est représentée dans les Figures 30 et 31 pour des densités de courant d'émission thermoionique $j_c \leqslant 1$ A/cm^2 et $j_c = 20$ A/cm^2 en fonction de la variable $n_n \Delta x$ (*).

Rappelons que :

$$i_s^k = \frac{2 j_c(k)}{q R} \tag{139}$$

En introduisant dans ces courbes les valeurs de $n_n \Delta x$ et j_c dans chaque tranche, on obtient i_P^k, ce qui nous permet d'obtenir la densité des métastables n_m^k à partir de :

$$n_m^k = \frac{2 R}{w_m} i_P^k \tag{140}$$

7 — ÉQUATION DU COURANT IONIQUE DANS LA C. P. I.

Écrivons l'équation de conservation du courant ionique dans l'élément de volume de surface S et de longueur dx, situé à l'abscisse x du canal cathodique (cf. Figure 32). Cet élément ne comprend pas la gaine ionique bien que, en raison de la très faible épaisseur de celle-ci, on puisse écrire $S \simeq \pi R^2$:

$$- d j_{iL}(x) S = j_{ir} 2\pi R \, dx - \mathscr{S}_T q S \, dx + n_e n_i \alpha q S \, dx \tag{141}$$

(*) Il serait plus intéressant de présenter toutes les courbes dans la même figure (j_c étant le 2ème paramètre introduit), ce qui faciliterait leur utilisation. Malheureusement, la figure deviendrait inextricable.

Avec : j_{iL} — composante longitudinale de la densité du courant ionique ;
j_{ir} — composante radiale de la densité du courante ionique ;
n_i — densité ionique du plasma de la C. P. I. ;
n_e — densité électronique du plasma de la C. P. I. ;
q — charge de l'ion ;
α — coefficient de recombinaison ;
$\mathscr{S}_T$ — terme d'ionisation (ions/cm^{3}s).

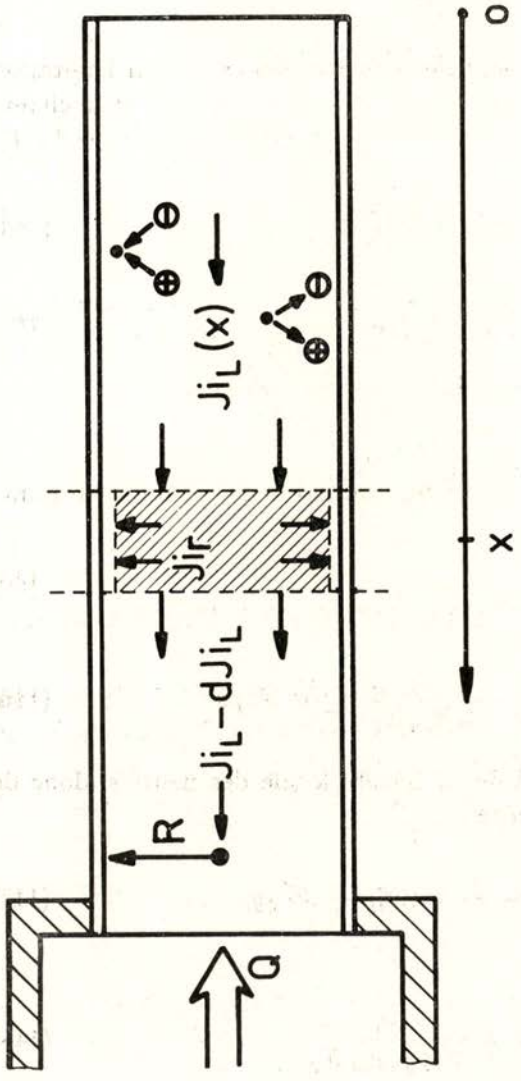


Fig. 32 — Conservation du courant ionique dans la C. P. I.

L'équation (141) traduit la diminution du courant ionique longitudinal comme étant le résultat des processus de diffusion radiale (avec recombinaison en surface), et de recombinaison en volume ; moins un terme d'ionisation à intérieur de la C. P. I.

Si maintenant on néglige le terme de recombinaison en volume devant le terme de diffusion radiale (ce qui est raisonnable pour l'Argon entre 10^{-2} e 5 Torr.) [20], on obtient :

$$\frac{dj_{iL}}{dx} = -\frac{2}{R} j_{ir} + \mathscr{S}_T q \tag{142}$$

Par ailleurs, le mouvement des ions est déterminé par l'agitation thermique pour ce qui est des déplacements radiaux, et par le champ électrique pour ce qui est du courant longitudinal (cf. paragraphe 2.2.4) ; on peut donc écrire :

$$j_{ir} = \frac{n_i q_i w_i}{4} \tag{143}$$

$$j_{iL} = n_i q_i \mu_i X_I \tag{144}$$

avec: w_i = la vitesse d'agitation thermique des ions
μ_i = la mobilité ionique.

En éliminant n_i entre les deux équations précédentes on aura :

$$j_{ir} = \frac{w_i}{4 \mu_i X_I} j_{iL} \tag{145}$$

et

$$\frac{dj_{iL}}{dx} = -\frac{w_i}{2 R \mu_i X_I} j_{iL} + \mathscr{S}_T q \tag{146}$$

Or, la mobilité dépend de la densité locale des neutres (donc de l'abscisse); on peut alors écrire :

$$\frac{dj_{iL}}{dx} = -A n_n j_{iL} + \mathscr{S}_T q \tag{147}$$

A étant donné par :

$$A = \frac{w_i}{2 R (\mu_i n_n) X_I} \tag{148}$$

cette grandeur étant indépendante de l'abscisse du point considéré dans la C. P. I., si l'on néglige les variations de w_i le long de cette partie de la cathode.

L'intégration (formelle) de l'équation (147) donne :

$$j_{iL}(x) = [j_{iL}(0) + q \int_0^x \mathscr{Y}_T(x)\, e^{A \int_0^x n_n(x)\,dx}\, dx]\, e^{-A \int_0^x n_n(x)\,dx} \qquad (149)$$

$j_{iL}(0)$ étant le courant ionique qui entre dans la C.P.I. provenant du plasma extérieur.

Le courant radial sera donné par :

$$j_{ir}(x) = \frac{AR}{2}\, n_n\, j_{iL}(x) \qquad (150)$$

soit, finalement :

$$j_{ir}(x) = \frac{AR}{2}\, n_n(x)\, e^{-A \int_0^x n_n(x)\,dx} [j_{iL}(0) + q \int_0^x \mathscr{Y}_T(x)\, e^{A \int_0^x n_n(x)\,dx}\, dx] \qquad (151)$$

Cette équation n'est pas facile à manipuler autrement que par application numérique. En effet notre problème est self-consistent : la répartition de la température cathodique (et donc, la fonction $\mathscr{Y}_T(x)$) est déterminée par la résolution d'une équation de transfert de chaleur dont les termes dominants sont justement des fonctions de $\mathscr{Y}_T(x)$.

En tout cas (cf. Chapitre précédent), le rendement d'ionisation variant peu en fonction de l'abscisse, $\mathscr{Y}_T(x)$ doit être croissant entre l'extrémité de la cathode et le maximum de température cathodique (qui correspond au maximum d'émission de la paroi). Pour x dépassant la longueur de la C. P. I., $\mathscr{Y}_T(x)$ tend rapidement vers zéro.

La densité des neutres croît monotonement dans le même sens que x; dans ces conditions, l'exponentielle décroissante qui figure dans l'expression de j_{ir} assure une décroissance rapide du courant radial à partir de l'abscisse x_o (rappelons que pour des abscisses plus grandes $\mathscr{Y}_T(x) \to 0$) ; j_{ir} doit ainsi passer par un maximum dans la C. P. I.

On peut aller un peu plus loin dans le domaine des raisonnements qualitatifs, en posant comme point de départ que $\mathscr{J}_T(x)$ soit non décroissant sur toute la longueur de la C. P. I. Si, par ailleurs, la température cathodique (et donc, l'émission thermoionique) est suffisante pour que $\mathscr{J}_T(x)$ atteigne une valeur telle que :

$$q_i \int_o^x \mathscr{J}_T(x)\; e^{A\int_o^x n_n(x)\,dx}\,dx >> j_{iL}(0) \tag{152}$$

on s'aperçoit que la fonction :

$$e^{-A\int_o^x n_n(x)\,dx} \times \int_o^x \mathscr{J}_T(x)\; e^{A\int_o^x n_n(x)\,dx}\,dx \tag{153}$$

est toujours croissante dans le domaine considéré. Le maximum du courant ionique radial se trouvera donc juste à la limite de la C.P.I. (abscisse $x = x_o$), puisque, pour des abscisses plus grandes, $\mathscr{J}_T(x)$ décroit rapidement est devient nul.

Si par contre la température cathodique este faible, l'inégalité (152) est inversée; le terme $j_{iL}(0)$ étant dominant, entraîne que le courant ionique décroit à partir de l'extrémité de la cathode vers l'intérieur de celle-ci. Étant donné que la puissance fournie à la paroi par le bombardement ionique est le produit de j_c par le potentiel de la gaine V_g, on s'aperçoit que dans les conditions précédentes ce terme de bombardement décroit avec l'abscisse x, et ne passe pas par un maximum à l'intérieur du canal cathodique.

8 — APPLICATION NUMÉRIQUE

Nous allons appliquer l'ensemble des résultats obtenus jusqu'à présent, au calcul d'un régime de fonctionnement donné; non seulement ce calcul est utile comme démonstration de la méthode utilisée, mais aussi la comparaison des résultats obtenus par la voie théorique, à ceux provenant du travail expérimental, permettra de juger du degré d'approximation que l'on peut obtenir.

Considérons une cathode creuse dont les caractéristiques et le régime de fonctionnement sont les suivants :

Cathode en Tantale : $R = 0{,}145$ cm
$e = 0{,}2$ mm
$L_c = 8$ cm

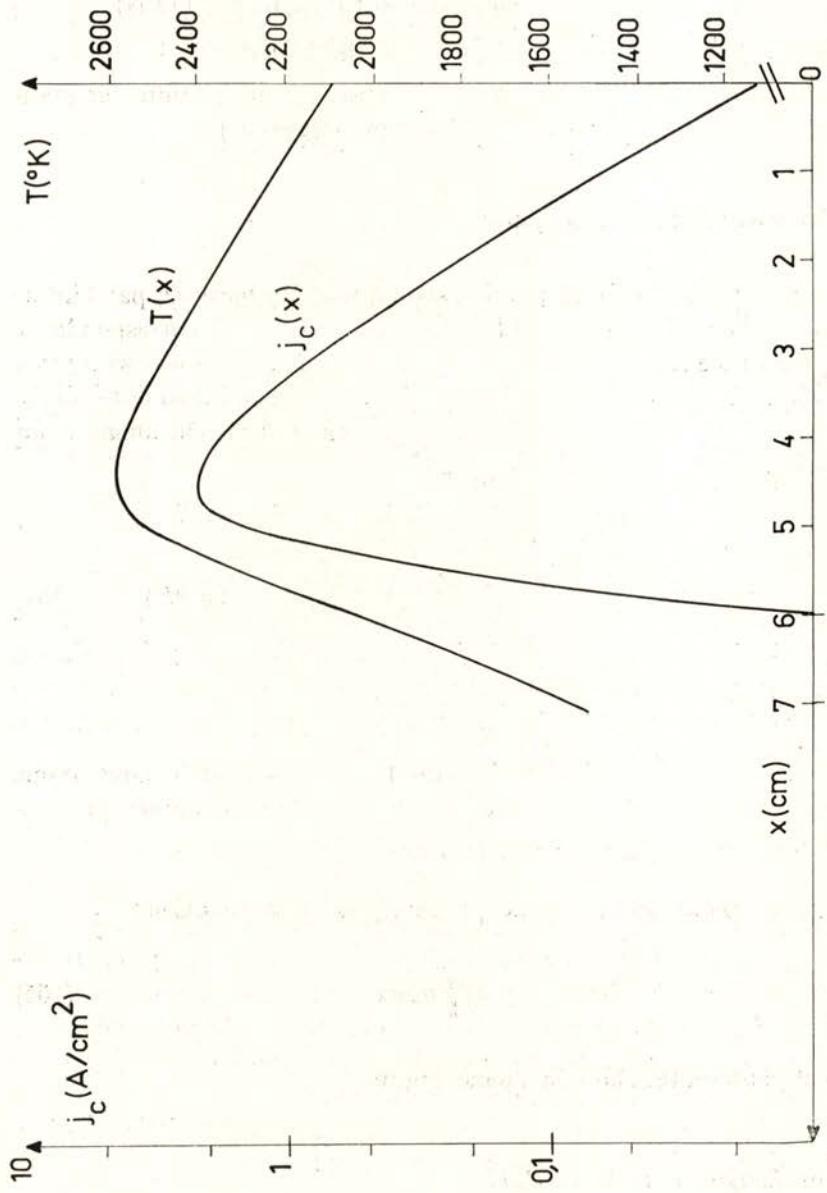


Fig. 33 — Répartition longitudinale de la température de la paroi cathodique et de la densité du courant thermoionique

Régime de fonctionnement : $V = 77{,}5\ V$

$I = 20\ A$

$Q_c = 6 \times 10^{-2}\ \text{cm}^3\ \text{s}^{-1}$ (TPN)

$P_E = 5 \times 10^{-3}$ Torr

$B = 0$ (absence de champ magnétique extérieur)

a) *Température de la paroi*

La température de la paroi cathodique a été mesurée par l'intermédiaire d'un pyromètre à filament; la courbe $T(x)$ correspondante est représentée dans la Figure 33. Sur la même figure nous avons tracé la courbe $j_c(x)$ (densité du courant d'émission thermoionique de la paroi), calculée à partir de l'équation de Richardson-Dushman. Pour le Tantale cette équation s'écrit [28] :

$$j_c = 55\ T^2\ e^{-\frac{4{,}8 \times 10^4}{T}} \quad A/\text{cm}^2 \qquad (T \text{ en } {}^oK) \qquad (154)$$

b) *Répartition de la densité des neutres*

D'après les courbes de la Figure 14 (cf. Chapitre 3) nous avons obtenu, pour le rayon de la cathode et pour le débit donnés, la fonction $n_n(x)$ représentée dans le Figure 34.

Nous avons aussi calculé graphiquement la fonction :

$$y = \int_o^x n_n\, dx \qquad (155)$$

qui est représentée dans la même Figure.

c) *Longueur de la C. P. I.*

En partant de l'hypothèse (discutée dans le paragraphe 2.2.5) que la longueur de la C.P.I. est donnée approximativement par l'abs-

cisse du maximum de température de la paroi (hypothèse dont la vérification est un des buts de ce travail) on aura d'après la Figure 33 :

$$x_o = l = 4{,}5 \text{ cm}$$

Nous avons ensuite mesuré le champ électrique longitudinal dans la C. P. I., par variation de la longueur de celle-ci (méthode décrite dans la référence [8]), ayant obtenu un excellent accord avec des résultats antérieurs, obtenus en présence d'un champ magnétique longitudinal. Le champ mesuré était $X_I = 8\ V/\text{cm}$.

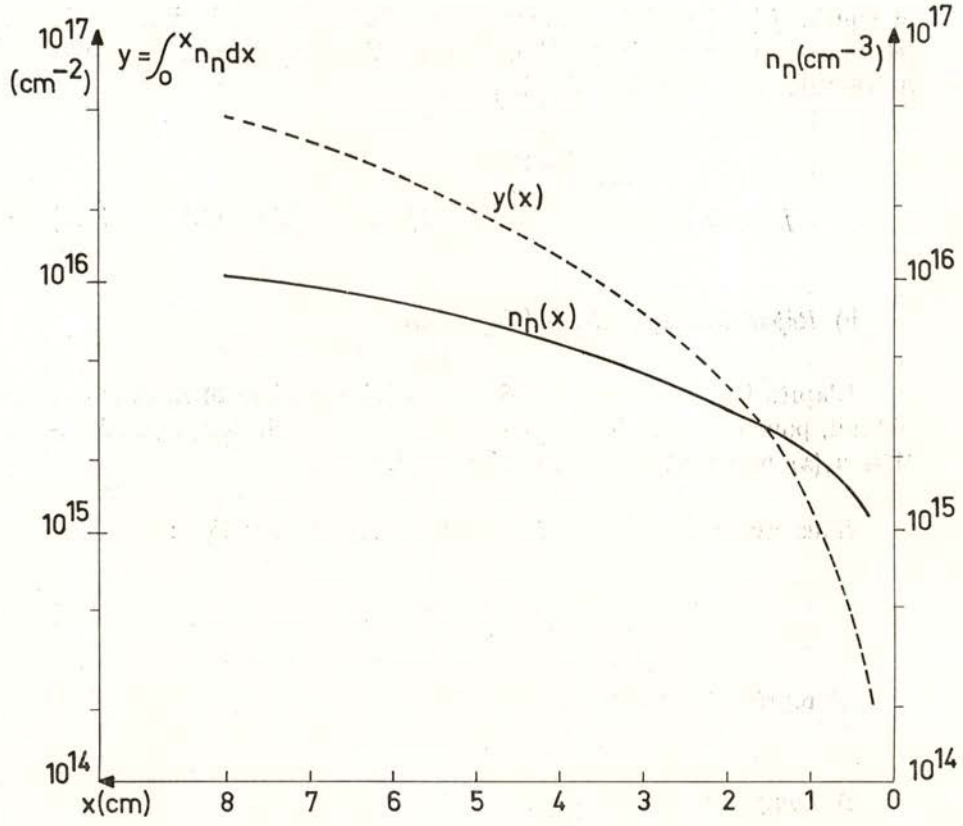


Fig. 34 — Répartition longitudinale de la densité des neutres et de la quantité $y = \int_o^x n_n\, dx$

On aura ainsi (cf. paragraphe 6.1) :

$$\Delta x = \frac{V_i - V_m}{X_I}$$

$$= 0{,}5 \text{ cm}$$

Le nombre de «tranches» de longueur Δx est, dans ces conditions :

$$k = \frac{x_o}{\Delta x} = \frac{l}{\Delta x} \qquad (156)$$

$$= 9$$

La distribution du potentiel de la gaine dans les tranches qui constituent notre modèle de la C. P. I. (cf. paragraph 6.1) est présentée dans la Figure 35. Sur la même figure nous avons tracé la variation du paramètre $n_n \, \Delta x$ en fonction de l'ordre des tranches considérées.

d) *Terme d'ionisation*

Les courbes universelles de la Figure 28 permettent d'obtenir le rendement d'ionisation $\eta^k = \dfrac{\mathscr{S}^k}{i^k}$.

On peut donc calculer $\mathscr{S}^k = \eta^k \dfrac{2 j_c}{q R}$ dans chaque tranche. La fonction $\mathscr{S}(x)$ est tracée dans la Figure 36, de même que $\Delta \mathscr{S}^k$ (calculé à partir de l'équation (126)) et $\mathscr{S}_T = \mathscr{S} + \Delta \mathscr{S}$.

e) *Courant ionique radial*

Le calcul numérique de l'équation du courant ionique radial (cf. éq. (151)) a été fait pour les valeurs suivantes des paramètres :

$$w_i = 7 \times 10^4 \text{ cm s}^{-1} \quad (T_i = 2500 \text{ }^oK)$$

$$\mu_i \, n_n = \mu_{i_o} (T_o) \cdot \left(\frac{T_o}{T_i} \right)^{1/2} \cdot \; n_L$$

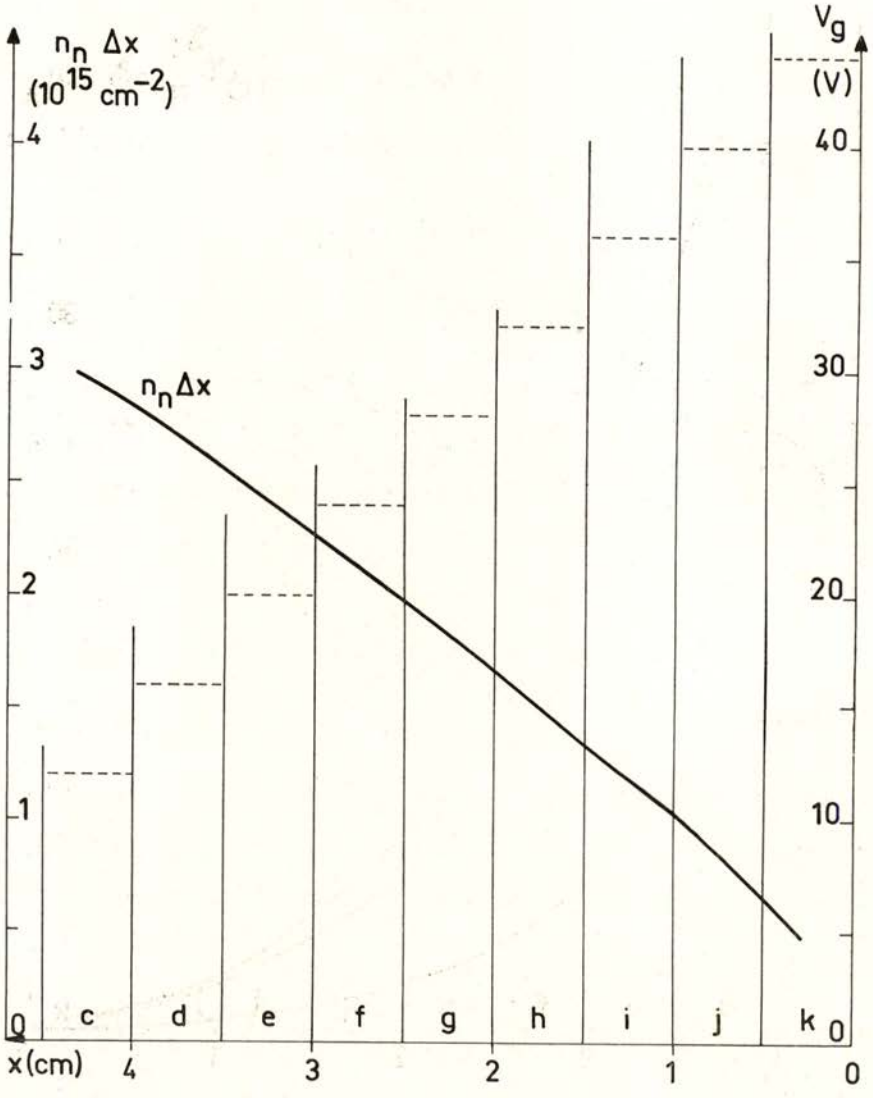


Fig. 35 — Répartition longitudinale du potentiel de la gaine et du paramètre $n_n \cdot \Delta x$, en fonction de l'abscisse et de l'ordre des tranches

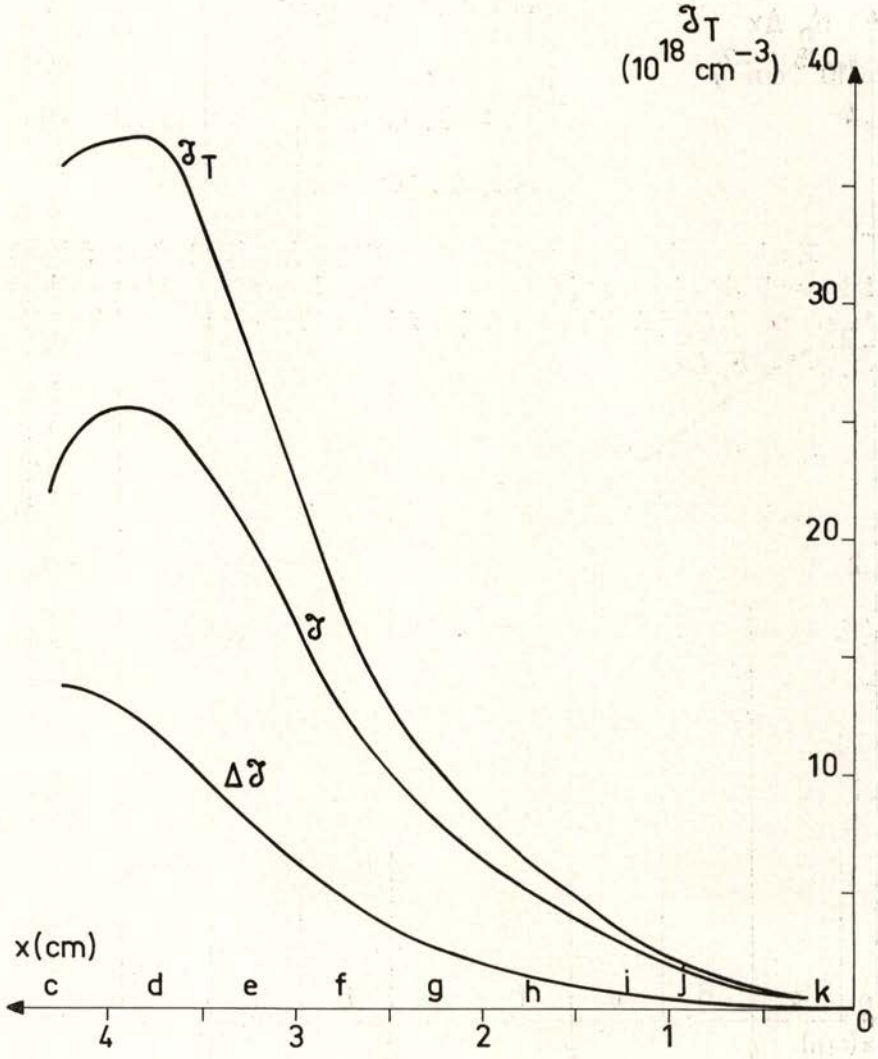


Fig. 36 — Répartition longitudinale des processus d'ionisation dans la C. P. I.

Avec $\mu_{i_o}(T_o) = 1{,}6\ \text{cm}^2\ V^{-1}\ \text{s}^{-1}$ [20]

$$n_L = 2{,}67 \times 10^{19}\ \text{cm}^{-3}$$

on obtient: $\mu_i\ n_n = 1{,}42.10^{19}\ (V\ \text{cm}\ s)^{-1}$

$$A = \frac{w_i}{2R(\mu_i n_n) X_I} =$$

$$= 2{,}18\ .\ 10^{-15}\ \text{cm}^2$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (151) et en faisant intervenir $\mathscr{S}_T(x)$ et y (x) données par les Figures 36 et 34 on obtient la courbe $j_{ir}(x)$ (cf. Figure 36) (en faisant l'hypothèse additionnelle $j_{i_L}(0) = 0$).

f) *Densité des métastables*

En introduisant les valeurs de $n_n^k\ \Delta x$ et j_c dans les courbes de la Figure 30 nous avons obtenu $i_P^k = \dfrac{n_m^k\ w_m}{2\,R}$ d'où l'on déduit n_m (cf. Figure 38).

g) *Apport de chaleur sur la paroi; pertes radiales*

Dans la Figure 39 sont représentées les grandeurs q_i, q_m et q_J (données par les équations (47), (49) et (53); et leur somme q_r' (q_J se trouve être négligeable: $q_J < 0{,}2\ W/\text{cm}^2$ au maximum).

De même, nous avons calculé:

$$\mathscr{p}_{ray} = 2{,}84 \times 10^{-13}\ [1 + 2 \times 10^{-3}(T - 300)]\ T^4\ (W/\text{cm}^2) \qquad (157)$$

$$\mathscr{p}_{th} = j_c \varphi (\varphi = 4{,}12\ V \text{ pour le Tantale})\ (W/\text{cm}^2) \qquad (158)$$

$$\mathscr{p}_{ev} = 3{,}4 \times 10^6\ T^{-\frac{1}{2}}\ e^{-\frac{9{,}2 \times 10^4}{T}}\ (W/\text{cm}^2)$$

Ces fonctions et leur somme $\mathscr{p}_r'$ ont été tracées dans la Figure 40 ($\mathscr{p}_{ev}$ se trouve être négligeable: $< 10^{-2}\ W/\text{cm}^2$).

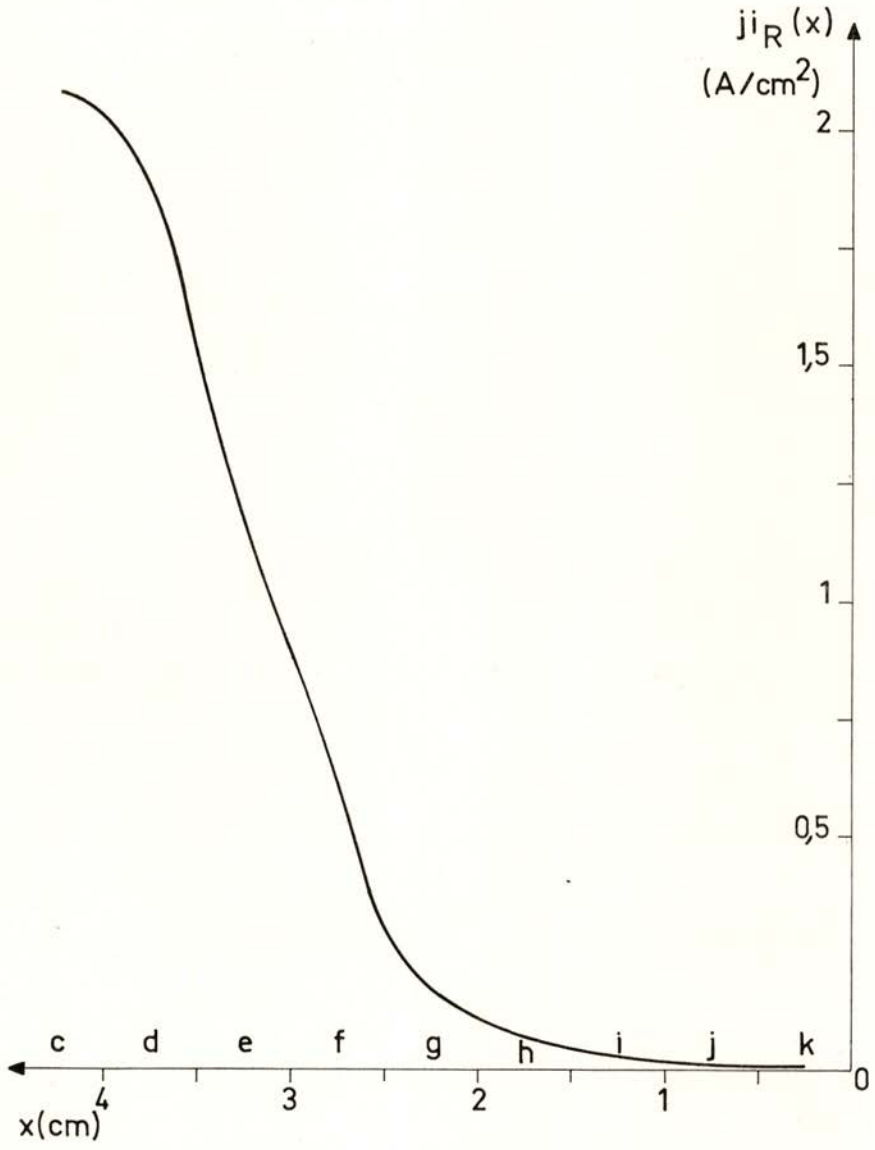


Fig. 37 — Répartition longitudinale de la densité du courant ionique radial dans la C. P. I.

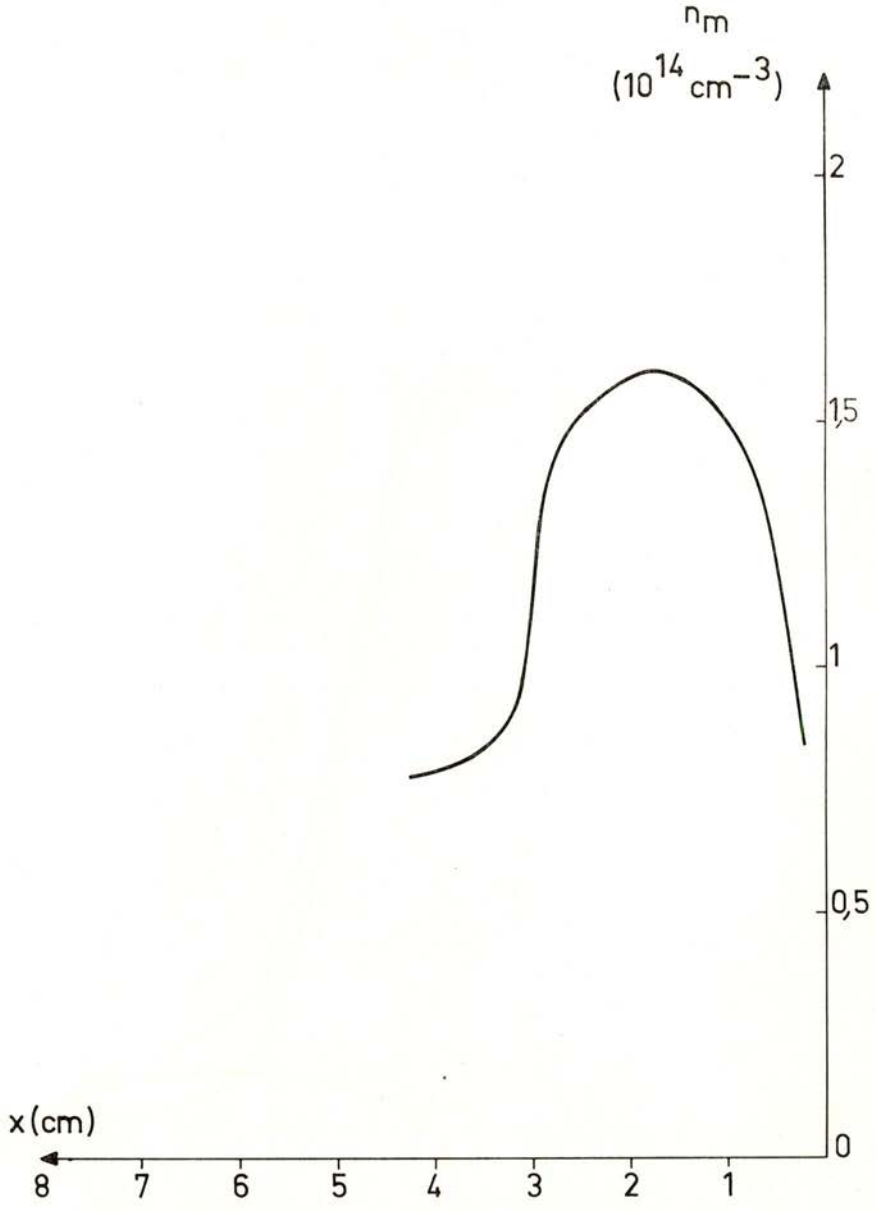


Fig. 38 — Répartition longitudinale de la densité des métastables dans la C. P. I.

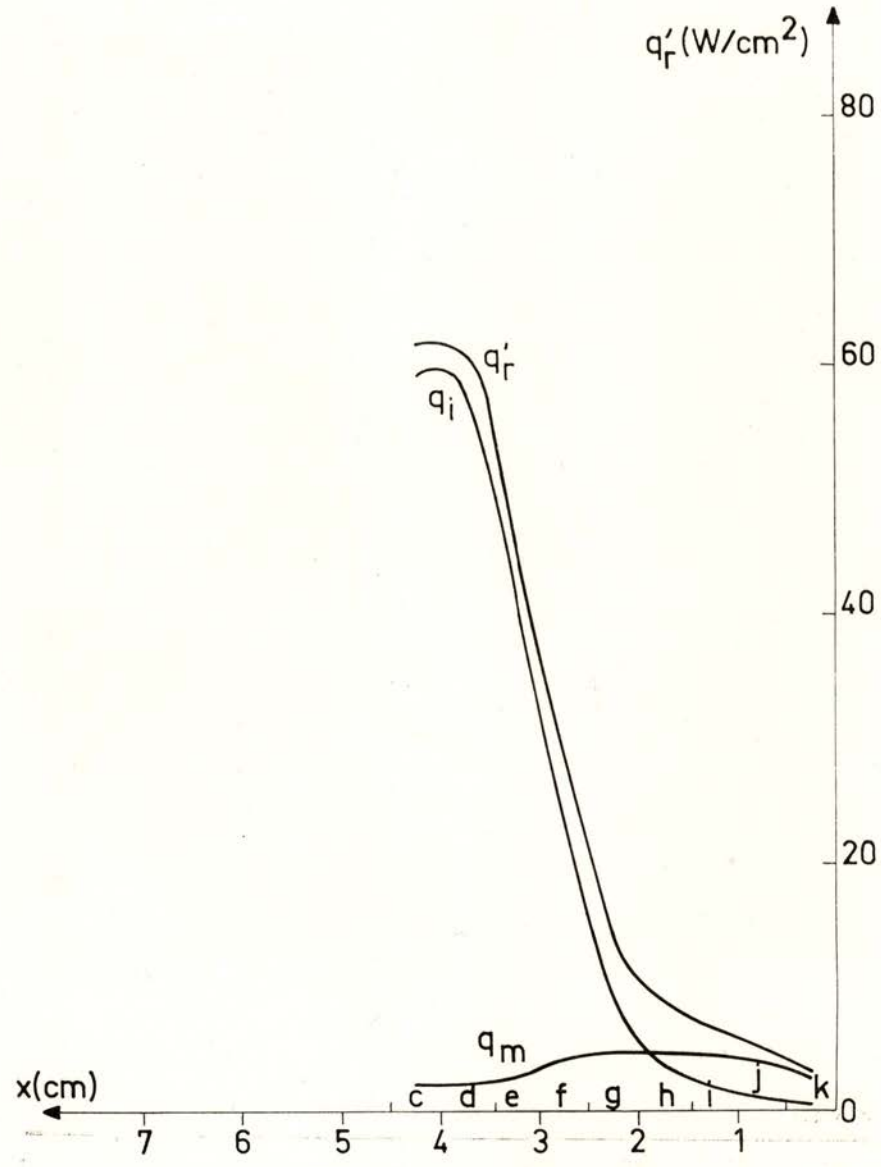


Fig. 39 — Terme de source de chaleur sur la paroi cathodique

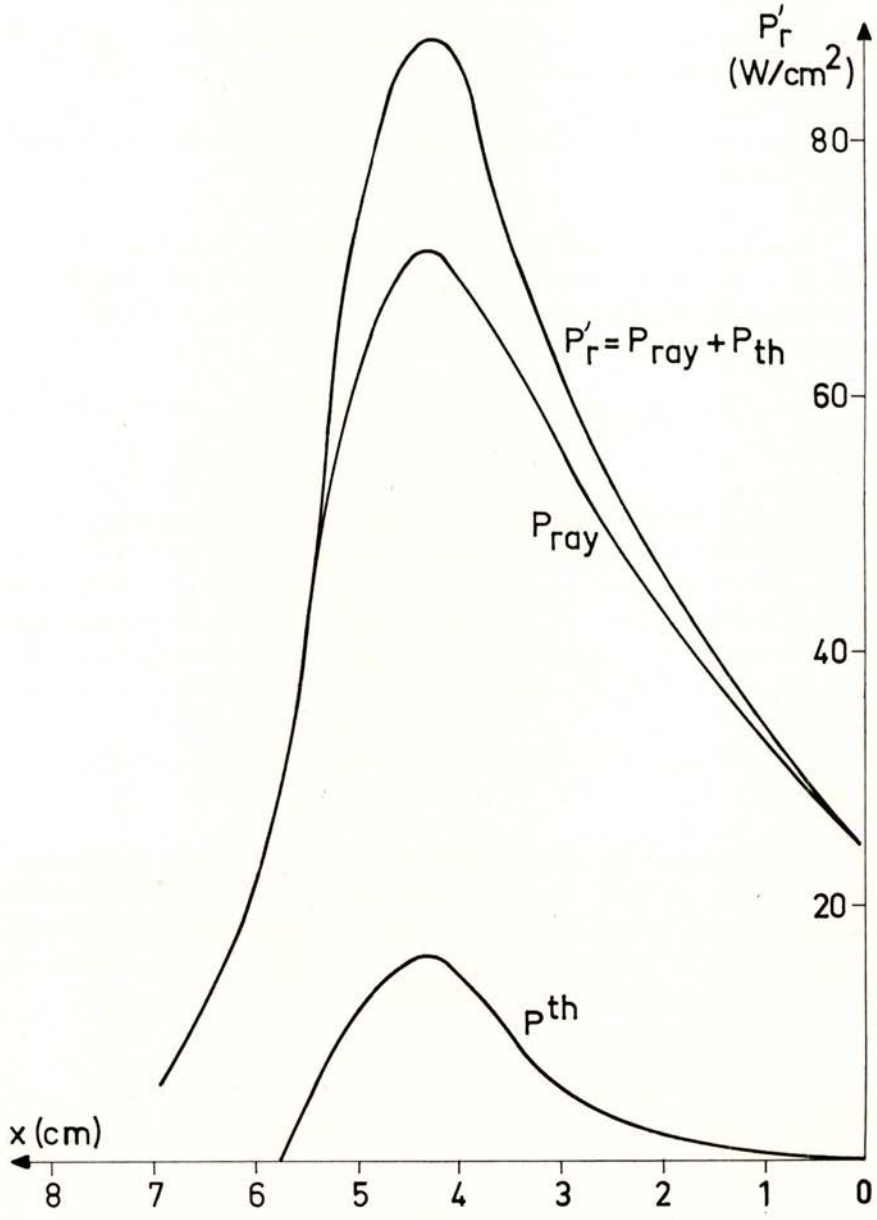


Fig. 40 — Terme de perte radial de chaleur sur la paroi cathodique

h) *Conclusions*

Dans le cas que nous venons d'étudier numériquement (colonne longue) nous pouvons remarquer que :

1) — Le terme d'ionisation passe par un maximum au voisinage de la tranche *d*.

2) — Le courant ionique radial passe par um maximum dans la tranche *c* ; il doit diminuer rapidement pour des abscisses plus grandes, mais nous ne sommes pas en mesure de calculer cette partie de la courbe.

3) — La densité des métastables atteint environ 10^{14} cm^{-3} dans la C. P. I.

4) — Le terme dominant d'échauffement de la cathode est le bombardement ionique; les contributions du bombardement des métastables et de l'effet Joule sont nettement plus faibles. Par ailleurs, nous n'avons pas porté dans nos courbes la contributions du Bremsstrahlung et de la conduction gaz-métal, dans la mesure où nous ignorons leur répartition longitudinale (les dernières représentent environ $5\,W$ au maximum).

Le maximum de puissance arrivée sur la cathode se situe dans la tranche *c*.

5) — Le terme de rayonnement est le terme principal de refroidissement de la cathode, quoique la contribution du terme d'émission thermoionique ne soit pas négligeable. La puissance ainsi évacuée (rayonnement et émission thermoionique) passe par un maximum au point où la température est maximale.

6) — D'après nos calculs, les pertes radiales l'emportent sur le terme d'apport de chaleur ce qui est manifestement faux dans la C. P. I. Au niveau de la zone active, l'erreur dépasse 20 %.

9 — CONCLUSION

a) *Origine du courant de la décharge :*

Dans le cas d'un arc à cathode creuse on peut distinguer, dans la région cathodique, plusieurs composants du courant (cf. Fig. 41) :

— Émission thermoionique «intérieure» — produite par la face intérieure de la paroi cathodique. Cette émission est à l'origine de processus inélastiques divers, qui créent $\mathscr{S}$ paires électron-ion par cm^3 et par seconde ; après thermalisation, ces électrons contribuent au courant électronique ($I_e^{th \cdot I}$) ;

— Émission thermoionique «extérieure» (par la face extérieure de la paroi). Étant donné que la pression dans l'enceinte P_E est nettement plus basse que celle qui règne dans le canal cathodique, le terme d'ionisation correspondant à cette émission doit être comparativement faible; nous le considérons comme négligeable. Cette émission contribue donc au courant électronique ($I_e^{th \cdot E}$), mais seulement par elle-même, contrairement à l'émission «intérieure» ;

— Ionisation dans la C.P.I.: le nombre d'électrons et d'ions créés par unité de volume et par unité de temps, contribue au courant électronique sortant de la cathode (I_e^J) et au courant ionique (I_i^J) sur la paroi cathodique ;

— Courant ionique arrivant à la cathode, provenant des phénomènes d'ionisation dans le plasma extérieur (notamment au niveau de la chute anodique).

On peut obtenir ces divers composants du courant, en considérant, par exemple, le bilan des particules au niveau de la paroi métallique :

$$I_i^J = 2\pi R \int_0^{L_c} j_{ir}(x)\, dx = 2{,}7\ A \text{ (dans le cas que nous avons étudié)}$$

$$I_e^{th \cdot E} = I_e^{th \cdot I} = 2\pi R \int_5^{L_c} j_e(x)\, dx = 5{,}2\ A$$

$$I' = I_i^J + I_e^{th \cdot E} + I_e^{th \cdot I} = 13{,}1\ A$$

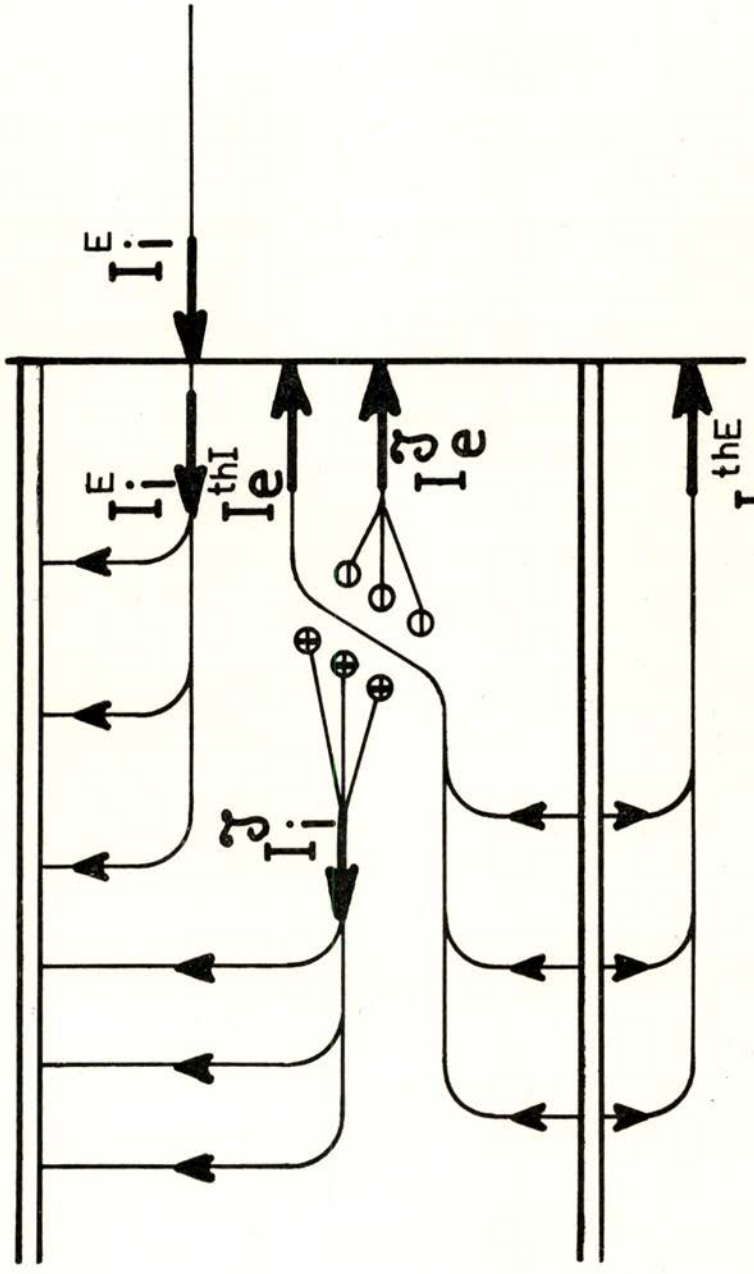


Fig. 41 — Bilan du courant à l'abscisse $x = 0$ et sur la paroi de la cathode

Nous avons donc 13,1 A au lieu des 20 A effectivement fournis par la décharge; on peut envisager les possibilités suivantes d'explication :

— Nous avons ignoré le composant I_i^E (0) (courant ionique arrivant sur la cathode en provenance du plasma extérieur). Ce courant n'est pas a priori déterminé, dépendant des valeurs du champ électrique longitudinal dans le plasma extérieur et de la chute anodique ($X_E = 0{,}25\ V/\text{cm}$ et $V_A = 15\ V$ dans notre cas). Ces grandeurs déterminent le nombre de processus d'ionisation dans le plasma extérieur.

Remarquons que la solution $I_i^E\ (0) = 0$ est théoriquement possible: les électrons et les ions créés à l'extérieur serviraient simplement à compenser les pertes par diffusion ambipolaire sur les parois de l'enceinte.

Ce problème de déterminer la partie ionique du courant total peut être résolu par l'analyse détaillée des processus inélastiques dans le plasma extérieur; c'est un problème complexe, comme le prouvent les conclusions contradictoires fournies par des auteurs divers (par exemple, I_i/I_e variant entre 10^{-3} et 0,5). Nous avons tendence à croire, jusqu'à preuve du contraire, que le courant ionique extérieur n'est qu'une faible partie du courant total, raison par laquelle il nous semble improbable que le défaut de courant dans nos résultats soit dû à ce courant ionique.

— Il est possible que l'émission thermoionique ne soit pas le seul processus d'émission cathodique. L'émission secondaire par les ions doit être rejettée comme insuffisante à expliquer ce défaut, car le rendement est trop faible ($\gamma_i = 0{,}1$) [25]. Il reste à considérer l'émission secondaire par impact des métastables sur la paroi; malheureusement, nous ignorons la valeur de γ_m correspondante. Il faudrait que ce facteur soit très important pour que cet effet puisse être appréciable.

— Enfin, nous n'avons pas tenu compte de la possibilité d'émission photoélectrique par les photons issus des processus de désexcitation radiative.

Il reste à savoir si le résultat obtenu n'est pas tout simplement la conséquence des défauts de notre modèle, discontinu pour ce qui est de l'énergie des électrons et limité à 3 états (fondamental, métastable, ion à l'état fondamental) pour les états possibles des particules lourdes.

b) *Bilan énergétique*

On retrouve le même défaut de courant dans le calcul du bilan énergétique de la région cathodique: la puissance reçue par la paroi cathodique dans la C.P.I. est inférieure à celle évacuée par le rayonnement dans cette région. Le défaut est d'au moins 50 %.

Cependant, la forme générale de la courbe de puissance d'échauffement de la paroi prouve que le maximum de température cathodique est situé au voisinnage de l'origine x_o ($V_g(x_o) = 12\ V$) de la C.P.I. Par contre — est c'est là l'aspect négatif de notre travail — nous n'avons pas pu déterminer l'empacement *exact* de l'équipotentielle $V = 12\ V$, en raison de l'imprécision manifeste de notre bilan énergétique.

c) — *Principe du fonctionnement de la décharge*

Le maximum de bombardement ionique détermine la zone la plus chaude de la cathode; ce maximum se situe au voisinnage de l'equipotentielle $V = 12\ V$, qui doit être considérée comme le début de la C.P.I.. Cette zone s'établit à une abscisse où la pression du gaz neutre est suffisamment forte pour assurer un bon rendement d'ionisation des électrons émis par la paroi.

La valeur optimale de la pression des neutres qui conduit à un maximum de bombardement ionique (le maximum de puissance d'échauffement correspond approximativement à celui de la densité du courant ionique) pourrait être déterminée par dérivation de l'équation (151) de j_{ir}, considérée comme une fonction de la pression (P et x varient dans le même sens). Malheureusement nous ne connaissons pas a priori l'expression analytique de $\mathscr{S}_T\ (x)$, dont la forme dépend des conditions expérimentales.

On peut imaginer le fonctionnement d'une cathode creuse en régime d'arc, de la manière suivante:

Amorçage:

Supposons que l'arc s'amorce, comme pour une électrode classique, à partir de l'extremité de la cathode. La tension de la décharge doit être suffisament élevée pour permettre la création d'un courant ionique provenant du plasma extérieur; ces ions bombardent la cathode, qui commence à chauffer et donc, à émettre des électrons par effet thermoionique.

Progressivement, les électrons émis par la paroi intérieure de la cathode commencent à ioniser le gaz dans le canal; les ions arrivant de l'extérieur pénètrent de plus en plus profondément dans le canal cathodique; l'échauffement par ce bombardement gagne des régions de plus en plus profondes. Le processus atteint l'équilibre lorsque le courant ionique longitudinal est «freiné» par une pression trop forte des neutres. Dans ce régime, la tension de la décharge est plus faible pour le même courant, car une surface importante de la cathode est devenue émissive; la majeure partie des processus d'ionisation a lieu à l'intérieur du canal.

Il est concevable que l'ensemble de ces processus ne puisse pas se déclencher si le courant est trop faible lors de l'amorçage de l'arc, car dans ces conditions la cathode n'arrive pas à chauffer suffisamment pour que l'ionisation du gaz à l'intérieur du canal commence à avoir lieu. Ceci explique pourquoi, dans le régime à trop faible courant, on observe la formation d'une tache cathodique sur la paroi *extérieure* de la cathode. La pénétration des ions à l'intérieur du canal doit être facilitée si l'on diminue le débit cathodique de gaz : là encore, les expériences le confirment; on vérifie que, effectivement, la réduction du débit facilite l'établissement du régime normal.

Variation du débit cathodique:

Lors du fonctionnement en régime normal, l'équilibre entre les processus que nous avons décrit (ionisation dans le canal, perte d'ions sur la paroi de la cathode), est rompu si, par variation du débit cathodique, on fait changer la valeur de la pression à l'intérieur du canal. Une diminution du débit fait pénétrer les ions plus loin (la mobilité ionique a augmenté); le maximum de bombardement va s'établir à une abscisse plus grande. De même, un débit plus fort entraîne le raccourcissement de la colonne positive intérieure.

Zone active:

Étant donné que la majeure partie du courant électronique provient de la zone du maximum de température cathodique et que le courant ionique est maximum au même endroit, cette région peut être assimilée à la tache cathodique qui, dans les arcs à cathode classique,

est le point source du courant de la décharge. Cependant, dans les arcs à cathode creuse, cette zone active est étendue, diffuse et sa température est comparativement basse, ce qui accroît la durée de vie de la cathode et la pureté du plasma extérieur.

d) *Rôle des métastables*

Nous avous montré que l'ionisation en deux étapes (atome non excité → métastable ; métastable → ion) était un processus très important dans le mécanisme de production d'ions dans la C. P. I. En outre, l'existence d'une population assez dense de métastables, telle que nous l'avons prévue par la voie théorique, permet d'envisager des possibilités très intéressantes de l'utilisation des cathodes creuses comme des sources de ces particules. Leur durée de vie, l'énergie très importante (11,5 eV) dont elles disposent et — surtout — le fait qu'il s'agit le particules neutres, insensibles aux champs électriques ou magnétiques, rendent ces métastables très utiles comme un moyen simple de produire des collisions inélastiques très énergétiques avec d'autres particules.

* * *

Nous désirons exprimer notre gratitude à M. M. les Professeurs J. L. Delcroix, Directeur du Laboratoire de Physique des Plasmas de la Faculté des Sciences d'Orsay, et W. P. Allis du Massachussets Institute of Technology, pour un grand nombre de critiques et suggestions de nature théorique ; à M. H. Minoo du Laboratoire de Physique des Plasmes avec qui nous avons effectué la majeure partie du travail experimental ; et a M. R. Estival, du même Laboratoire, pour son assistance dans le vérification des calculs.

APPENDICES

APPENDICE I

1 — *ÉPAISSEUR DE LA GAINE IONIQUE*

Il s'agit pour nous de déterminer l'épaisseur de la gaine positive qui se forme sur la paroi du canal cathodique.

Mackeown [15] a traité un problème semblable, en partant des hypothèses suivantes:

— Géométrie unidimensionnelle (paroi plane, infinie).
— Les ions arrivent sur la lisière de la gaine avec une densité de courant j_i (cf. Fig. A-1 (*a*)) et énergie négligeable.
— Les électrons sont émis par la paroi cathodique sans énergie initiale, avec une densité de courante j_e^c.
— On néglige les collisions à l'intérieur de la gaine.

Dans ces conditions on peut écrire l'équation de Poisson:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon_o}\left(\frac{j_i}{v_i} - \frac{j_e^c}{v_e}\right) \tag{1}$$

Le système MKSA a été utilisé; v_i et v_e sont respectivement les vitesses acquises par les ions et les électrons dans la gaine, soit:

$$v_i = \left[\frac{2q}{M}(V_g - V)\right]^{1/2} \tag{2}$$

$$v_e = \left(\frac{2q}{m}V\right)^{1/2} \tag{3}$$

V étant le potentiel au point x et V_g le potentiel à la lisière de la gaine.

En substituant (2) et (3) dans (1) on obtient :

$$-\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon_o}\left(\frac{m}{2q}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}(V_g - V)^{-1/2} j_i - V^{-1/2} j_e^c\right] \qquad (4)$$

En intégrant avec la condition aux limites $\left(\frac{dV}{dx}\right) = 0$ pour $V = V_g$ (lisière de la gaine), on obtient :

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{4}{\varepsilon_o}\left(\frac{m}{2q}\right)^{1/2}\left[j_i\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}(V_g - V)^{1/2} - j_e^c(V_g^{1/2} - V^{1/2})\right] \qquad (5)$$

Cette équation n'est pas d'intégration commode ; Mackeown se limite à calculer le champ électrique à la paroi ($V = 0$) et obtient :

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2_{\text{paroi}} = \frac{4}{\varepsilon_o}\left(\frac{m}{2q}\right)^{1/2} V_g^{1/2}\left[j_i\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} - j_e^c\right] \qquad (6)$$

Dans notre cas ce qui nous intéresse est d'évaluer l'épaisseur e de la gaine ; nous allons effectuer un calcul d'ordre de grandeur, à défaut de savoir intégrer (5).

Calculons d'abord le champ électrique et le potentiel dans la gaine dans le cas où il n'y a pas d'émission de la paroi ($j_e^c = 0$).

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{\text{ion}} = \left[\frac{4}{\varepsilon_o}\left(\frac{M}{2q}\right)^{1/2} j_i\right]^{1/2}(V_g - V)^{1/4}_{\text{ion}} \qquad (7)$$

En intégrant, avec la condition aux limites $V = 0$ pour $x = 0$ on obtient :

$$V_{\text{ion}} = V_g\left[1 - \left(1 - \frac{x}{e_{\text{ion}}}\right)^{4/3}\right] \qquad (8)$$

$$\text{avec : } e_{\text{ion}} = \frac{2}{3}\left(\frac{2q}{M}\right)^{1/4}\left(\frac{\varepsilon_o}{j_i}\right)^{1/2} V_g^{3/4} \qquad (9)$$

La courbe $V/V_g = f(x/e)$ est réprésentée dans la Figure A-1 (b). Le potentiel croît d'une façon monotone entre les abscisses O et e ; le champ électrique est maximum à la paroi et décroit d'une façon monotone jusqu'à l'abscisse e, où il est nul.

Si l'on calcule e_{ion} dans ce cas pour $V_g = 50\ V$, $n_i = 10^{14}\text{cm}^{-3}$, $T_i = 0{,}24\ eV$, en partant de l'hypothèse que les ions arrivent à la lisière de la gaine par l'effet de leur agitation thermique :

$$j_i = \frac{n_i\ q\ w_i}{4} = 0{,}24\ A\ \text{cm}^{-2}$$

on aura : (10)

$$e_{\text{ion}} = 3{,}9 \times 10^{-3}\,\text{cm}$$

Nous allons déterminer maintenant l'effet des électrons d'émission. Remarquons d'abord que la courbe du potentiel présente dans ce cas un point d'inflexion à l'intérieur de la gaine, déterminé par la condition $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = O$. Le point I a l'ordonnée :

$$(V)_I = \frac{V_g}{1 + \left(\frac{j_i}{j_i}\right)^2 \frac{M}{m}} \tag{11}$$

Du fait de la présence des électrons d'émission, la courbe du potentiel est déformée, surtout au voisinage de la paroi, où elle tourne la concavité vers le haut (cf. Figure A-1 (c)).

Nous pouvons déterminer une limite supérieure de l'épaisseur de la gaine dans le cas où l'effet des électrons se ferait sentir plus fortement (haute température de la paroi, si l'on admet que cette émission est surtout d'origine thermoionique), de la manière suivante :

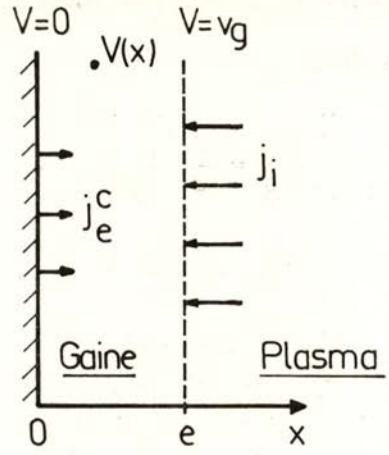
— Imaginons le tracé de la tangent à la courbe $V(x)$ à l'origine (droite OA de la Figure A-I (c)).

— Traçons aussi idéalement (puisqu'on ne connait de la courbe que sa forme), la tangente qui est parallèle à $\overline{OA}$ (droite $\overline{BC}$).

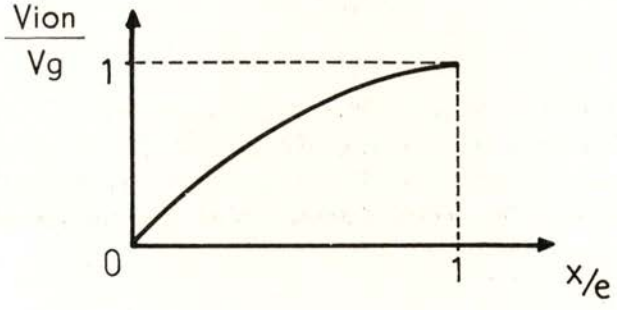
— Calculons l'ordonnée du point de tangence B.

Ainsi, la pente de la droite $\overline{OA}$ a la valeur (cf. éq. 5 avec $V = O$) :

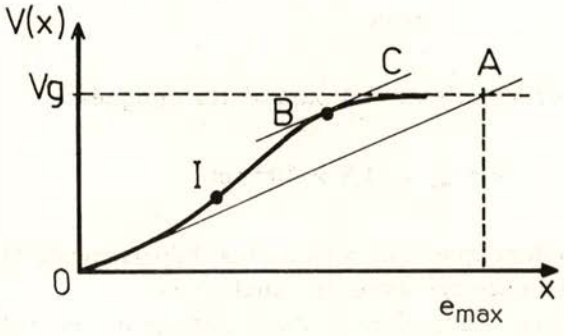
$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{\text{paroi}} = \left\{\frac{4}{\varepsilon_o}\left(\frac{m}{2q}\right)^{1/2} V_g^{\,1/2}\left[j_i\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} - j_e\right]\right\}^{1/2} \tag{12}$$



(a)



(b)



(c)

Fig. A-1 — *a*) — Modèle de la gaine suivant Mackeown.
b) — Potentiel dans la gaine en absence d'émission électronique.
c) — Potentiel dans la gaine en cas d'émission électronique (qualitatif).

En écrivant la condition :

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_B = \left.\frac{dV}{dx}\right|_{\text{paroi}} \tag{13}$$

on obtient, en plus de $V = O$, la solution :

$$\frac{V_B}{V_g} = \frac{4\, j_e^{c2}\, j_i^2\, M\, m}{(j_i^2 M + j_e^{c2} m)^2} \tag{14}$$

soit, pour $j_i = 0{,}24\ A/\text{cm}^2$ et $j_e = 40\ A/\text{cm}^2$ (forte émission cathodique) :

$$\frac{V_B}{V_g} = 0{,}87$$

Dans ces conditions où le point B est très proche de l'ordonnée $V = V_g$ (donc, proche de la lisière de la gaine), la droite $\overline{OA}$ intersepte la droite $V = V_g$ dans un point dont l'abscisse dépasse l'épaisseur de la gaine. Nous prendrons donc cette abscisse comme une limite supérieure de e.

Il suffit donc d'écrire :

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{\text{paroi}} \times e_{max} = V_g \tag{15}$$

et l'on obtient, pour les valeurs des paramètres indiqués :

$$e \leq e_{max} = 4{,}3 \times 10^{-3}\,\text{cm}$$

Nous vérifions donc que dans tous les cas, l'épaisseur de la gaine ionique est très inférieure au rayon du canal.

En même temps, l'hypothèse initiale négligeant les collisions à l'intérieur de la gaine se trouve vérifiée (nous verrons plus tard que le libre parcours moyen de collision $e-n$ ou $i-n$ est toujours supérieur à cette valeur de e).

2 — *PROFIL RADIAL DE LA DENSITÉ DE IONS ET ÉLECTRONS DE LA C. P. I.*

Étudions d'abord le régime de diffusion radiale des particules chargées, suivant Delcroix [20]. Dans cette théorie il faut comparer la longueur de Debye électronique à la longueur de relaxation du mode principal de diffusion (dans notre cas, le rayon R du canal).

La longueur de Debye h_o, s'obtient à partir de :

$$h_o = \frac{kT_e}{4\pi n_e q_e^2} = 6{,}9\left(\frac{T_e}{n_e}\right)^{1/2} (CGS) \tag{16}$$

Dans notre cas, en posant $T_e \sim 3\ eV$, $n_e \sim 10^{14}\,\mathrm{cm}^{-3}$ on obtient :

$$h_o = 10^{-4}\ \mathrm{cm}$$

Cette longueur étant très inférieure au rayon (de l'ordre de quelques millimètres) la diffusion est ambipolaire parfaite et ce plasma obéit à la condition de quasi-neutralité $n_e \simeq n_i$.

Cherchons maintenant à établir la forme du profil radial de la densité ionique.

Nous allons considérer l'équation de conservation des ions dans une certaine section transversale du canal cathodique, en régime permanent. En outre, nous allons ignorer l'existence d'un flux ionique longitudinal, ce qui aura comme conséquence d'accentuer le gradient radial de densité ionique.

L'équation de conservation des ions, en absence de flux longitudinal, s'écrit :

$$D_a\ \nabla_r^2\ n_i = -\,i\,(r) \tag{17}$$

avec :

$i\,(r)$: taux local d'ionisation (ions créés/$\mathrm{cm}^3\mathrm{s}$), croissant avec r ;
D_a : coefficient de diffusion ambipolaire.

Dans un premier cas considérons $i(r) = cte$ (indépendant du rayon). L'équation qui relie $i(r)$ au taux d'ionisation global $\mathscr{I}$ s'écrit :

$$\frac{R^2}{2}\,\mathscr{I} = \int_o^R i\,(r)\ r\ dr \tag{18}$$

et nous avons donc dans ce cas $i(r) = \mathscr{I}$.

L'équation (17) devient:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial n_i}{\partial r}\right) = -\frac{\mathscr{I}}{D_a} \tag{19}$$

et nous obtenons, par intégration:

$$n_i = -\frac{\mathscr{I}}{4D_a}r + K_1 \log r + K_2 \tag{20}$$

La condition $n_i\,(0) =$ fini impose $K_1 = 0$ et $K_2 = n_{io}$

$$n_i = n_{io}\left(1 - \frac{\mathscr{I}}{4\ D_a n_{io}}r^2\right) \tag{21}$$

Nous avons donc un profil parabolique et la valeur que la densité prend au voisinage de la paroi est fonction des paramètres D_a, $\mathscr{I}$ et R (cf. Figure 9-b).

$$n_i(R) = n_{io}\left(1 - \frac{\mathscr{I}\ R^2}{4\ D_a n_{io}}\right) \tag{22}$$

Considérons maintenant le cas d'une répartition radiale des processus d'ionisation $i(r)$ plus proche de la réalité. Dans le but de traduire l'existence d'une majorité de ces processus au voisinage de la paroi nous allons supposer la forme suivante de $i(r)$ (cf. Figure 9-c).

$$\begin{cases} i(r) = O & (r < R_1) \\ i(r) = A\ (\text{cte}) & (R_1 \leq r \leq R) \end{cases} \tag{23}$$

R_1 étant un certain rayon dont la valeur ne sera pas pour le moment précisée.

L'expression (18) permet de déterminer la valeur de A:

$$\mathscr{I} = \frac{2}{R^2}\int_{R_1}^{R} A\ r\ dr \tag{24}$$

soit

$$A = \frac{\mathscr{I}\ R^2}{R^2 - R_1^{\,2}} \tag{25}$$

L'équation de conservation des ions devient :

$$\begin{cases} \nabla_r^2 n_i = -\dfrac{\mathscr{S}}{D_a} \dfrac{R^2}{(R^2 - R_1^2)} & \text{pour } R > r \geqslant R_1 \\ \nabla_r^2 n_i = 0 & \text{pour } r < R_1 \end{cases} \tag{26}$$

En intégrant et en posant les conditions frontières $n_i\,(O) = n_{io}$ (fini) ; $\left(\dfrac{\partial n_i}{\partial r}\right)_{R_1+\varepsilon} = \left(\dfrac{\partial n_i}{\partial r}\right)_{R_1-\varepsilon}$ (continuité du gradient de densité au point R_1) et $(n_i)_{R_1+\varepsilon} = (n_i)_{R_1-\varepsilon}$ (continuité de la densité au point R_1) on obtient (cf. Figure 9-c):

$$\begin{cases} n_i = n_{io} & (r > R_1) \\ n_i = n_{io} - \dfrac{\mathscr{S}}{4D_a} \dfrac{R^2}{R^2 - R_1^2} \left[\left(r^2 - R_1^2 \right) - R_1^2 \log \left(\dfrac{r}{R_1} \right)^2 \right] ; \\ ; \; (R_1 \leq r < R) \end{cases} \tag{27}$$

Pour $r = R$ (densité ionique à la paroi) on aura :

$$n_i(R) = n_{io} \left\{ 1 - \frac{\mathscr{S}}{4D_a n_{io}} \frac{R^2}{} \left[1 - \frac{R_1^2}{R^2 - R_1^2} \log \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 \right] \right\} \tag{28}$$

En comparant cette expression à l'équation (22) qui donne la valeur de la densité à la paroi dans le cas d'une répartition uniforme des processus d'ionisation, dans toute la section du canal, nous remarquons que dans ce dernier cas le profil radial de densité ionique est le plus accentué des deux (le terme entre crochets de (28) étant inférieur à l'unité).

Évaluons maintenant l'importance du terme soustractif dans (22). Le terme d'ionisation globale $\mathscr{S}$ est donné par :

$$\mathscr{S} = \frac{2\eta j_e^c}{q\ R} \tag{29}$$

Pour une température de paroi $T_p = 2500^o\ K$, j_e^c (donné par l'équation de Richardson-Dushman de l'émission thermoionique [28]) vaut :

$$j_e^c = 2\ A/\text{cm}^2$$

Si l'on pose $\eta = 0{,}3$ (cf. Ch. II-6) et pour $R = 0{,}3$ cm on obtient:

$$\mathscr{S} = 2{,}5 \times 10^{19}\ \text{ions cm}^{-3}\text{s}^{-1}$$

D'autre part le coefficient de diffusion ambipolaire D_a vaut:

$$\begin{aligned} D_a &= \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e} \\ &\simeq D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \end{aligned} \tag{30}$$

avec D_i (coefficient de diffusion ionique) donné par :

$$D_i = \frac{kT_i}{M\, n_n\, \sigma_{i-n}\, w_i} \tag{31}$$

M = Masse de l'ion

n_n = Densité des neutres

σ_{i-n} = Section efficace de transfert de quantité de mouvement ion-atome.

Pour des conditions courantes de fonctionnement ($T_i = 0{,}22\ eV$; $n_i = 10^{14}\,\text{cm}^{-3}$; $\sigma_{i-n} = 35 \times 10^{-16}\,\text{cm}^2$; $n_n = 10^{16}\,\text{cm}^{-3}$; $T_e = 3\ eV$) on obtient :

$$D_a = 4{,}26\ 10^4\,\text{cm}^2\text{s}^{-1}$$

et :

$$\frac{\mathscr{S} R^2}{4 n_{io} D_a} = 0{,}16$$

Nous aurons alors :

$$n_i(R) > 0{,}84\ n_{io}$$

et le profil de densité est assez aplati.

3 — *INTENSITÉ DU CHAMP ÉLECTRIQUE RADIAL DANS LA C. P. I.*

Le champ électrique radial s'obtient à partir de l'expression :

$$X_r(r) = \frac{kT_e}{q} \frac{\nabla_r n_e}{n_e} \tag{32}$$

Faisons intervenir l'expression qui donne la variation radiale de n (donc, de n_e) et qui a été déduite dans le paragraphe précédent pour $i(r) = \mathscr{I}$ (ionisation indépendante de r)

$$\nabla_r^2 n_e = - \frac{\mathscr{I}}{D_a} \tag{33}$$

Ou obtient :

$$\frac{\partial n_e}{\partial r} = - \frac{\mathscr{I}}{2D_a} r \tag{34}$$

Le gradient est donc maximum à la paroi, où il vaut :

$$\frac{\partial n_e}{\partial r}\Big|_R = - \frac{\mathscr{I}}{2D_a} R \tag{35}$$

et l'on obtient (cf. Eq. A-I-22) :

$$|X_r|_{\text{Max}} = \frac{kT_e}{q} \frac{\frac{\mathscr{I}}{2D_a} R}{n_{eo} - \frac{\mathscr{I}}{4D_a} R^2} \tag{36}$$

En négligeant $\frac{\mathscr{I}}{4D_a} R^2$ devant n_{eo} on obtient, dans le cas de l'ionisation indépendante de la coordonnée radiale :

$$|X_r|_{\text{Max}} \simeq \frac{kT_e}{q} \frac{\mathscr{I} R}{2D_a n_{eo}} \tag{37}$$

Supposons maintenant, comme dans le paragraphe précédent, une loi radiale des processus d'ionisation telle que :

$$\begin{cases} i(r) = 0 & \text{pour} \quad r < R_1 \\ i(r) = \dfrac{\mathscr{I} R^2}{R^2 - R_1^2} & \text{pour} \quad R > r \geqslant R_1 \end{cases} \tag{38}$$

On obtient par intégration de l'équation de conservation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_e}{\partial r} = -\dfrac{\mathscr{I}}{2D_a} \dfrac{R^2}{R^2 - R_1^2} \left(r - \dfrac{R_1^2}{r} \right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (R > r \geqslant R_1) \\ n_e = n_{eo} - \dfrac{\mathscr{I}}{2D_a} \dfrac{R^2}{R^2 - R_1^2} \left[\left(r^2 - R_1^2 \right) - R_1^2 \log \left(\dfrac{r}{R_1} \right)^2 \right] \end{cases} \tag{39}$$

$$\text{et} \begin{cases} \dfrac{\partial n_e}{\partial r} = 0 \\ \qquad\qquad (r < R_1) \\ n_e = n_{eo} \end{cases} \tag{40}$$

L'analyse de l'équation (39) montre que le gradient de densité est, là encore, maximum pour $r = R$. Il y vaut :

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial r} \right|_R = -\frac{\mathscr{I}}{2D_a} R \tag{41}$$

soit, exactement le même que dans le cas $i(r) = \mathscr{I}$.

Nous prenons donc :

$$\left| X_r \right|_{Max} \simeq \frac{kT_e}{q} \frac{\mathscr{I} R}{2D_a n_{eo}} \tag{42}$$

comme champ électrique radial maximum dans la C. P. I.

APPENDICE II

ÉCOULEMENT D'UN GAZ DANS UN CONDUIT CYLINDRIQUE EN REGIME INTERMÉDIAIRE

Le débit de gaz Q_c s'obtient, en fonction des pressions P_A et P_B dans deux points d'un conduit cylindrique, à partir de l'équation de Poiseuille corrigée pour le régime intermédiaire d'écoulement [28]

$$\gamma\, Q_c(P_o, T_o) = \frac{\pi\, T_o}{16\eta\, T_m\, P_o}\, R^4\, \frac{P_A^2 - P_B^2}{x_A - x_B} \tag{1}$$

avec :

$$\gamma = \frac{1}{1 + 6{,}8\; Z\; \dfrac{\lambda_o}{R}} \tag{2}$$

γ est appelé : facteur de Knudsen.

Z est une fonction qui dépend faiblement de λ_o et de R, variant entre 0,81 et 1 ; nous prendrons dans la suite $Z = 0{,}9$. Q_c est le débit de gaz ramené aux conditions normales de température et de pression $(T_o,\ P_o)$; η, la viscosité dynamique du gaz ; T_m la température moyenne du gaz ; λ_o le libre parcours moyen des molécules de gaz, à la pression moyenne $P_m = \dfrac{P_A + P_B}{2}$ dans le tube.

On peut donner une forme plus commode au facteur correctif de Knudsen, en faisant intervenir la section efficace de collision élastique entre atomes, σ ; on aura alors :

$$\gamma = \frac{1}{1 + 6{,}8\; Z\; \dfrac{k\, T_m}{\sigma\, R\, P_m}} \tag{3}$$

et l'équation (1) devient :

$$R^4 \frac{P_A^2 - P_B^2}{x_A - x_B} + 2\,B\,R^3 \frac{P_A - P_B}{x_A - x_B} - C\,Q_c = 0 \qquad (4)$$

$$B = \frac{6{,}8\,Z\,k\,T_m}{\sigma} \qquad (5)$$

avec :

$$C = \frac{16\,\eta\,P_o\,T_m}{\pi\,T_o} \qquad (6)$$

L'équation (4) contient un terme d'écoulement en régime visqueux (conductance proportionnelle à $R^4 P_m$) et un terme de régime moléculaire (conductance proportionnelle à R^3).

En posant $x_B = O$ (extremité de la cathode) et en connaissant expérimentalement la pression à ce point (voisine de la pression P_E dans l'enceinte), on est en mesure de calculer la répartition longitudinale de la pression $P(x)$ si l'on connait la température moyenne T_m du gaz à l'intérieur du tube. On obtient, après quelques lignes de calcul :

$$P(x) = \frac{B}{R}\left\{\left[\frac{C}{B^2}\frac{x\,Q_c}{R^2} + \left(\frac{P_E}{B}\,R + 1\right)^2\right]^{1/2} - 1\right\} \qquad (7)$$

Étant donné que c'est l'expression de la densité des neutres que l'on cherche à obtenir, nous allons faire apparaître le terme $\frac{P}{k\,T_m}$ et en même temps, faire $\frac{C}{B^2} = a$. On aura :

$$\frac{P(x)}{k\,T_m} = \frac{b(T_m)}{R}\left\{\left[a(T_m)\frac{x\,Q_c}{R^2} + \left(\frac{P_E}{k\,T_m\,b(T_m)} + 1\right)^2\right]^{1/2} - 1\right\} \qquad (8)$$

$$b(T_m) = \frac{6{,}8\,Z}{\sigma(T)} \qquad (9)$$

$$a(T_m) = \frac{0{,}11\,P_o}{Z^2\,T_o\,k^2}\,\frac{\eta(T_m)\,.\,\sigma^2(T_m)}{T_m} \qquad (10)$$

Les dépendances de η et σ en fonction de la température sont connues théoriquement. On a ainsi [24].

$$\sigma = \pi\, d_o^{\,2}\, \sigma^*(T_m) \quad (\text{en } 10^{-16}\,\text{cm}^2)$$

$$\eta = 2{,}67 \times 10^{-5}\, \frac{\sqrt{M\, T_m}}{d_o^{\,2}\, \Omega^*(T_m)} \quad (\text{en g/cm s}) \tag{12}$$

avec : d_o : diamètre des molécules en Å (3,41 pour l'Argon).
σ^* : correction de température au modèle des sphères rigides.
M : masse moléculaire.
Ω^* : intégrale de collision pour la viscosité.

Les valeurs de σ^* et de Ω^* sont tabulées en fonction de la température.

En substituant les grandeurs par leurs valeurs on aura :

$$a(T_m) = 5{,}1\, \frac{(\sigma^*)^2}{\Omega^*\, T_m^{\,1/2}} \quad (CGS) \tag{13}$$

$$b(T_m) = 0{,}167 \,.\, 10^{16} \,.\, \frac{1}{\sigma^*} \quad (CGS) \tag{14}$$

On obtient, en fonction de la température T_m, les valeurs présentées dans le Tableau A.

T_m (^oK)	250	500	1000	1500	2000	2500	3000
σ^*	1,5	1	0,85	0,81	0,77	0,75	0,73
Ω^*	1,173	0,97	0,85	0,81	0,77	0,74	0,72
a ($s\,\text{cm}^{-2}$)	0,62	0,42	0,138	0,105	0,087	0,076	0,067
b ($10^{16}\,\text{cm}^{-2}$)	0,111	0,167	0,197	0,210	0,217	0,224	0,230

Tableau A — Valeurs de σ^*, Ω^*, a et b en fonction de la température T_m

Les valeurs de a et b sont présentées dans la Figure 13, dans le texte principal.

APPENDICE III

ÉCHAUFFEMENT DU GAZ PAR LA PAROI CATHODIQUE

Soit L la longueur de la partie du canal précédant la C. P. I. ($L = L_c - x_o$; cf. Figure A-2), dont la température varie entre $T_{p_1} = 800^o\ K$ et $T_{p_2} \backsim 2500^o\ K$. Le gaz est introduit par la section 1 à la température ambiante ($T_1 \backsim 300^o\ K$) avec un débit massique q_c (kg/h.) On cherche la température T_2 du gaz dans la section 2 et la puissance transférée ΔW_{pg}.

Prenons d'abord le cas plus simple où la paroi serait à une température uniforme (que nous faisons coincider avec la température moyenne $\overline{T_p}$).

Les courbes de la Fig. A-3 d'après Mac Adam [22] permettent d'obtenir, en fonction de la variable $X = \dfrac{q_c\, C_p}{\lambda L}$, les deux grandeurs :

$$Y = \frac{T_2 - T_1}{T_p - T_1} \quad \text{et} \quad Z = \frac{2\ h_a\ R}{\lambda} \tag{1}$$

avec : h_a = coefficient de transfert de chaleur (kcal/h m^2°C) pour un écart moyen de température (gaz-paroi) $T_a - T_p$.

λ = conductibilité thermique du gaz (kcal/h m°C).

C_p = chaleur spécifique du gaz à pression constante (kcal/ /kg°C).

L = longueur de la section (m).

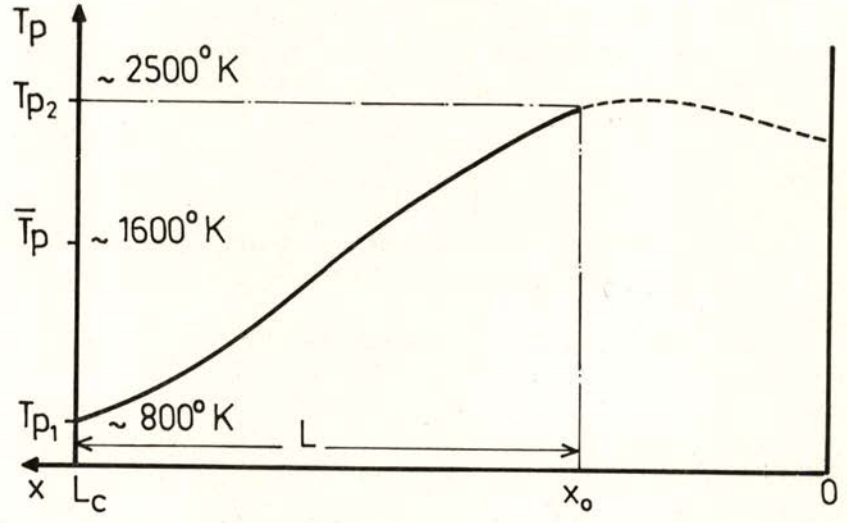
Dans ces courbes il est considéré, en plus du cas d'un profil parabolique des vitesses du gaz (qui correspond à égalité de température $T_p = T_g$ entre le gaz et la paroi), le cas du profil constant, qui correspond à un fort gradient radial de température du gaz ($T_p > T_g$).

Dans notre cas, pour les valeurs :

$T_p = 1500^o\ K.$
$R = 0{,}3$ cm
$\lambda = (1500^o\ K) = 0{,}046$ kcal/m h °C [24]
$C_p = 0{,}125$ kcal/kg °C [23]

on obtient :

$$X = 2{,}7\ \frac{Q_c}{L'}\ (Q_c \text{ débit en } cm^3s^{-1};\ L' \text{ en cm}) \qquad (2)$$



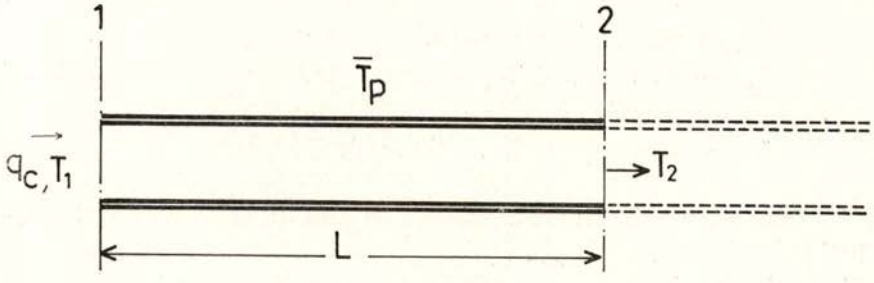


Fig. A-2 — Zone qui précède la C. P. I. : étude de la conduction paroi-gaz

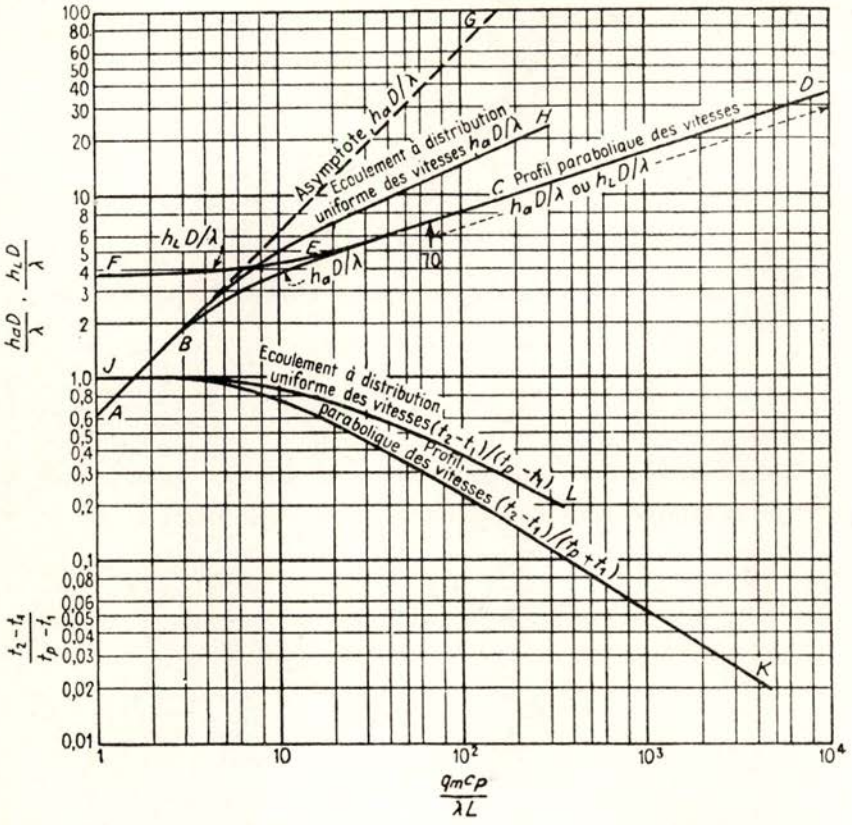


Fig. A-3 — Courbes universelles pour le calcul de l'échauffement d'un gaz traversant un conduit cylindrique, d'après Mac Adam [22]

En se reportant à la courbe Y (X) de la Figure A-3 on constate que $T_2 \simeq T_p$ si $X \leqslant 8$. Donc la longueur $L_{th} = \dfrac{Q_c}{3}$ (L_{th} en cm) peut être considérée comme une «longueur d'équilibre thermique» nécessaire pour parfaire l'équilibre entre le gaz et la paroi. Même pour un débit très fort ($Q_c = 3$ cm^3/s a été le plus grand débit pour nous utilisé), cette longueur n'est que 1 cm et décroit linéairement avec le débit.

Donc, dans la généralité des cas, le gaz se met rapidemant à la température de la paroi. Dans ces conditions nous sommes concernés avec la partie droite de la courbe $Z(X)$ de la Fig. A-3, qui a pour équation :

$$\frac{2\,h_a\,R}{\lambda} = \frac{2}{\pi}\,\frac{q_c\,C_p}{\lambda\,L} \qquad (3)$$

et on a, sucessivement :

$$h_a = \frac{1}{\pi} \frac{q_c C_p}{L R} \tag{4}$$

$$T_a = \frac{\overline{T}_p + T_1}{2} \tag{5}$$

Il en résulte que la puissance échangée entre la paroi et le gaz, W_{pg} s'obtient à partir de :

$$\Delta W_{pg} = q_c C_p (\overline{T}_p - T_1) \tag{6}$$

L'expression (6) traduit simplement le fait que tout le gaz est porté de la température T_1 à la température de la paroi $\overline{T}_p$.

APPENDICE IV

TEMPS DE DÉPLACEMENT DANS UNE TRANCHE ET DURÉE DE VIE DES ÉLECTRONS CONTROLÉS PAR MOBILITÉ

Le temps pris pour un électron du groupe k pour parcourir la distance Δx, entraîné par le champ électrique, vaut :

$$t_\mu(k) = \frac{\Delta x}{\mu_e(k)\, X} = \frac{\Delta x}{X} \frac{m_e}{q_e} n_n \sigma_{en} w_e \qquad (1)$$

Pour un champ électrique de référence $X = 5\ V/\text{cm}$ (auquel correspond une longueur $\Delta x = 0{,}8$ cm) et pour une densité des neutres variant entre 10^{15} et 10^{16} cm^{-3}, on obtient, pour les électrons des groupes 1 à 6 (Tableau B) :

t_μ (*ns*) / n_n (cm^{-3})	t_μ (1)	t_μ (2)	t_μ (3)	t_μ (4)	t_μ (5)	t_μ (6)
10^{15}	21	50	63	51	50	50
10^{16}	210	500	630	510	500	500

Tableau B : Temps de déplacement por mobilité, des électrons des groupes d'énergie 1 à 6

La durée de vie des électrons des groupes 1 à 6 vaut, respectivement :

$$t_1 = t_{10} = \frac{1}{n_m \, \sigma_{10} \, w_{e_1}}$$

$$t_2 = t_{21} = \frac{1}{n_m \, \sigma_{21} \, w_{e_2}}$$

$$t_3 \simeq \frac{1}{n_n \, \sigma_{30} \, w_{e_3}} \qquad (2)$$

$$t_4 \simeq \frac{1}{n_n \, (\sigma_{40} + \sigma_{41}) \, w_{e_4}}$$

$$t_5 \simeq \frac{1}{n_n \, (\sigma_{51} + \sigma_{52}) \, w_{e_5}}$$

$$t_6 \simeq \frac{1}{n_n \, (\sigma_{62} + \sigma_{63}) \, w_{e_6}}$$

soit, pour $n_m = 10^{14}$ cm^{-3}, $n_n = 10_{15}$ et 10_{16} cm^{-3} les valeurs données dans le tableau suivant :

t (ns) / (n_n cm^{-3})	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
10^{15}	2 550	750	87	16	11	9
10^{16}	2 550	750	8,7	1,6	1,1	0,9

Tableau C : Durée de vie des électrons des groupes d'énergie 1 à 6 (changement de groupe par collision inélastique sur les particules neutres)

APPENDICE V

CALCUL DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION SPATIALE DES ÉLECTRONS ÉMIS DANS UNE TRANCHE, AU BOUT DE N COLLISIONS ÉLASTIQUES SUR LES NEUTRES

Considérons dans une géométrie unidimensionnelle, un certain nombre d'électrons injectés à l'abscisse $x = 0$, qui effectuent des déplacements de sens aléatoire dont le libre parcours moyen est λ. Le pourcentage de particules qui, au bout de N déplacements se trouvent entre les abscisses x et $x+dx$, est donné par une distribution Maxwellienne [36] :

$$f(x,N)\ dx = \frac{dx}{(2\pi N\lambda^2)^{1/2}}\ \exp\ (-x^2/2N\lambda^2) \tag{1}$$

Cette fonction est normalisée à l'unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,N)\ dx = 1 \tag{2}$$

et le déplacement moyen quadratique $<x^2>^{1/2}$ est, suivant le résultat connu :

$$<x^2>^{1/2} = \sqrt{N}\lambda \tag{3}$$

Dans le cas qui nous intéresse, les électrons ne sont pas émis au même point, mais sur toute la longuer Δx de la tranche considérée. D'après nos hypothèses (cf. paragraphe 6.1) l'émission est uniforme à l'intérieur de cette tranche $\left(\psi(x_o) = C \text{ pour } |x| \leq \frac{\Delta x}{2}\right)$. La nou-

velle fonction de distribution $F(x,N)$ s'obtient à partir de l'intégrale de convolution :

$$F(x,N) = \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} f(x - x_o, N)\, \psi(x_o)\, dx_o \tag{4}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} B\, e^{-\frac{B^2}{2}(x-x_o)^2}\, dx_o$$

avec $$B = \frac{1}{\sqrt{N}\lambda} \tag{5}$$

En effectuant le changement de variable $y = B(x\text{-}x_o)$ on obtient :

$$F(x, N) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{B\left(x-\frac{\Delta\epsilon}{2}\right)}^{B\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)} e^{-y^2/2}\, dy \tag{6}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_o^{B\left(\frac{\Delta x}{2}-x\right)} e^{-y^2/2}\, dy + \int_o^{B\left(\frac{\Delta x}{2}+x\right)} e^{-y^2/2}\, dy \right\}$$

Les intégrales du type :

$$G(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_o^X e^{-y^2/2}\, dy$$

(intégrales de Galton) sont susceptibles d'une description approximative [35]. Ainsi :

$$G(X) = 0{,}5 \quad \text{pour} \quad X \geqslant 2{,}5 \tag{7}$$

$$G(X) = (K_2 - K_1 X) \quad \text{pour} \quad 2{,}5 > X \geqslant 0 \tag{8}$$

avec $K_1 = 0{,}09055$
$K_2 = 0{,}4264$

La valeur asymptotique (7) et l'approximation quadratique (8) s'écartent de moins de 2 % de la valeur exacte de la fonction (dans leurs domaines de validité). La fonction:

$$\frac{F(x,N)}{C} = G\left(B\frac{\Delta x}{2} - Bx\right) + G\left(B\frac{\Delta x}{2} + Bx\right) \tag{9}$$

a été calculée à partir de tables de $G(X)$ [35] ; les courbes de la Figure 21 dans le texte principal représentent cette fonction de la variable $\frac{2x}{\Delta x}$, pour plusieurs valeurs du paramètre $B\Delta x$.

Considérons maintenant la fonction:

$$\alpha = \frac{\int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} F(x,N)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,N)\,dx} \tag{10}$$

La condition de normalisation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,N)\,dx = 1 \tag{11}$$

détermine la valeur de la constante $C = \frac{1}{\Delta x}$.

Le calcul de α impose donc la commaissance de la fonction F à l'intérieur de l'intervalle $\left[-\frac{\Delta x}{2}, +\frac{\Delta x}{2}\right]$, pour chaque valeur du paramètre $B\Delta x$.

a) Dans le domaine $B\Delta x \leqslant 2{,}5$ et pour $|x| \leqslant \frac{\Delta x}{2}$ aucun des arguments des fonctions G (voir équation (9)) n'atteint la valeur 2,5 et

l'approximation quadratique de ces fonctions est acceptable. On aura, dans ce domaine ($B\Delta x \leqslant 2{,}5$):

$$\alpha = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \left[K_2 \, B \, \Delta x \left(1 - \frac{K_1}{K_2} \, B \, \frac{\Delta x}{2} \right) - 2 \, K_1 \, B^2 \, K \right] dx \tag{12}$$

$$= K_2 \, B \, \Delta x \, . \left(1 - \frac{2}{3} \, \frac{K_1}{K_2} \, B \, \Delta x \right)$$

b) Dans le domaine $B\,\Delta x > 2{,}5$ nous avons effectué une intégration graphique des courbes de la Figure 22, ayant obtenu les résultats présentés dans le Tableau D.

Tableau D — Valeurs de $\alpha\,(B\Delta x)$ obtenues par intégration graphique.

$B\,\Delta\,x$	2,5	3	4	5	10	20
α °/₀	68	73	79	84	92	97

Les valeurs de α en fonction de $B\,\Delta x$ sont représentées dans la Figure 23 dans le texte principal.

APPENDICE VI

SECTIONS EFFICACES DE L'ARGON

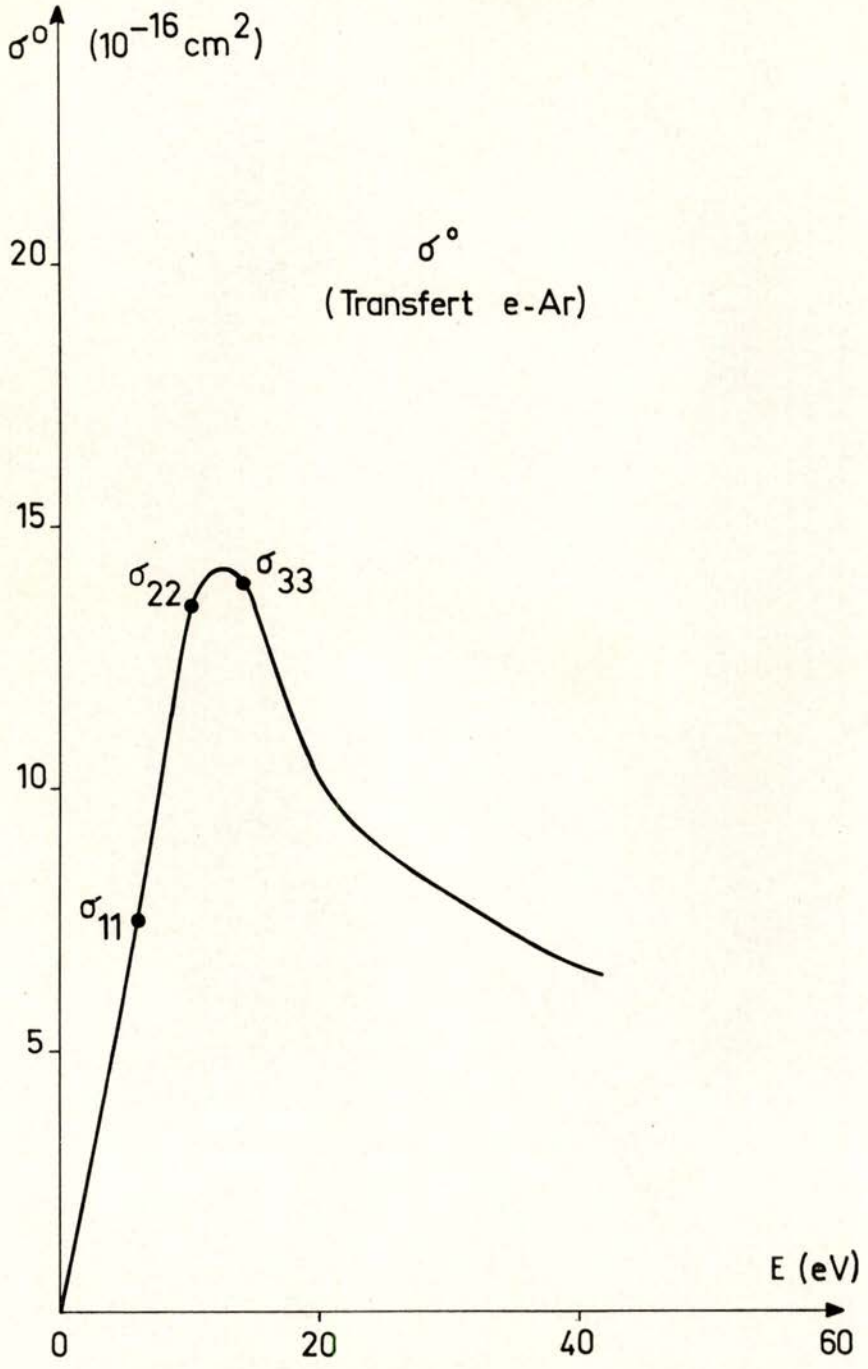


Fig. A-4 — Section efficace de transfert de quantité de mouvement pour les collisions élastiques électron-atome d'Argon [34]

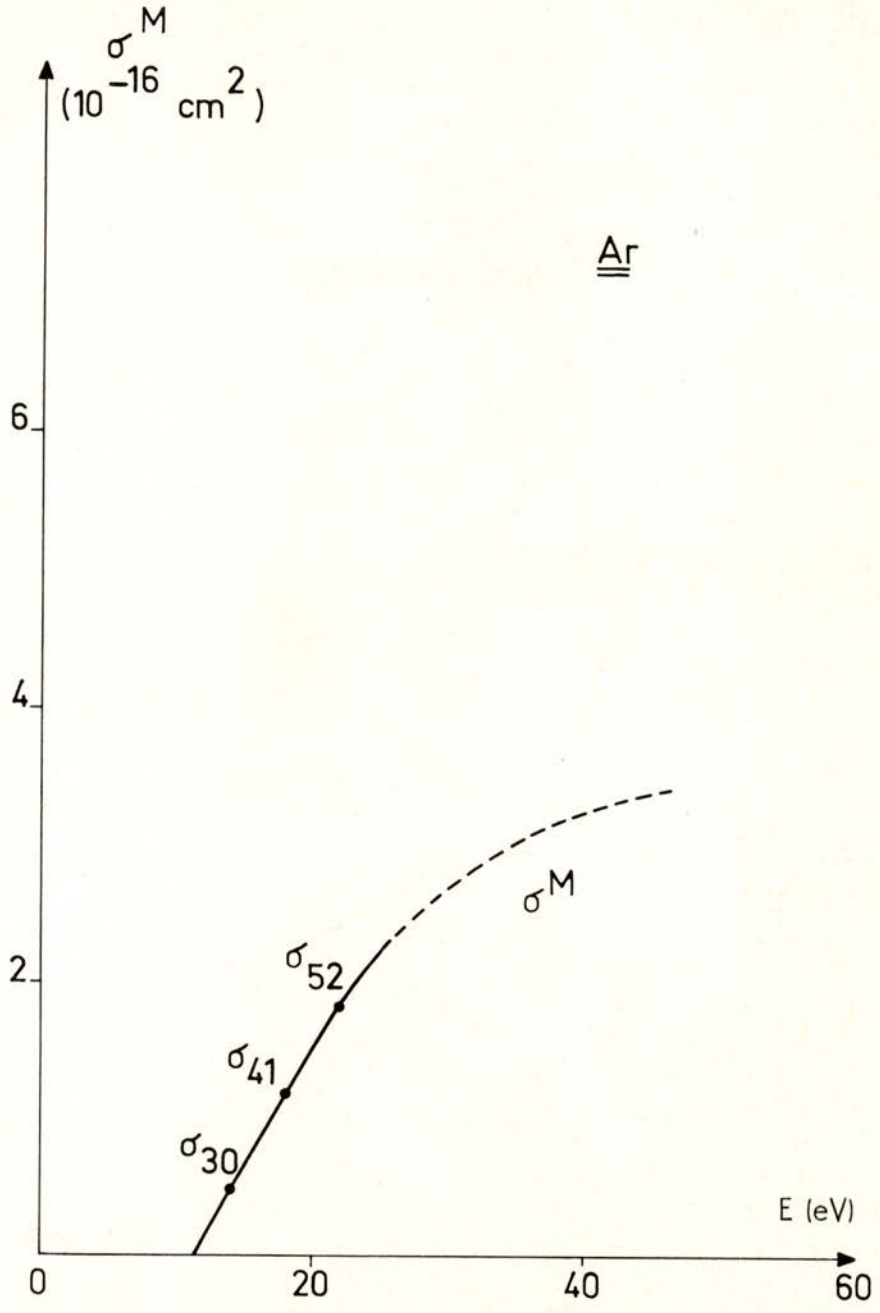


Fig. A-5 — Section efficace d'éxcitation des niveaux métastables de l'Argon [32]

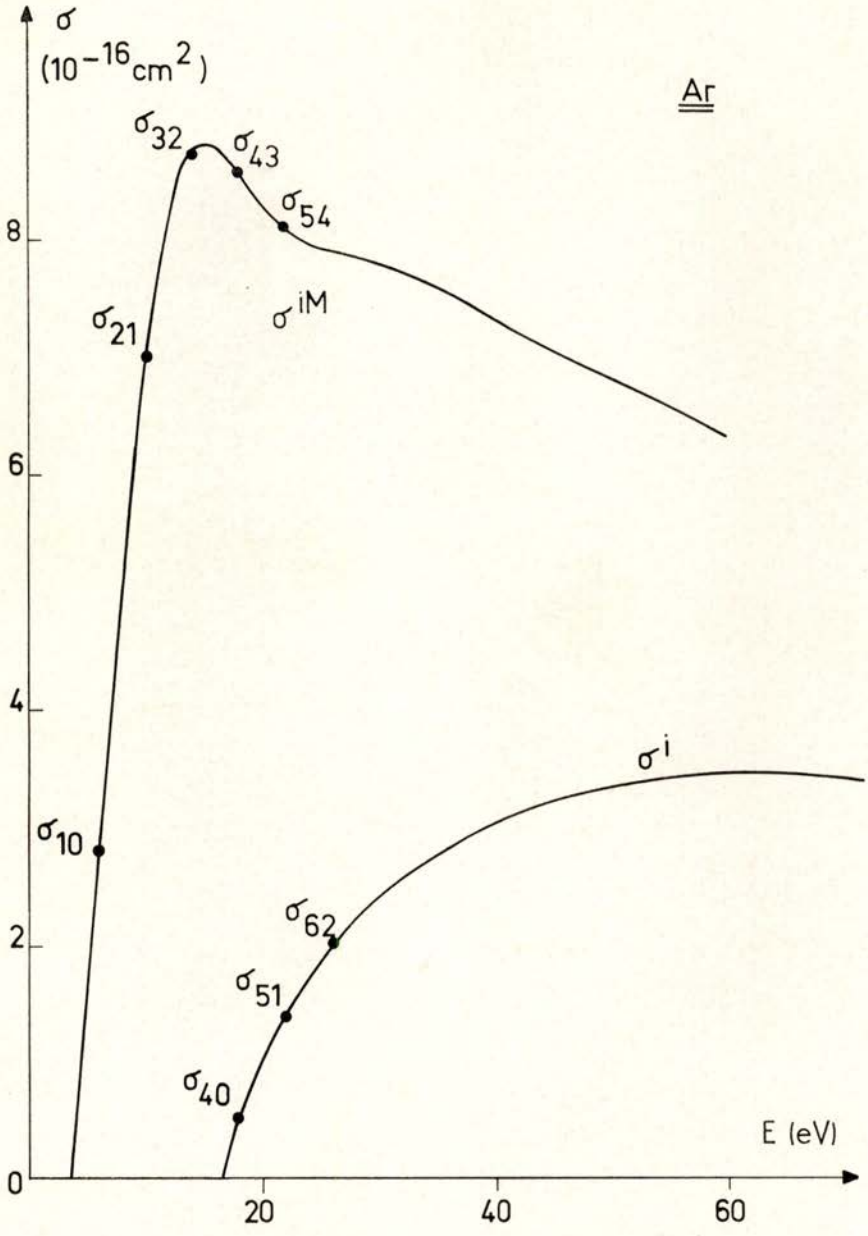


Fig. A-6 — Section efficace d'ionisation directe des atomes non excités et d'ionisation des métastables, par collision électronique [33]

BIBLIOGRAPHIE

[1] LUCE, J. S. — Intense gaseous discharges — *Proc.* 2nd *U. N. Conf. on PUAE 31* (1958).

[2] ROSE, D. J.; LIDSKY, L. M.; ROTHLEDER, S. D.; YOSHIKAWA, S.; MICHELSON, C.; MACKIN, R. J. — Highly ionised hollow cathode discharge — *J. Appl. Phys. 33* 8 (1962).

[3] DELCROIX, J. L.; MINOO, H.; TRINDADE, A. R. — Établissement d'une règle générale pour une décharge d'arc à cathode creuse — *J. de Phys. 29*, 605 (1968).

[4] DELCROIX, J. L.; MINOO, H.; TRINDADE, A. R. — Nouveau mode de fonctionnement d'une décharge d'arc à cathode creuse — *C. R. Acd. Sci.* 266 B, 76 (1968).

[5] DELCROIX, J. L.; MINOO, H.; TRINDADE, A. R. — Étude de décharges à cathode creuse à flux de gaz en régime d'arc — *Rev. Roumaine Phys.* — *13*, 401 (1968).

[6] MINOO, H.; TRINDADE, A. R. — Low-pressure hollow cathode arc discharge behavior in a magnetic field — *8th I. C. P. I. G.* 97, *Vienna* (1967).

[7] TRINDADE, A. R. — Étude de la colonne positive intérieure d'une décharge d'arc à cathode creuse à flux de gaz. — *Thèse 3ème Cycle, Orsay* (1968).

[8] MINOO, H.; — Etude de décharges à cathode creuse à flux de gaz en régime d'arc — *Thèse d'Etat, Orsay,* (1969).

[9] DELCROIX, J. L.; MINOO, H.; SZILI, Z.; TRINDADE, A. R.; — Retard entre l'impulsion du courant de la décharge et celle de la puissance d'un laser à argon ionisé — *C. R. Acd. Sci.* 270 (1970).

[10] MINOO, H.; TRINDADE, A. R. — Sélection de raies dans un laser à argon ionisé — (non publié).

[11] MINOO, H.; TRINDADE, A. R. — Réalization d'une installation pour la création de plasmes clames par échange de charge (non publié).

[12] MINOO, H.; TRINDADE, A. R. — Fonctionnement d'une décharge à cathode creuse à la pression atmosphérique (non publié).

[13] DELCROIX, J. L.; MINOO, H.; TRINDADE, A. R. — Plasma source using gas-fed multichannel hollow cathode arcs — *9th I. C. P. I. G. Bucarest* (1969).

[14] DELCROIX, J. L.; MINOO, H.; TRINDADE, A. R. — Gas fed multichannel hollow cathode arcs — *Rev. Sci. Inst.* 40, *12* (1969).

[15] MACKEOWN, S. S. — Bipolar space-charge movement — *Phys. Rev. 34* 611 (1929).

[16] LUBIN, M. D.; ROSE, D. J. — Internal gaseous electronics and emission mechanism of the hollow cathode discharge — *Bull. Am. Phys. Soc. 12* 694 (1967).

[17] LEONARD, S. L. — Electron and ion temperatures in steady-state Argon plasma in a magnetic field. — *9th I. C. P. I. G. Bucarest* (1969).

[18] CANO, R.; MATTIOLI, M.; ZANFAGNA, B. — Étude de la colonne de plasma dans un arc à électrodes creuses — *CEA R.* 2935 (1966).

[19] LANDAU, L.; LIFCHITZ — Fluid Mechanics — *Pergamon Press* (1960).

[20] DELCROIX, J. L. — Physique des plasmas II — *Dunod* (1966).

[21] MATHIEUSSENT, G. — Étude des cathodes creuses à fort débit de gaz (1969) (non publié).

[22] MAC ADAM, W. H. — Heat Transfer — *Mc Graw Hill, N. Y.* (1954).

[23] AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS HANDBOOK — *Mc Graw Hill N. Y.* (1963).

[24] HIRSCHFELDER, J.; CURTISS, C. F.; BIRD, R. B. — Molecular theory of gases and liquids — *J. Wiley, N. Y.* (1954).

[25] HAGSTRUM, H. D. — Auger ejection of electrons from Mo by noble gaz ions — *Phys. Rev. 104*, 3 (1956).

[26] DELCROIX, J. L. — Rayonnement des électrons libres dans un plasma *Semin. — A. D. E. R. P. Orsay* (1969).

[27] REFERENCE DATA FOR RADIO ENGINEERS — *Ed. ITT (N. Y.)* (1956).

[28] DUSHMAN, S. — Scientific foundations of vacuum technique — *J. Wiley* (1962).

[29] NUCLEAR ENGINEERING HANDBOOK — *Mc Graw Hill* (1956).

[30] HANDBOOK OF CHEMISTRY AND PHYSICS — *Ed. Chem. Rubber* (1964).

[31] HASTED, J. B. — Physics of atomic collisions — *Butt. London* (1964).

[32] BROWN, S. C. — Basic data of plasma physics — *J. Wiley N. Y.* (1959).

[33] VRIENS, L. — Calculations of absolute cross sections of *He, ... Hg** — *Phys. Lett.* — 8, *4* (1964).

[34] ENGLEHARDT, A. G.; PHELPS, A. V. — Transport coefficients and cross sections in argon and hydrogen-argon mixtures — *Phys. Rev.* 133, *2A* (1964).

[35] BOLL, M. — Tables numériques universelles — *Dunod Paris* (1957).

[36] CHANDRASEKAR, S. — Stochastic processes in physics and astronomy — *Rev. Mod. Phys.* (Jan. 1943).

Toute la correspondance concernant la rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA - 2 (Portugal)

Prix de l'abonnement:	250 escudos (US $8.50) par volume
Prix des volumes déjà parus:	300 escudos (US $10)
Prix du fascicule:	75 escudos (US $2.50)

Les membres de la «Sociedade Portuguesa de Química e Física» ont une réduction de 50 % sur les prix indiqués.

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Scientifiques et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu detaillé de tous les ouvrages soumis à la rédaction en deux exemplaires.

All mail concerning PORTUGALIAE PHYSICA to be addressed to:

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA - 2 (Portugal)

Subscription rates:	250 escudos (US $8.50) per volume
Price of past volumes:	300 escudos (US $10)
Price of copy:	75 escudos (US $2.50)

Members of the «Sociedade Portuguesa de Química e Física» may obtain *Portugaliae Physica* at a reduced price (50 %).

Universities, Physics Laboratories, Academies, Scientific Societies and Physics Publications are invited to receive this review in exchange for their publications.

PORTUGALIAE PHYSICA will give a detailed report of any book if two copies have been submitted.

IMPRIMARTE, S.A.R.L.

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 6
FASCÍCULO 3
1971

INSTITUTO DE ALTA CULTURA
CENTROS DE ESTUDOS DE FÍSICA DAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS

PORTUGALIAE PHYSICA

Fundadores: A. Cyrillo Soares, M. Telles Antunes, A. Marques da Silva, M. Valadares.

VOLUME 6 1971 FASCÍCULO 3

VOLUMES PUBLICADOS:

Vol. 1 — 1943-45 — 326 pp.

Vol. 2 — 1946-47 — 256 pp.

Vol. 3 — 1949-54 — 173 pp.

Vol. 4 — 1965-66 — 304 pp.

Vol. 5 — 1967-70 — 194 pp.

Redacção: Laboratório de Física da Faculdade de Ciências — Lisboa-2 (PORTUGAL)

Comissão de redacção:

J. Moreira de Araújo — Carlos Braga — Carlos Cacho — A. Pires de Carvalho — M. Abreu Faro — J. Gomes Ferreira — F. Bragança Gil — Manuel Laranjeira. Amaro Monteiro — J. Pinto Peixoto — J. da Providência — Lídia Salgueiro — J. de Almeida Santos — José Sarmento — António da Silveira — J. Veiga Simão.

ÍNDICE

(Table des matières)

Couplings to vector mesons in the relativistic quark model, by J. DIAS DE DEUS 163

Les largeurs de quelques niveaux atomiques et les rendements de fluorescence, par LÍDIA SALGUEIRO, MARIA TERESA RAMOS et J. G. FERREIRA 183

CDU 53 (469) (05)

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 6
FASCÍCULO 3
1971

COUPLINGS TO VECTOR MESONS IN THE RELATIVISTIC QUARK MODEL (*)

J. DIAS DE DEUS (**)
University College London
Department of Physics

ABSTRACT — Hadron couplings are evaluated using quark graphs and the BETHE-SALPETER formalism. Electromagnetic decays of vector mesons calculated in this way are shown to be consistent with the $\omega - \varphi$ current mixing model. A value $\theta = 33^{\circ}$ is predicted. Baryon couplings are discussed in the same formalism. When non-relativistic conditions are imposed the model reproduces the usual additivity results with corrections.

1 — INTRODUCTION

Our basic starting points are:

1) Mesons and Baryons are bound state poles in the BETHE-SALPETER (1) $\bar{Q}Q$ and QQQ amplitudes. Whenever q^2, q being the momentum in the $\bar{Q}Q$ or QQQ channel, is close to an on mass shell value the BETHE-SALPETER propagator is saturated by bound state contributions (2). This leads to Vector Meson Dominance and pole dominance of the divergence of the weak axial vector current at quark level (3).

(*) Received the 28th May 1971.
(**) Supported by a Calouste Gulbenkian Foundation Research Fellowship.

2) Interactions of hadrons take place via basic quark interactions. This assumption, whose validity is questionable [4], is essentially the one used in the non-relativistic quark-model. It is shown here that the BETHE-SALPETER formalism in general reproduces the non-relativistic quark model additivity results [5, 6, 7, 8]. The non relativistic quark model picture of one quark interacting in the presence of the others (spectators) is substituted by a quark triangle graph [9] related to the BETHE-SALPETER normalization equation [10].

Consistency between 1) and 2) was demanded in Ref. [3] to select convenient quark-quark-vector meson (QQV) and quark-quark-pseudoscalar meson (QQP) vertex functions. As an example of the required consistency we imposed, for instance, the condition that the electromagnetic coupling constant f_V of a vector meson determined, as in 1), by saturating the quark electromagnetic current with vector mesons should be compatible with the determination of f_V, as in 2), from quark-antiquark electromagnetic annihilation of the vector meson V. In such a way we arrived at the following vertex functions [3]:

QQP:

$$\Gamma_P(p,q) = W(p,q)\,\gamma^5\, G\left[R + \frac{\not{q}}{2M}\right] \tag{1}$$

QQV:

$$\Gamma_V^{\mu}(p,q) = W(p,q)\,\varepsilon_\alpha^{\mu}\, F\left[\frac{m_V}{2M}\gamma_\alpha - i R\,\sigma_{\alpha\nu}\frac{q^\nu}{m_V}\right] \tag{2}$$

where $m_P(m_V)$ is the meson mass and q its momentum; M, $p \pm q/2$ are the quark mass and momenta; G, R, F and R' are constants; ε_α^{μ} is the vector meson polarization, $q^\alpha \varepsilon_\alpha^{\mu} = 0$ when $q^2 = m_V^2$ and $\varepsilon_\alpha^{\mu}\,\varepsilon_\beta^{\mu} = q_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / m_V^2$; $W(p,q)$ is a form factor satisfying the quark on mass shell condition:

$$W(p,q) = 1 \quad \text{when} \quad \left(p + \frac{q}{2}\right)^2 = \left(p - \frac{q}{2}\right)^2 = M^2 \tag{3}$$

Both the QQP and QQV vertices include derivative and non derivative couplings, pseudovector and pseudoscalar couplings for the QQP interaction and DIRAC and PAULI like couplings for

QQV. The quantities G and R (F and R') can in principle be fixed by solving the BETHE-SALPETER and normalization equations. The vertex functions (1) and (2) have the properties of Llewellyn Smith's Model I [11] solution of the BETHE-SALPETER Equation.

General arguments based on the properties of Model I and the BETHE-SALPETER normalization condition, neglecting the potential term [11], lead to

$$T_r\left\{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\bar{\Gamma}(k-q)\frac{i}{\not k+\frac{\not q}{2}-M}\gamma^0\frac{i}{\not k+\frac{\not q}{2}-M}\cdot\right.\right. \tag{4}$$

$$\cdot\,\Gamma(k,-q)\frac{i}{\not k-\frac{\not q}{2}-M}-\bar{\Gamma}(k,-q)\frac{i}{\not k+\frac{\not q}{2}-M}\cdot$$

$$\left.\left.\cdot\,\Gamma(k,-q)\frac{i}{\not k-\frac{\not q}{2}-M}\gamma^0\frac{i}{\not k-\frac{\not q}{2}-M}\right]\right\}=4q^0$$

where Γ stands for Γ_P or Γ^{μ}_V, supply the relations [3]:

$$G=F \tag{5}$$

and

$$R=R' \tag{6}$$

The consistency of 1) and 2), as explained above, applied to the couplings to vector mesons further provide [3]:

$$(\Sigma g_i^V e_i) f_V = F\left(\frac{m_V}{2M}\right) \tag{7}$$

and

$$\Sigma g_i^V e_i K_i = \frac{FR'}{m_V}\frac{1}{f_V} \tag{8}$$

where e_i is the charge of quark Q_i ($i=p,n,\lambda$) in units of electron charge; g_i^V is the CLEBSCH-GORDON coefficient giving the $Q_i\bar{Q}_i$ contribution to the vector meson V and K_i is the anomalous magnetic moment of quark Q_i in units of the quark

mass. To relate the values of F and R' to known quantities we write (7) for the particular case of the ϱ meson:

$$F\left(\frac{m_\varrho}{2M}\right)=\frac{f_\varrho}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

and combine (8) with the non-relativistic quark model result of the equality of the magnetid moments of the quark and the proton, which we shall re-derive later, $K_P \simeq 2.79/2\, m_{\text{proton}}$, to obtain [3]:

$$R' \simeq \frac{m_\varrho}{2M} \tag{10}$$

We remark that in the formalism of the BETHE-SALPETER equation the free quark must have a large mass (experimentally it is contrained to $M \geq 5$ GeV) and this has the consequence that R' and R are small, of order (m_ϱ/M), and that the magnetic moment of the quark is mostly anomalous.

We do not discuss in the present paper couplings to pseudoscalar mesons. They are evaluated using the vertex function (1). As (1) does not show a dependence on the meson mass our results agree with exact SU(3) and the non relativistic quark model. The fact that from (10) and (6) R is negligible small justifies the use of a pure pseudovector coupling, as in non relativistic quark model [12], at the QQP vertex.

The vector meson mass factors present in the QQV vertex function (2) are effectivelly SU(3) breaking factors that will affect hadronic couplings to vector mesons.

In Sec. 2 we discuss the electromagnetic decay of vector mesons and show the parallelism of the quark model and current mixing model descriptions of $\omega - \varphi$ mixing. We predict for the mixing angle the value, $\theta \simeq 33°$. In Sec. 3 we use the BETHE-SALPETER formalism and the vertex function (2) to evaluate PPV and VVP coupling constants. In Sec. 4 the BETHE-SALPETER formalism for baryon couplings is developed. Corrections are introduced to the usual SU(6) non-relativistic quark model predictions of baryon magnetic moments.

2 — ELECTROMAGNETIC DECAY OF VECTOR MESONS AND THE FIRST WEINBERG SUM RULE

The constraint of Vector Meson Dominance to the electromagnetic interaction of quarks in the limit $q^2 \to 0$ gives, from (7),

$$f_\rho^{-1} : f_\varphi^{-1} : f_\omega^{-1} = \frac{1}{m_\rho} : \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}\, m_\varphi} : -\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\, m_\omega} \tag{11}$$

where θ is the $\omega - \varphi$ mixing angle. One notes that the first WEINBERG SUM RULE [13] applied to the isopin and hypercharge currents and saturated by the observed vector mesons [14,15],

$$\frac{m_\rho^2}{f_\rho^2} = 3\left[\frac{m_\varphi^2}{f_\varphi^2} + \frac{m_\omega^2}{f_\omega^2}\right] \tag{12}$$

is identically satisfied by the above relations (11). We will now exploit the SU(3) properties of the electromagnetic current and in this way we are able to rederive (12).

In the present model the breaking of SU(3) is related to the dynamics of the $Q\bar{Q}$ interaction in the BETHE-SALPETER equation and it appears explicitly in the mass factors of the QQV vertex functions. When we deal with free quarks we expect to find in SU(3) a good symmetry, for instance, quark mass breaking factors being negligible compared to the quark mass. The same applies to the electromagnetic current which is assumed bilinear in the quark and antiquark fields.

$$J^\mu = J_I^\mu + J_Y^\mu \tag{13}$$

where

$$J_I^\mu = \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}_P \gamma^\mu \psi_P - \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n\right) \tag{14}$$

is the isopin current, and

$$J_Y^\mu = \frac{1}{6}\left(\bar{\psi}_P \gamma^\mu \psi_P + \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n - 2\,\bar{\psi}_\lambda \gamma^\mu \psi_\lambda\right) \tag{15}$$

is the hypercharge current. J^μ is a U spin scalar and its matrix element for a transition from the vacuum to a U spin vector $\overline{Q}Q$ state must then vanish, i. e.:

$$<_I \overline{Q}Q|J^\mu|0> = \sqrt{3} <_Y \overline{Q}Q|J^\mu|0> \tag{16}$$

with

$$|\overline{Q}Q>_I \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[|\overline{p}p> - |\overline{n}n>]$$

and

$$|\overline{Q}Q>_Y \equiv \frac{1}{\sqrt{6}}[|\overline{p}p> + |\overline{n}n> - 2|\overline{\lambda}\lambda>].$$

We consider (16) in the limit $q^2 \to 0$ and recall, from (2) and (7) that

$$\Gamma^\mu_V(q^2 = 0) \sim m_V \tag{17}$$

$$f_V \sim m_V \tag{18}$$

Saturating (16) with the physical ϱ meson and an unphysical Y meson, isosinglet member of an SU(3) octet, we obtain, with (17) and (18)

$$\frac{m_\varrho}{f_\varrho} = \sqrt{3}\frac{m_Y}{f_Y} \tag{19}$$

The right hand side of (16) can also be saturated by the physical mesons φ and ω. Their quark content is related to $|\overline{Q}Q>_Y$ by the equation

$$|\overline{Q}Q>_Y = \cos\theta\,|\overline{Q}Q>_\varphi - \sin\theta\,|\overline{Q}Q>_\omega \tag{20}$$

where $\cos\theta$ and $\sin\theta$ are the usual $\omega - \varphi$ mixing coefficients. Eq. (16) then gives

$$\frac{m_\varrho}{f_\varrho} = \sqrt{3}\left[\frac{m_\varphi}{f_\varphi}\cos\theta - \frac{m_\omega}{f_\omega}\sin\theta\right]. \tag{21}$$

This equation combined with (11) reproduces (12).

One should notice that in this approximation of vector meson dominance Eqs. (19) and (21) could equally well be derived from

(16) taking the point of view of CURRENT-FIELD Identities ([16]), i. e., using the following operator relations between currents and fields:

$$J_I^\mu = \frac{m_\varrho^2}{f_\varrho} \varrho^\mu \tag{22}$$

$$J_Y^\mu = \frac{m_Y^2}{f_Y} Y^\mu = \frac{1}{f_Y} [m_\varphi^2 \cos\theta_Y \varphi^\mu - m_\omega^2 \operatorname{sen} \theta_Y \omega^\mu] \tag{23}$$

with

$$f_Y = f_\varphi \cos\theta_Y = -f_\omega \sin\theta_Y . \tag{24}$$

From (12) and (24) we have

$$\tan\theta = \frac{m_\omega}{m_\varphi} \tan\theta_Y \tag{25}$$

a relation which is typical of an ω—φ current mixing model ([16], [17]). In a mass mixing model the state mixing angle θ and the hypercharge current $\omega - \varphi$ decomposition angle θ_Y are the same.

From the point of view of the quark model $\omega - \varphi$ mixing results from the combination of singlet and octet SU(3) states while in the current mixing model it is related to the presence of off diagonal elements in the propagator matrix, an explicit reference to states never being required. However COLEMAN and SCHNITZER ([17]) have shown that it is in fact possible to use the language of states and mixing of states through an angle θ inside the framework of the current mixing model provided the octet and singlet unperturbed masses are equal. This is the normal assumption not only in the quark model but also in the current mixing model ([18]). Thus our quark model description of the current in the vector meson dominance approximation is equivalent to the current mixing model. To derive expressions for θ_Y or θ we combine (12), (19) and (24) to obtain

$$m_Y^2 = m_\varphi^2 \cos^2\theta_Y + m_\omega^2 \sin^2\theta_Y \tag{26}$$

or from (25),

$$\frac{1}{m_Y^2} = \frac{1}{m} \cos^2\theta + \frac{1}{m_\omega^2} \sin^2\theta \tag{27}$$

The knowledge of the $\bar{Q}Q$ binding potential should give via the BETHE-SALPETER equation a relation between the mass of the vector mesons and their quark content. As we do not know the

potential we make use of the well established GELL-MAN OKUBO mass formula relating masses of particles belonging to the same SU(3) representation. It gives for the mass of the isosinglet:

$$m_Y^2 = \frac{1}{3}(4\,m_k^2 - m_\varrho^2) \tag{28}$$

Using (28) in (26) and (27) we calculate

$$\theta_Y \simeq 40^\circ$$

and

$$\theta \simeq 33^\circ.$$

In any mixing model the angles θ and θ_Y are related quantities but experimentally they can be independently measured using for θ_Y

$$\frac{\Gamma(\omega \to e^+ e^-)}{\Gamma(\varphi \to e^+ e^-)} = \left(\frac{m_\omega}{m_\varphi}\right) \tan^2 \theta_Y \tag{29}$$

and for θ,

$$\frac{f^{(0)}_{kk\varphi}}{f_\varphi} = \frac{1}{2}\cos^2\theta. \tag{30}$$

Experiments give [19] from (29), $\theta_Y \simeq 41^\circ$ and from (30), $\theta \simeq 31^\circ$. In both cases the agreement is reasonable, thus giving support to relation (25) and the current msxing model. It is interesting to remark that Eq. (26) is true at the same time in the current and mass mixing models [15, 18]. However (27) is only satisfied with current mixing.

For our predicted $\theta = 33^\circ$ Eqs. (11) give:

$$f_\varrho^{-2} : f_\varphi^{-2} : f_\omega^{-2} = 9 : 1.19 : 0{,}85$$

to be compared with the experimental averages [20] $9 : 1{,}5 \pm 0.4 : 1{,}1 \pm 0.3$. The relations (11) can also be used to compute f_Y^2. From (24),

$$\frac{1}{f_Y^2} = \frac{1}{f_\varphi^2} + \frac{1}{f_\omega^2} \tag{31}$$

giving

$$\frac{f_Y^2}{4\pi} = 3\,\frac{1}{\left(\frac{m_\varrho}{m_\varphi}\right)^2 \cos^2\theta + \left(\frac{m_\varrho}{m_\omega}\right)^2 \sin^2\theta}\,\frac{f_\varrho^2}{4\pi}. \tag{32}$$

Only in the case of mass degeneracy does (32) reproduce the SU(3) limiting value $f_Y^2/_{4\pi} = 3 f_\varrho^2/_{4\pi}$; for the observed masses it imposes

$$\frac{f_Y^2}{4\pi} > 3 \frac{f_\varrho^2}{4\pi}. \tag{33}$$

Using in (31) the averaged data on f_ω^2 and f_φ^2 one obtains $f_Y^2/_{4\pi} \simeq 7.2 \pm 1.2$ which is consistent with (33) $[3 f_\varrho^2/_{4\pi} = 6.0]$ but does not exclude the SU(3) value. Introducing the value $\theta = 33°$ in (32) we obtain $f_Y^2/_{4\pi} = 8.8$.

3 — THREE-MESON VERTICES

In this section we rederive some results of Ref. [3] but concentrate here on the influence of the mixing angle θ. We start by considering PPV interactions and illustrate graphically in Fig. 1 the equation for the $\varrho^0 \pi^+ \pi^-$ vertex. Γ_π and Γ_ϱ are the

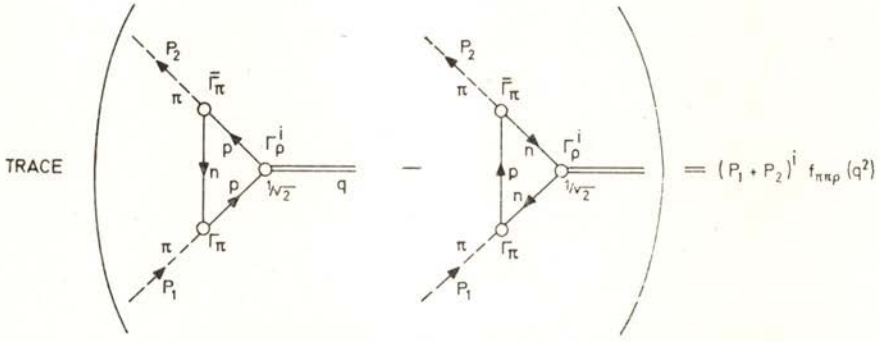


Fig. 1 — Quark graph calculation of the $\varrho \pi \pi$ coupling constant.

$QQ\pi$ and $QQ\varrho$ vertex functions as in (1) and (2). The only coupling in Γ_ϱ^i that contributes to the trace calculation is the DIRAC coupling $\gamma^i F m_\varrho / 2M$. If the form factor $W(p, q)$ in Γ_ϱ does not drastically modify the result of the integration, the equations of Fig. 1 in the limit $q^2 \to 0$, becomes the BETHE-SALPETER normalisation equation (4), apart a factor $f_{\varrho\pi\pi}^{(0)}/f_\varrho$, and provided F is given by Eq. (9). Thus

$$f_{\varrho\pi\pi}^{(0)} \simeq f_\varrho. \tag{34}$$

The equation of Fig. 1 may be expanded as

$$\frac{m_\varrho}{\sqrt{2}}\left[A+B\left(\frac{m_\pi}{M}\right)+C\left(\frac{m_\pi}{M}\right)^2+\cdots\right]- \tag{35}$$

$$-\frac{m_\varrho}{\sqrt{2}}\left[A-B\left(\frac{m_\pi}{M}\right)+C\left(\frac{m_\pi}{M}\right)^2+\cdots\right]=\left(\frac{m_\pi}{M}\right)f^{(0)}_{\varrho\pi\pi}.$$

With the approximation $(m_{\pi/M})^2, (m_{\varrho/M})^2 \ll 1$ both in the quark propagators and form factors, A, B and C become constants independent of the masses of the interacting mesons. A and C vanish because of the $q^2, (q\cdot p), p^2$ dependence of $W(p,q)$ imposed from general symmetry properties of the BETHE-SALPETER wave function for pseudoscalar and vector mesons [11]. With only the B term left in (35) the $f^{(0)}_{PPV}$ couplings are proportional to the vector meson mass and are independent of the pseudoscalar meson masses. For the φK^+K^- ($\varphi \bar{K}^0 K^0$) and ωK^+K^- vertices for instance we obtain

$$f_{KK\varphi}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m_\varphi}{m_\varrho}\right)f^{(0)}_{\varrho\pi\pi} \tag{36}$$

$$f_{KK\omega}=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m_\omega}{m_\varrho}\right)f^{(0)}_{\varrho\pi\pi} \tag{37}$$

In the aproximation $f^{(0)}_{PPV}\simeq f_{PPV}(m_V^2)$ and for $\theta = 33°$ we predict the ratios $\Gamma(V\to PP)/\Gamma(\varrho\to\pi\pi)$ shown in Table I.

TABLE I

Ratios $\Gamma(V\to PP)/\Gamma(\varrho\to\pi\pi)$

Decay	Theoretical	Experimental
$\phi - K^+K^-$	0.0230	0.0168 ± 0.0033
$\phi - K^{-0}K^0$	0.0148	0.0128 ± 0.0026

From Eqs. (36) and (37) we again find consistency with the current mixing model, for instance in the relation

$$\frac{f^{(0)}_{KK\varphi}}{f^{(0)}_{KK\omega}} = -\frac{m_\varphi}{m_\omega}\,\frac{1}{\tan\theta}. \tag{38}$$

In the present model the PVV couplings can be worked out in a similar way [3]. One obtains for the $f_{\varrho\omega\pi}$ coupling the relation

$$\frac{f^2_{\omega\varrho\pi}\, m^2_\varrho}{\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right]^2} \simeq 4 f^2_{\varrho\pi\pi} \tag{39}$$

which, for ideal mixing, reproduces the $SU(6)_w$ result [21]. The VVP couplings are proportional to $1/m^2_V$ and, when the experiment angle is used in the decays involving the φ meson, this factor helps to bring down the $\varphi \to \pi\gamma, \eta\gamma$ rates as seems to be experimentally required [22,23]. Our results on the VVP couplings are in approximate quantitative agreement with the ones of Ref. [22] and we refer to it for experimental comparison.

4 — COUPLINGS OF BARYONS

In previous work we have shown [3] how Llewellyn Smith's Model I combined with vector meson dominance and the GOLDBERGER-TREIMAN relation at quark level is able to reproduce the non-relativistic quark model results relating quark to hadron coupling constants. These relations were originally derived using the idea of additivity of the interactions of quarks inside the baryons in a kind of shell model of the baryon. We show now how additivity works for the baryons in the present model and how we are able to recover basic additivity results of the non-relativistic quark model.

If the baryon wave functions are solutions of the three quark channel homogeneous BETHE-SALPETER equation, they satisfy a BETHE-SALPETER normalisation equation. This is shown in Fig. 2, and the symbols are a generalisation of the notation of Ref. [11].

In particular $\ll$ represents the three-body wave function,

$$\chi\left(P;\frac{P}{3}+k_1,\frac{P}{3}+k_2,\frac{P}{3}+k_3\right)$$

with $P^2=M_B^2$ and $k_1+k_2+k_3=0$. Again we neglect the potential contributions to normalisation. Note that Eq. of Fig. 2 is a very formal one. We will disregard complications due to dis-

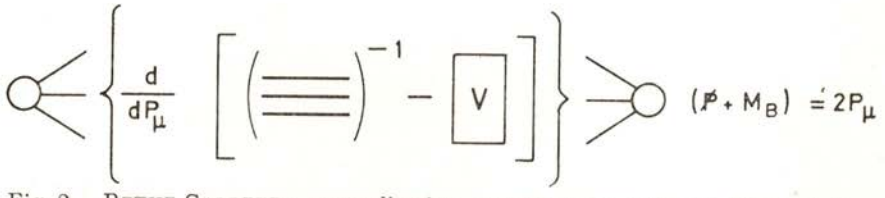


Fig. 2 — BETHE-SALPETER normalisation equation for baryons. The notation for Wave functions, propagators and generalised potentials is as in Ref. 3.

connected potential terms since we are neglecting the contribution of the potentials altogether in the normalisation.

The BBV couplings in the limit $q^2\to 0$, neglecting as before the QQV form factor, are described by the same integrals as the normalisation equation, but with different coupling constants. For the electric coupling of the nucleon we obtain the vector meson dominance result

$$g^{(0)}_{\varrho NN}\simeq\frac{1}{2}\,f_\varrho \tag{40}$$

and, in the ideal mixing limit

$$g^{(0)}_{\omega NN}\simeq 3\left(\frac{1}{2}\,f_\varrho\right). \tag{41}$$

This is just a reflection of the fact that vector dominance connects baryonic to electric charge for both nucleons and quarks. We also obtain, using (11), the relation for the saturation of the electromagnetic current by the ϱ and ω poles,

$$\frac{g^{(0)}_{\varrho PP}}{f_\varrho}+\frac{g^{(0)}_{\omega PP}}{f_\omega}=1. \tag{42}$$

As the normalisation condition is defined at zero momentum transfer, $q=0$, the only model independent statements one can make are on the electric couplings. Some further assumptions are required to evaluate the magnetic coupling, the weak axial vector decay coupling and the couplings to pseudoscalar mesons, whose matrix elements are linear in q.

In a picture of the baryons interacting through the quarks we will suppose that when one quark interacts the other two, »spectators», behave in an averaged sense as a single diquark object. Inside the baryons the quarks move with small space momenta so one expects only s wave interactions. Thus to have the octet and decuplet baryons in a *56* representation of SU(6) the interacting quarks must couple to appropriate combinations of SU(3) triplet (T) and sextet (S) diquarks, the triplet having spin-zero and the sextet spin 1[24]. These average spectator diquarks can then be described by a scalar field for the triplet and a pseudovector field for the sextet.

The introduction of these diquarks has the advantage of reducing the three-body problem to a two-body one. The coupling $BQQQ$ may then be written as a combination of the couplings BQT (scalar coupling) and BQS (pseudovector coupling). If $\hat{O}_B$ is a baryon level operator and $\hat{O}_Q$ the corresponding quark level one, the matrix element $<B|\hat{O}_B|B>$ is evaluated by the graphical equation of Fig. 3, where $C_i^{T(S)}$ are products of SU(3) and

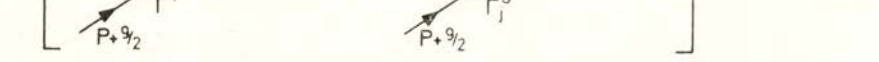


Fig. 3 — Quark graphs for the calculation of baryon couplings.

SU(6) coefficients, and, apart from form factors which are supposed to be the same by SU(6), Γ^T and Γ_j^S are given by:

$$\Gamma^T = 1 \quad \text{and} \quad \Gamma_j^S = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma^5 \gamma_j$$

the factor $1/\sqrt{3}$ in Γ_j^S being a spin weighting factor. The coefficients C^T and C^S are easily determined by writing the SU(6) baryon wave function in a quark-diquark model[24] for the proton, for instance, we have

$$P \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}\,S_1\, n + \sqrt{\frac{1}{3}}\,S_2\, p\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\,T_1\, p \qquad (43)$$

where S_1, S_2 are sextet and, T_1 a triplet non-interacting diquark, and n, p the interacting quark (*). Multiplying the square of these coefficients by 3, since each quark can interact, we get

$$\begin{aligned} C_n^T &= 0\ , \quad & C_n^S &= 1 \\ C_p^T &= \frac{3}{2}\ , \quad & C_p^S &= \frac{1}{2}\ . \end{aligned} \qquad (44)$$

For the neutron case p and n are interchanged in (43) and (44).

We evaluate the graphs of Fig. 3 in the Breit frame of the baryon, and neglect all contributions from P' in the numerator an from the timelike component of the S diquark. In the case of the magnetic moment calculations the quark operator will be

$$\hat{O}_i^{\mu} \equiv e_i[F_1(q^2)\,\gamma^{\mu} - i\,K_i\,F_2(q^2)\,\sigma^{\mu\nu}\,q_{\nu}] \qquad (45)$$

where $F_1(q^2=0) = F_2(q^2=0) = 1$. The terms linear in q give the magnetic moment and both, γ^j and $\sigma^{j\nu}$ contribute. The quark anomalous magnetic moment gives a contribution $K_i\sigma^{j\nu}q_{\nu}$ that multiplies the normalisation integral which we write schematically in the form

$$I_0 = \int H(P, P', q=0)\ (P_0' + M)^2\, d^4P' = 1 \qquad (46)$$

where form factors and denominators have been absorbed in $H(P, P', q)$ and $(P_0' + M)^2$ comes from the interacting quark propagator numerators. The electric coupling γ^j gives two contributions, one coming from the q term in the quark propagators

---

(*) $S_1 \equiv [pp]$, $S_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[pn + np]$, $T_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[pn - np]$.

of the form $\frac{1}{2M}\sigma^{j\nu}q^{\nu}$ which contains as a factor the integral

$$I_1 = \int H(P, P', q=0)\,(P_0' + M)\,2M\,d^4P' \tag{47}$$

and another form the q dependence of the nucleon spinors of the form $\frac{1}{2M_N}\sigma^{j\nu}q^{\nu}$ with a factor

$$I_2 = \int H(P, P', q=0)\,(P_0'^2 - M^2)\,d^4P' \tag{48}$$

From (46), (47) and (48) we have

$$I_0 = I_1 + I_2 = 1\,. \tag{49}$$

Going further into a non-relativistic situation we assume now that the average value of $P_0'^2$ in I_2 equals that of M^2, which means that the interacting quark acts effectively as if on its mass shell. This assumption is consistent with using in (45) only the on mass shell couplings. Neglecting integrals in P' and equating integrals in $P_0'^2$ to integrals in M^2 we reproduce the conditions for a non-relativistic model with quarks essentially at rest and static interactions. Eq. (49) then gives

$$I_2 = 0 \qquad \text{and} \qquad I_0 = I_1 = 1\,.$$

The equation of Fig. 3 gives then the non-relativistic SU(6) quark model results for the magnetic moments, in the form,

$$\sum_{\nu=n,p,\lambda}\left\{-\frac{1}{3}\sum_S C_\nu^S + \sum_T C_\nu^T\right\} e_\nu \mu_\nu = e\,\mu_B \tag{50}$$

where the coefficients $-\frac{1}{3}$ and 1 arise from the commutation of the Γ_S^j and γ^i or $\sigma^{i\nu}$. We note that contributions from the integral I_2 or from timelike diquark components would have spoiled the additivity rule expressed by (50). In particular for the proton we have,

$$\mu_{\text{proton}} \simeq \frac{1}{2M} + K_p\,. \tag{51}$$

The baryon axial vector weak couplings and pseudovector couplings to pseudoscalar mesons are similar to the magnetic couplings and the additivity results are derived in the same way.

In the present model the magnetic moment of the n and λ quark differ from that of the p quark. From (8) and for angles θ close to the ideal mixing angle $\theta_i \simeq 35°$ such that $\cos(\theta - \theta_i) \simeq 1$ and $\sin(\theta - \theta_i) \simeq 0$, we derive

$$K_n = K_p\,[1 + \beta] \tag{52}$$

and

$$K_\lambda = K_p\,[1 - \alpha] \tag{53}$$

where

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{3}\sin\theta\left(\frac{m_\rho}{m_\omega}\right)^2}{1 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\left(\frac{m^2}{m_\omega}\right)^2} \tag{54}$$

and

$$\alpha = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\left(\frac{m_\rho}{m_\omega}\right)^2 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{m_\rho}{m_\varphi}\right)^2\cos\theta}{1 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\left(\frac{m_\rho}{m_\omega}\right)^2}\,. \tag{55}$$

For $\theta = 33°$ we find $\alpha = 0.40$ and $\beta = 0.07$. The factors α and β provide corrections to the usual non-relativistic calculations of magnetic moments. In the limit of quarks with only anomalous magnetic moment the effect of the corrections α and β is shown in Table II (Experimental data from Ref. [25]). In all cases the corrections act in the right direction and strongly reduce the magnetic moments of the Λ and Ω.

In this model other corrections could equally well have been considered, such as violations of SU(6) in the wave functions and contributions from I_2 integrals, and we have no a priori reason to neglect them compared to the α and β corrections.

TABLE II

Magnetic Moments of Baryons ($\mu_{\text{proton}} = 2.792$)

Baryon	Theoretical				Experimental
	No Correction $K_\lambda = K_n = K_p$		Correction α and β		
	μ/μ_{proton}	μ	μ/μ_{proton}	μ	
N	$-2/3$	-1.86	$-2/3\left(\dfrac{1+\frac{2}{3}\beta}{1+\frac{1}{9}\beta}\right)$	-1.93	-1.913
Λ	$-1/3$	-0.93	$-1/3\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\frac{1}{9}\beta}\right)$	-0.57	-0.73 ± 0.16
Σ^+	1	2.793	$\dfrac{1-\frac{1}{9}\alpha}{1+\frac{1}{9}\beta}$	2.66	2.5 ± 0.5
Ω	-1	-2.793	$-\dfrac{1-\alpha}{1+\frac{1}{9}\beta}$	-1.71	?

5 — CONCLUSIONS

In this paper we extended the work of Ref. [3] in two directions to include:

1) A discussion of the relation between the relativistic quark model treatment of the electromagnetic interactions in the region $q^2 \approx 0$ and the approach from CURRENT-FIELD Identities with particular emphasis on the problem of $\omega - \phi$ mixing. Our model agrees with the current mixing model, and the predicted value for the mixing angle $\theta \approx 33°$ agrees with experiment. This angle was used to evaluate meson coupling constants and baryon magnetic moments.

2) The development of the BETHE-SALPETER formalism to calculate baryon couplings. As expected in a three body problem we find a complicated picture in comparison to the naive quark model additivity. Our formulae contain too many unknown parameters to have, in general, a predictive power. However, when the conditions for a mon-relativistic situation are introduced, our formalism reproduces in that limit the generally successful results of the non-relativistic quark model.

ACKNOLEDGEMENTS

It is a pleasure to thank Professor L. CASTILLEJO for encouragement and advice. I. should also like to thank the Calouste Gulbenkian Foundation for a Research Fellowship.

REFERENCES

(1) H. A. BETHE and E. E. SALPETER, *Phys. Rev.* **84**, 1232 (1951).
(2) T. KITAZOE and T. TESHIMA, *Nuovo Cimento* **57 A**, 498 (1968).
(3) J. DIAS DE DEUS, *Consequences of relativistic quark models for the interactions of hadrons* (1970), to be published in Physical Review.
(4) E. J. SQUIRES and P. J. S. WATSON, *Ann. Phys.* (N. Y.) **41**, 409 (1967).
(5) G. MORPURGO, *Physics* **2**, 95 (1965).
(6) R. H. DALITZ, *Quark models for the elementary particles,* in High Energy Physics, Gordon an Breach Science Publishers (1965).
(7) R. VAN ROYEN and V. F. WEISSKOPF, *Nuovo Cimento* **50**, 617 (1967).
(8) J. J. J. KOKKEDEE, *The Quark Model*, W. A. Benjamin Inc. (1969).
(9) T. GUDEHUS, *Phys. Rev.* **184**, 1788 (1969).
(10) See, for instance,
D. LURIE, A. J. MACFARLANE and Y. TAKAHASHI, *Phys. Rev.* **140 B** 1092 (1965).
(11) C. H. LLEWELLYN SMITH, *Ann. Phys.* (N. Y.) **53**, 521 (1969).
(12) C. BECCHI and G. MORPURGO, *Phys. Rev.* **149**, 1284 (1966).
(13) S. WEINBERG, *Phys. Rev. Letts.* **18**, 507 (1967).
(14) J. J. SAKURAI, *Phys. Rev. Letts.* **19**, 803 (1967.
(15) T. DAS, V. S. MATHUR and S. OKUBO, *Phys. Rev. Letts.* **19**, 470 (1967).
(16) N. KROLL, T. D. LEE and B. ZUMINO, *Phys. Rev.* **157**, 1376 (1967).
(17) S. COLEMAN and H. J. SCHNITZER, *Phys. Rev.* **134** B, 863 (1964).
(18) R. OAKES and J. J. SAKURAI, *Phys. Rev. Let.* **19**, 1266 (1967).
(19) J. J. SAKURAI, *Vector-meson dominance — Present Status and Future Prospects*, Proceedings of 4 th International Symposium on electron and photon interactions at high energies, Liverpool (1969).

(20) E. LOHRMAN, *Electromagnetic interactions and photoproduction*, Proceedings of the Lund International Conference on Elementary Particles (1969).
(21) B. SAKITA and K. C. WALI, *Phys. Rev.* **139** B, 1355 (1965).
(22) L. H. CHAN, L. CLAVELLI and R. TORGERSON, *Phys. Rev.* **185**, 1754 (1969).
(23) E. CREMER, *Nuclear Physics* B **14**, 52 (1969).
D. F. GREENBERG, *Carnegie Mellon University*, Preprint (1970).
(24) J. CARROL, D. B. LICHTENBERG and J. FRANKLIN, *Phys. Rev.* **174**, 1681 (1968).
(25) D. FLAMM, HEP VII/August 1969.

LES LARGEURS DE QUELQUES NIVEAUX ATOMIQUES ET LES RENDEMENTS DE FLUORESCENCE (*)

LÍDIA SALGUEIRO (**), MARIA TERESA RAMOS (**),
J. G. FERREIRA (**)

RÉSUMÉ — On calcule des valeurs concernant la variation, avec le numéro atomique Z, des largeurs des niveaux atomiques K, L_{II}, L_{III}, M_{IV}, M_V, N_{IV} et N_V et des valeurs pour les rendements de fluorescence des couches électroniques L_{II} et L_{III} des éléments de numéro atomique compris entre 37 et 50.

ABSTRACT — Some results, concerning the widths of atomic shells K, L_{II}, L_{III}, M_{IV}, M_V, N_{IV} et N_V are presented; values for the L_{II} and L_{III} fluorescence yields, in the region $37 \leqslant Z \leqslant 50$ are reported.

1 — INTRODUCTION

On calcule, dans ce travail, des valeurs concernant les largeurs des couches électroniques K, L_{II}, L_{III}, M_{IV}, M_V, N_{IV} et N_V et les rendements de fluorescence ω_2 et ω_3 des niveaux atomiques L_{II} et L_{III}, dans la région de nombres atomiques entre 37 et 50. Ces valeurs ont été calculées d'après quelques résultats expérimentaux et théoriques sur les largeurs des raies spectrales X, obtenues par plusieurs auteurs. La bibliographie scientifique, en ce qui concerne les largeurs des niveaux atomiques est très

(*) Reçu le 1 juin 1971.
(**) Boursier de l'«Instituto de Alta Cultura».

pauvre; récemment SCOFIELD (1), en employant le modèle relativiste de Hartree-Fock-Slater, a calculé les largeurs radiatives des niveaux atomiques K et L, pour des éléments de nombre atomique compris, respectivement, entre 13 et 92 et entre 29 et 92.

PARRATT (2), GOKHALE (3) et, plus récemment, NELSON et al. (4) ont déterminé, expérimentalement, les largeurs des raies $K\alpha_1$ et $K\alpha_2$ pour plusieurs éléments. En ce qui concerne les largeurs des raies L du spectre de rayons X, WILLIAMS (5), BRILL (6) et COOPER (7) ont publié des résultats pour des éléments de numéro atomique $Z > 70$; nous avons employé, dans nos calculs, leurs valeurs se rapportant aux raies $L\alpha_1$, $L\beta_1$, $L\beta_2$ et $L\gamma_1$, qui sont les plus intenses.

BHALLA (8) a calculé les rendements ω_2 et ω_3 pour $Z > 37$, d'après les largeurs des raies $K\alpha_1$ et $K\alpha_2$ présentées par GOKHALE et NELSON et al.; les conclusions obtenues par BHALLA, en employant les résultats de GOKHALE, semblent être accéptables, quoiqu'il n'y a pas des valeurs expérimentales pour comparer; cependant, ses déterminations de ω_2 et ω_3 pour $Z > 50$, d'après les largeurs présentées par NELSON et al. ne sont pas d'accord avec les résultats expérimentaux de PRICE et al. (9).

Nous avons pu calculer les largeurs des couches K, L_{II} et L_{III}, désignées, respectivement, par Γ_K, $\Gamma_{L_{II}}$ et $\Gamma_{L_{III}}$, en fonction du numéro atomique Z, en employant des valeurs de ω_K, obtenues d'après une expréssion récente, présentée par BYRNE et al. (10), des largeurs radiatives des couches K et L (1), des largeurs des raies $K\alpha_1$ et $K\alpha_2$ (3) et les rendements de fluorescence ω_2 et ω_3 (9).

Nous avons aussi calculé les valeurs pour les rendements ω_2 et ω_3 dans la région $37 < Z < 50$, où il n'y a pas de déterminations expérimentales; les largeurs des raies $K\alpha_1$ et $K\alpha_2$, pour les éléments de $Z > 50$, ont été calculées et comparées aux valeurs obtenues par NELSON et al.; en nous servant des résultats des largeurs des raies du niveau L (5, 6, 7), il a été possible de trouver les valeurs pour les largeurs des couches électroniques M_{IV}, M_V, N_{IV} et N_V, pour quelques éléments.

2 — DÉTERMINATION DE LA LARGEUR DU NIVEAU K

La largeur totale Γ_K et la largeur d'Auger Γ_K^A, du niveau K, ont été calculées en nous servant des expréssions:

$$\omega_K = \frac{\Gamma_K^R}{\Gamma_K} \tag{1}$$

et

$$\Gamma_K = \Gamma_K^R + \Gamma_K^A; \tag{2}$$

Γ_K^R représente la largeur radiative du niveau K et ω_K le rendement de fluorescence du même niveau. Nous avons employé les valeurs de Γ_K^R, en fonction de Z, présentées par SCOFIELD, et les rendements ω_K ont été obtenus de l'expréssion

$$\omega_K = \frac{1}{1 + \alpha Z^{-m}} \tag{3}$$

présentée par BYRNE et al. et qui comprend tous les résultats expérimentaux et théoriques de ω_K, pour des valeurs déterminées des paramètres α et m.

Dans les colonnes 1 et 2 du tableau I, sont enregistrées les valeurs de ω_K, pour les éléments de numéro atomique Z compris entre 20 et 92, calculées, d'après l'expréssion (3), en employant les valeurs suivantes pour α et m, indiquées par BYRNE et al.

$$\alpha = (1{,}16 \pm 0{,}07) \times 10^5 \qquad m = 3{,}36 \pm 0{,}02 \qquad \text{(exp.)}$$

et

$$\alpha = (1{,}25 \pm 0{,}05) \times 10^5 \qquad m = 3{,}41 \pm 0{,}01 \qquad \text{(théor.)}.$$

Dans le même tableau nous présentons aussi des valeurs concernant Γ_K et Γ_K^A, dans la région des nombres atomiques $20 \leqslant Z \leqslant 92$.

La fig. 1 nous montre la variation de Γ_K et Γ_K^A avec le numéro atomique. L'accord entre nos résultats et ceux de BHALLA

TABLEAU I

Z	ω_K		Γ_K (eV)		Γ_K^A (eV)	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
20	0,169±0,009	0,180±0,006	0,71±0,04	0,67±0,02	0,59±0,04	0,55±0,02
21	0,193±0,010	0,205±0,007	0,71±0,04	0,67±0,02	0,57±0,04	0,53±0,02
22	0,218±0,011	0,232±0,007	0,85±0,04	0,80±0,02	0,67±0,04	0,62±0,02
23	0,245±0,012	0,260±0,008	0,91±0,04	0,85±0,03	0,68±0,04	0,63±0,03
24	0,272±0,012	0,290±0,009	1,01±0,04	0,94±0,03	0,73±0,04	0,67±0,03
25	0,300±0,014	0,319±0,009	1,11±0,05	1,04±0,03	0,78±0,05	0,71±0,03
26	0,329±0,014	0,348±0,010	1,20±0,05	1,14±0,03	0,81±0,05	0,74±0,03
27	0,358±0,015	0,379±0,011	1,30±0,05	1,23±0,03	0,83±0,05	0,76±0,03
28	0,386±0,015	0,408±0,010	1,44±0,05	1,36±0,03	0,88±0,05	0,80±0,03
29	0,415±0,016	0,437±0,010	1,55±0,05	1,47±0,04	0,91±0,05	0,83±0,04
30	0,442±0,016	0,465±0,010	1,69±0,06	1,61±0,04	0,94±0,06	0,86±0,04
31	0,470±0,016	0,493±0,010	1,85±0,06	1,76±0,04	0,98±0,06	0,89±0,04
32	0,498±0,016	0,521±0,010	2,00±0,06	1,91±0,04	1,01±0,06	0,92±0,04
33	0,524±0,017	0,546±0,010	2,16±0,07	2,07±0,04	1,03±0,07	0,94±0,04
34	0,549±0,017	0,571±0,010	2,38±0,07	2,29±0,05	1,07±0,07	0,98±0,05
35	0,571±0,018	0,595±0,009	2,58±0,07	2,48±0,05	1,11±0,07	1,00±0,05
36	0,595±0,017	0,617±0,009	2,83±0,07	2,73±0,05	1,15±0,07	1,05±0,05
37	0,617±0,017	0,641±0,009	3,09±0,07	2,97±0,05	1,18±0,07	1,07±0,05
38	0,637±0,016	0,662±0,009	3,30±0,08	3,17±0,05	1,20±0,08	1,07±0,05
39	0,658±0,015	0,685±0,009	3,60±0,08	3,46±0,05	1,23±0,08	1,09±0,05
40	0,676±0,014	0,699±0,009	3,98±0,08	3,85±0,06	1,29±0,08	1,16±0,06
41	0,694±0,013	0,719±0,009	4,30±0,08	4,27±0,06	1,32±0,08	1,29±0,06
42	0,714±0,013	0,735±0,009	4,66±0,09	4,53±0,06	1,33±0,09	1,20±0,06
43	0,725±0,013	0,746±0,009	5,06±0,09	4,91±0,06	1,40±0,09	1,25±0,06
44	0,746±0,013	0,763±0,008	5,50±0,10	5,37±0,06	1,40±0,10	1,27±0,06
45	0,758±0,012	0,781±0,008	6,02±0,10	5,84±0,06	1,46±0,10	1,28±0,06
46	0,769±0,012	0,794±0,008	6,42±0,10	6,22±0,06	1,48±0,10	1,28±0,06
47	0,787±0,012	0,806±0,008	6,89±0,11	6,72±0,06	1,47±0,11	1,30±0,07
48	0,794±0,011	0,813±0,007	7,33±0,11	7,16±0,06	1,51±0,11	1,34±0,07
49	0,806±0,010	0,826±0,007	7,82±0,11	7,63±0,06	1,52±0,11	1,32±0,07
50	0,820±0,010	0,833±0,006	8,65±0,12	8,51±0,07	1,56±0,12	1,42±0,08
51	0,826±0,011	0,840±0,006	9,35±0,12	9,19±0,07	1,63±0,12	1,47±0,08
52	0,840±0,010	0,855±0,006	10,05±0,13	9,87±0,07	1,61±0,13	1,43±0,08
53	0,847±0,009	0,862±0,006	10,70±0,14	10,51±0,08	1,64±0 15	1,45±0,09
54	0,855±0,008	0,870±0,005	11,74±0,14	11,55±0,09	1,70±0,15	1,51±0,10
55	0,862±0,008	0,877±0,005	12,76±0,14	12,54±0,09	1,76±0,15	1,54±0,10
56	0,870±0,007	0,877±0,005	13,31±0,14	13,19±0,10	1,74±0,15	1,62±0,11

TABLEAU I (cont.)

Z	ω_K		Γ_K (eV)		Γ_K^A (eV)	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
57	0,877±0,007	0,885±0,005	14,14±0,14	13,89±0,10	1,74±0,15	1,49±0,11
58	0,877±0,007	0,893±0,004	15,22±0,15	14,95±0,10	1,87±0,16	1,60±0,12
59	0,885±0,007	0,901±0,004	16,27±0,15	15,98±0,11	1,87±0,16	1,58±0,13
60	0,893±0,007	0,901±0,004	17,38±0,15	17,22±0,11	1,86±0,17	1,70±0,13
61	0,893±0,007	0,909±0,004	18,48±0,16	18,15±0,12	1,98±0,18	1,65±0,14
62	0,901±0,006	0,912±0,003	19,59±0,17	19,35±0,12	1,94±0,19	1,70±0,15
63	0,909±0,006	0,917±0,003	20,68±0,18	20,50±0,13	1,88±0,20	1,70±0,16
64	0,910±0,006	0,920±0,003	22,09±0,19	21,85±0,13	1,99±0,21	1,75±0,16
65	0,914±0,006	0,924±0,003	23,79±0,19	23,53±0,13	2,04±0,21	1,78±0,17
66	0,918±0,006	0,928±0,003	24,94±0,19	24,78±0,14	2,04±0,22	1,88±0,18
67	0,922±0,006	0,931±0,003	26,46±0,20	26,21±0,15	2,06±0,23	1,81±0,19
68	0,925±0,005	0,935±0,003	28,11±0,21	27,81±0,16	2,11±0,24	1,81±0,20
69	0,928±0,005	0,937±0,003	29,85±0,21	29,56±0,17	2,15±0,25	1,86±0,21
70	0,932±0,005	0,940±0,002	31,81±0,22	31,55±0,17	2,16±0,26	1,90±0,22
71	0,935±0,004	0,942±0,002	33,58±0,23	33,33±0,18	2,18±0,28	1,93±0,23
72	0,937±0,004	0,945±0,002	35,75±0,25	35,45±0,19	2,25±0,30	1,95±0,24
73	0,940±0,004	0,948±0,002	37,56±0,26	37,24±0,20	2,26±0,31	1,94±0,25
74	0,942±0,004	0,950±0,002	39,68±0,26	39,38±0,21	2,28±0,32	1,98±0,27
75	0,945±0,004	0,952±0,002	42,01±0,27	41,70±0,22	2,31±0,33	2,00±0,29
76	0,948±0,004	0,954±0,002	43,99±0,27	43,71±0,23	2,29±0,34	2,01±0,31
77	0,950±0,004	0,957±0,002	46,21±0,28	45,87±0,24	2,31±0,36	1,97±0,33
78	0,952±0,004	0,958±0,002	48,98±0,28	48,65±0,25	2,38±0,37	2,05±0,34
79	0,953±0,004	0,960±0,002	51,50±0,29	51,16±0,26	2,40±0,39	2,06±0,36
80	0,955±0,003	0,962±0,002	54,13±0,31	53,77±0,28	2,43±0,40	2,07±0,38
81	0,957±0,003	0,962±0,002	56,85±0,33	56,52±0,29	2,45±0,42	2,12±0,40
82	0,959±0,003	0,964±0,002	59,76±0,35	59,42±0,31	2,46±0,44	2,12±0,41
83	0,961±0,003	0,965±0,002	62,64±0,37	62,38±0,33	2,44±0,46	2,18±0,43
84	0,962±0,003	0,967±0,002	65,97±0,38	65,56±0,35	2,57±0,48	2,16±0,45
85	0,963±0,003	0,968±0,002	68,85±0,39	68,49±0,36	2,55±0,51	2,19±0,47
86	0,964±0,003	0,969±0,002	71,78±0,40	71,41±0,38	2,58±0,53	2,21±0,49
87	0,966±0,003	0,971±0,002	74,95±0,42	74,56±0,39	2,55±0,56	2,16±0,52
88	0,967±0,003	0,972±0,002	78,49±0,43	78,09±0,40	2,59±0,59	2,19±0,54
89	0,968±0,002	0,973±0,001	82,64±0,45	82,22±0,42	2,64±0,62	2,22±0,57
90	0,970±0,002	0,974±0,001	86,61±0,47	86,09±0,44	2,61±0,65	2,09±0,60
91	0,971±0,002	0,975±0,001	90,73±0,49	90,36±0,46	2,63±0,67	2,26±0,63
92	0,972±0,002	0,976±0,001	94,46±0,51	94,09±0,48	2,66±0,69	2,29±0,66

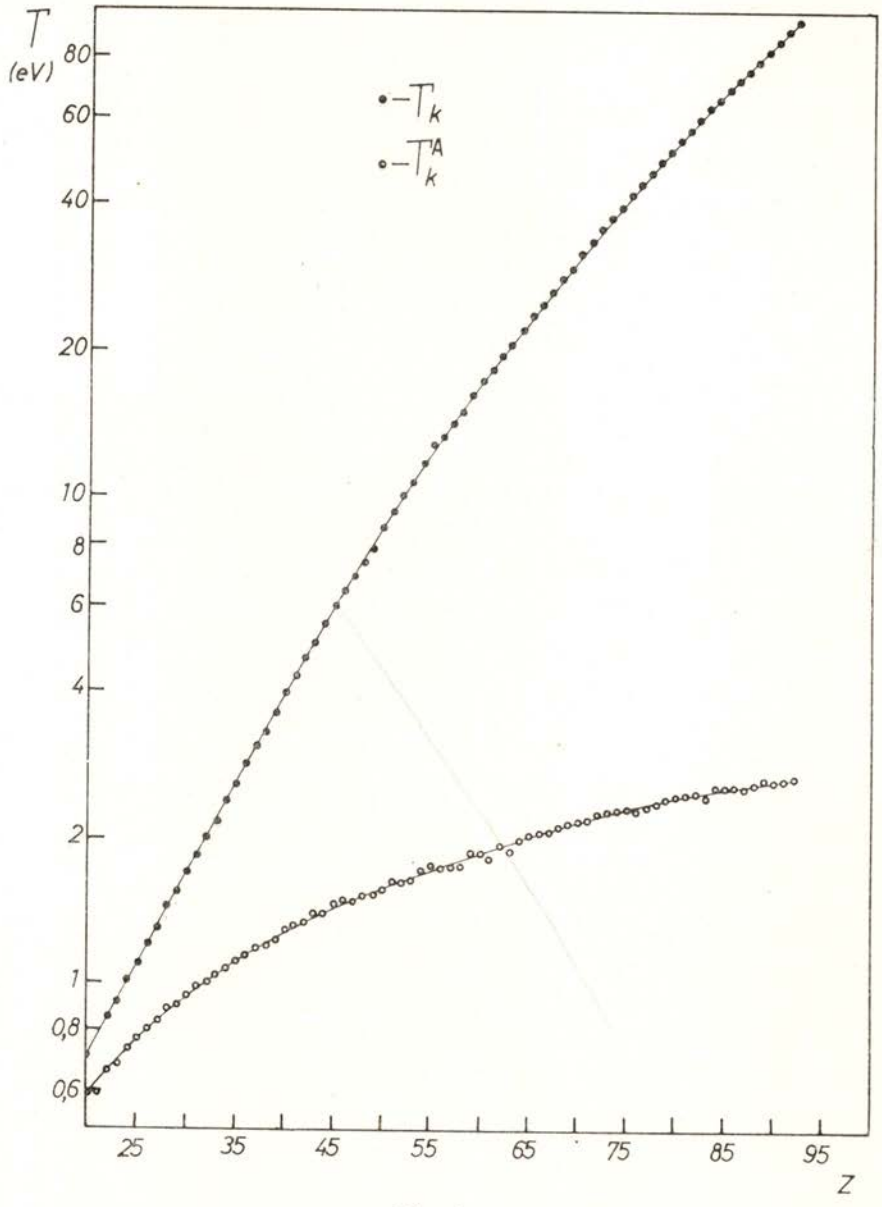


Fig. 1

Variation de Γ_K et Γ_K^A, avec le numéro atomique.

nous assure que les valeurs de ω_K obtenues de l'expréssion (1) et les calculs de SCOFIELD, en ce qui concerne Γ_K^R ont une précision satisfaisante.

3 — LARGEURS DES COUCHES ÉLECTRONIQUES L_{II} ET L_{III}, POUR DES ÉLÉMENTS DE NUMÉRO ATOMIQUE Z, ENTRE 20 ET 92; RENDEMENTS DE FLUORESCENCE ω_2 ET ω_3, DANS LA RÉGION $37 < Z < 50$

Les raies $K\alpha_1$ et $K\alpha_2$ sont originées dans des transitions électroniques $K \rightarrow L_{III}$ et $K \rightarrow L_{II}$ et, par conséquent, sont valables les relations suivantes entre les largeurs de ces raies et les correspondantes couches électroniques,

$$\Gamma_{K\alpha_1} = \Gamma_K + \Gamma_{L_{III}} \tag{4}$$

et

$$\Gamma_{K\alpha_2} = \Gamma_K + \Gamma_{L_{II}} . \tag{5}$$

Dans la région $20 < Z < 50$ nous avons calculé $\Gamma_{L_{III}}$ et $\Gamma_{L_{II}}$, par substitution dans les relations (4) et (5) des largeurs des raies $K\alpha_1$ et $K\alpha_2$, determinées par PARRATT (2) et GOKHALE (3) et des valeurs Γ_K, présentées dans le tableau I.

Pour les éléments de numéro atomique $Z \geqslant 71$, il nous a semblé préférable calculer les valeurs de $\Gamma_{L_{II}}$ et $\Gamma_{L_{III}}$ par les expréssions:

$$\omega_2 = \frac{\Gamma_{L_{II}}^R}{\Gamma_{L_{II}}} \tag{6}$$

et

$$\omega_3 = \frac{\Gamma_{L_{III}}^R}{\Gamma_{L_{III}}} . \tag{7}$$

En effect, BHALA a montré que, pour les éléments de $Z > 50$, les valeurs de ω_2 et ω_3, obtenues d'après les mesures de NELSON

et al. sur les largeurs des raies $K\alpha_1$ et $K\alpha_2$, ne sont pas d'accord avec les résultats de PRICE et al.

Nous avons pris les résultats de PRICE et al., en ce qui concerne les rendements ω_2 et ω_3, et les valeurs de SCOFIELD pour $\Gamma^R_{L_{II}}$ et $\Gamma^R_{L_{III}}$. Dans la région de nombres atomiques $51 \leqslant Z \leqslant 70$, il n'y a pas de résultats expérimentaux qu'on puisse utiliser dans le calcul de $\Gamma_{L_{II}}$ et $\Gamma_{L_{III}}$. Dans les tableaux II et III nous présentons, respectivement, les largeurs des niveaux atomiques $\Gamma_{L_{III}}$, $\Gamma_{L_{II}}$ et $\Gamma^A_{L_{III}}$, ainsi calculées, pour $20 \leqslant Z \leqslant 92$ et les rendements de fluorescence ω_3, ω_2 pour $37 \leqslant Z \leqslant 50$.

La largeur du niveau atomique K a été detérminée pour le samarium ($Z = 62$) par GEIGER et al. (11); KAYE (12) a aussi mesuré, avec une précision de 20 %, les largeurs des niveaux atomiques K, L_{II} et L_{III} de l'ytérbium ($Z = 70$). Les valeurs obtenues par ces auteurs sont les suivantes:

	K	L_{II}	L_{III}
$Z = 62$	17 ± 3 eV	—	—
$Z = 70$	32 eV	4 eV	5 eV

Il y a accord satisfaisant entre ces résultats et ceux présentés dans les tableaux I et II.

TABLEAU II

Z	$\Gamma_{L_{III}}$ (eV)	$\Gamma_{L_{II}}$ (eV)	$\Gamma^{A}_{L_{III}}$ (eV)
20	1,05±0,10	0,98±0,09	
21	1,15±0,09	1,34±0,11	
22	1,15±0,11	1,48±0,12	
23	1,35±0,12	1,76±0,14	
24	1,54±0,13	2,04±0,16	
25	1,98±0,16	2,32±0,18	
26	2,17±0,18	2,50±0,19	
37	1,30±0,11	1,70±0,20	1,27±0,23
38	1,53±0,12	1,49±0,21	1,50±0,24
39	1,50±0,13	1,56±0,22	1,46±0,25
40	1,51±0,14	1,95±0,25	1,47±0,29
41	1,67±0,14	1,72±0,25	1,62±0,29
42	1,76±0,16	2,00±0,28	1,70±0,32
43	1,82±0,16	1,86±0,29	1,75±0,33
44	1,65±0,17	1,82±0,31	1,57±0,35
45	1,84±0,19	1,89±0,33	1,75±0,38
46	2,02±0,20	1,97±0,35	1,91±0,40
47	2,20±0,21	2,49±0,39	2,08±0,44
48	2,65±0,23	2,70±0,42	2,52±0,48
49	2,60±0,24	2,93±0,44	2,45±0,50
50	2,50±0,25	3,62±0,50	2,33±0,56
71	4,00±0,56	4,40±0,89	2,99±0,56
72	4,68±0,51	4,08±0,62	3,61±0,51
73	4,58±0,45	4,83±0,80	3,42±0,45
74	4,57±0,62	4,74±0,84	3,33±0,62
75	4,56±0,69	4,84±1,00	3,26±0,69
76	4,79±0,50	4,91±0,81	3,40±0,50
77	5,70±0,78	5,43±0,99	4,20±0,78
78	5,08±0,46	5,38±0,84	3,47±0,46
79	5,42±0,43	5,54±0,81	3,70±0,43
80	4,98±0,68	5,13±0,99	3,15±0,68
81	5,03±0,69	5,58±1,10	3,09±0,69
82	5,82±0,46	6,72±1,08	3,76±0,46
83	6,10±0,49	6,68±1,02	3,89±0,49
90	6,25±0,51	8,12±1,37	3,02±0,51
92	7,18±0,58	7,87±1,17	3,59±0,58

Les figures 2 et 3 montrent la variation de ω_2 et ω_3, respectivement, avec le nombre atomique; dans la région de $Z \geqslant 71$, on a marqué les valeurs de ω_2 et ω_3, obtenues par PRICE et al.

TABLEAU III

Z	ω_3	ω_2
37	0,0222±0,0021	0,0172±0,0021
38	0,0220±0,0019	0,0231±0,0034
39	0,0262±0,0023	0,0262±0,0038
40	0,0302±0,0029	0,0242±0,0032
41	0,0320±0,0028	0,0317±0,0047
42	0,0350±0,0033	0,0320±0,0046
43	0,0384±0,0034	0,0395±0,0062
44	0,0479±0,0050	0,0466±0,0080
45	0,0492±0,0052	0,0513±0,0090
46	0,0518±0,0052	0,0560±0,0100
47	0,0543±0,0053	0,0503±0,0079
48	0,0506±0,0044	0,0528±0,0082
49	0,0580±0,0054	0,0545±0,0082
50	0,0677±0,0068	0,0493±0,0068

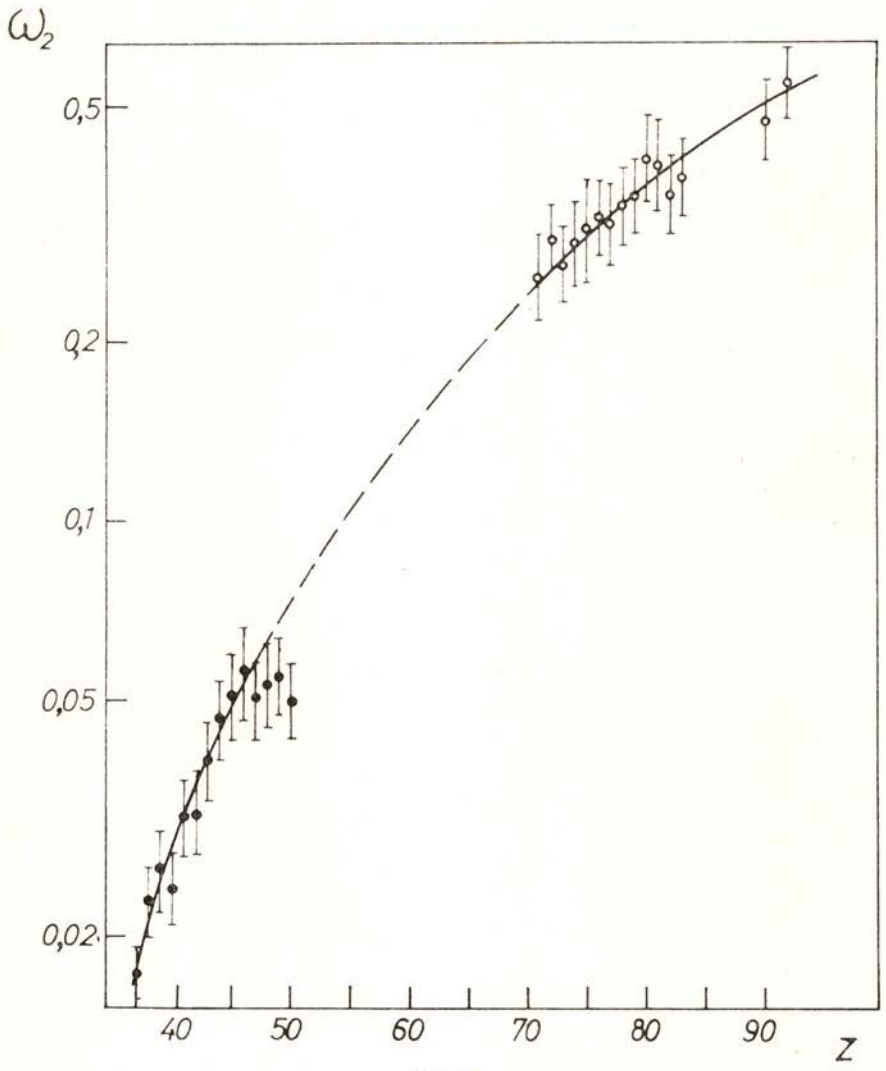


Fig. 2

Variation de ω_2 avec le nombre atomique.

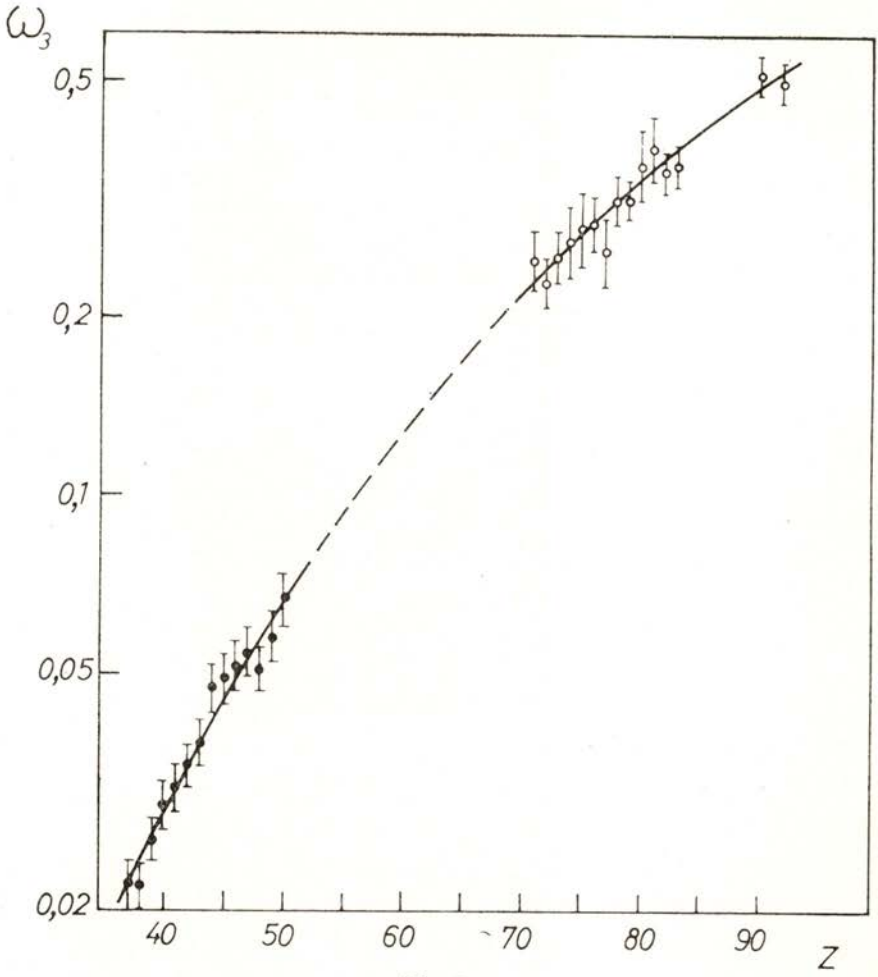


Fig. 3

Variation de ω_3 avec le nombre atomique.

Les expréssions (4) et (5) nous ont permis de calculer les largeurs des raies $K\alpha_1$ et $K\alpha_2$, dans la région $71 \leqslant Z \leqslant 92$, qu'on présente dans le tableau IV

TABLEAU IV

Z	$\Gamma_{K_{\alpha_1}}$ (eV)	$\Gamma_{K_{\alpha_2}}$ (eV)
71	37,58±0,60	37,98±0,92
72	40,42±0,57	39,83±0,67
73	42,14±0,52	42,39±0,84
74	44,25±0,67	44,42±0,88
75	46,57±0,74	46,85±1,03
76	48,78±0,57	48,90±0,85
77	51,90±0,83	51,64±1,03
78	54,06±0,54	54,35±0,88
79	56,93±0,52	57,05±0,86
80	59,10±0,75	59,26±1,04
81	61,88±0,76	62,43±1,15
82	65,58±0,58	66,48±1,13
83	68,74±0,61	69,32±1,08
90	92,86±0,69	94,73±1,45
92	101,64±0,77	102,33±1,28

Dans la fig. 4 on fait la comparaison entre nos résultats et ceux de NELSON et al.

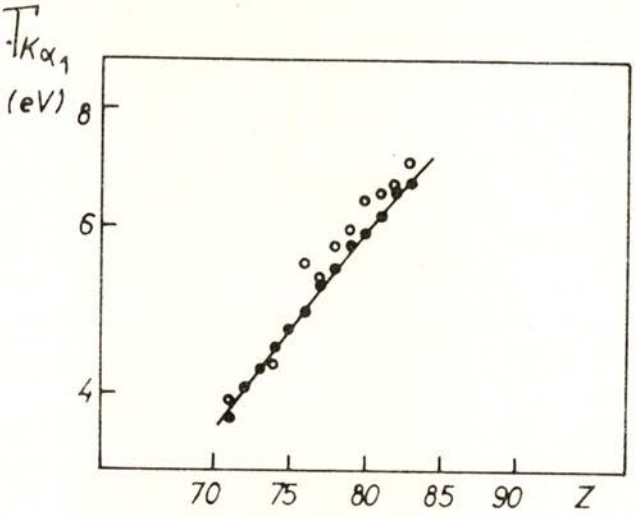


Fig. 4a

Variation de $\Gamma_{K_{\alpha_1}}$ avec le nombre atomique
• — nos résultats; ○ — déterminations de Nelson.

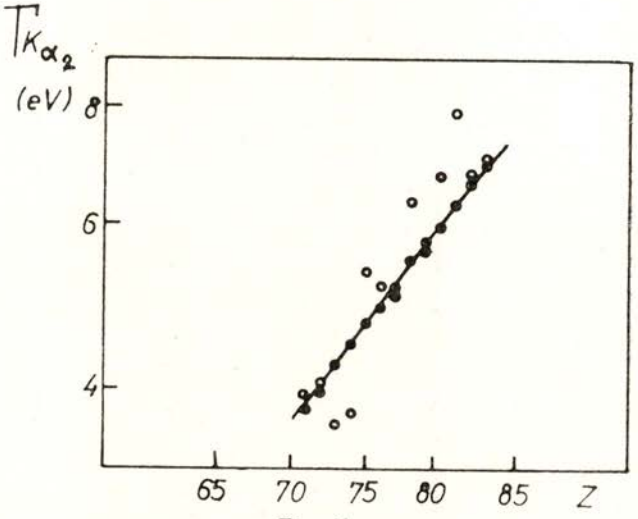


Fig. 4b

Variation de $\Gamma_{K_{\alpha_2}}$ avec le nombre atomique
• — nos résultats; ○ — déterminations de Nelson.

4 — LARGEURS DES COUCHES M_{IV}, M_V, N_{IV} et N_V

Les largeurs des couches M_{IV}, M_V, N_{IV} et N_V ont été calculées d'après les valeurs de $\Gamma_{L_{II}}$ et $\Gamma_{L_{III}}$, que nous avons obtenues, et des détérminations expérimentales de WILLIAMS, BRILL et COOPER, en ce qui concerne les largeurs des raies $L\alpha_1$, $L\beta_1$, $L\beta_2$ et $L\gamma_1$. Ces rayonnements sont originés dans les transitions électroniques suivantes:

$$L_{III} \rightarrow M_V \ (L\alpha_1), \quad L_{II} \rightarrow M_{IV} \ (L\beta_1), \quad L_{III} \rightarrow N_V \ (L\beta_2)$$

et

$$L_{II} \rightarrow N_{IV} \ (L\gamma_1).$$

On peut alors écrire les relations:

$$\begin{aligned} \Gamma_{L_{\alpha_1}} &= \Gamma_{L_{III}} + \Gamma_{M_V} \\ \Gamma_{L_{\beta_1}} &= \Gamma_{L_{II}} + \Gamma_{MIV} \\ \Gamma_{L_{\beta_2}} &= \Gamma_{L_{III}} + \Gamma_{N_V} \\ \Gamma_{L_{\gamma_1}} &= \Gamma_{L_{II}} + \Gamma_{N_{IV}} \end{aligned} \qquad (8)$$

entre les largeurs de ces raies et des niveaux atomiques, qui interviennent dans les transitions électroniques.

Dans le tableau V nous régistrons les résultats obtenus des équations (8) pour les largeurs $\Gamma_{M_{IV}}$, Γ_{M_V}, $\Gamma_{N_{IV}}$ et Γ_{N_V}.

TABLEAU V

Z	$\Gamma_{M_{IV}}$ (eV)	Γ_{M_V} (eV)	$\Gamma_{N_{IV}}$ (eV)	Γ_{N_V} (eV)
71	2,3±0,91	—	—	6,1±0,6
73	1,8±0,81	—	4,7±0,8	5,2±0,5
74	*a*) 1,8±0,85	—	4,6±1,0	5,2±0,7
	b) 2,4±0,86	2,6±0,6	5,7±1,0	5,5±0,8
	c) (2,4±0,86)	—	—	—
75	1,7±1,01	—	4,7±1,0	5,2±0,7
76	1,7±0,83	—	4,5±0,8	5,1±0,6
77	*a*) 1,4±1,00	—	4,2±1,0	4,0±0,8
	b) 2,2±1,01	2,4±0,8	6,2±1,1	5,6±1,0
78	*a*) 1,8±0,9	—	4,7±0,9	5,0±0,6
	b) 2,5±0,9	3,3±0,5	5,9±1,0	6,5±0,5
79	*a*) 1,9±0,8	—	4,6±0,9	4,7±0,6
	b) 2,8±0,8	3,2±0,5	5,9±1,0	6,0±0,7
81	*a*) 2,1±1,1	—	4,4±1,1	5,2±0,8
	b) 3,3±1,1	4,4±0,7	6,6±1,2	7,2±0,9
82	—	—	—	—
	—	3,7±0,5	5,6±1,2	—
83	*a*) —	—	—	—
	b) 2,9±1,1	3,7±0,5	5,8±1,2	6,0±0,8
90	*c*) (4,8)	—	—	—
92	*a*) —	—	—	—
	b) 6,4±1,2	5,9±0,6	8,0±1,4	8,9±1,0

a) COOPER [7]; *b*) WILLIAMS [5]; *c*) BRILL [6]

C'est la première fois, à notre connaissance, qu'on présente des valeurs concernant les largeurs des couches atomiques M_{IV}, M_V, N_{IV} et N_V, bien que la précision des calculs ne soit pas très grande; il est donc désirable la réalization d'autres travaux sur ce même sujet.

BIBLIOGRAPHIE

(1) J. H. SCOFIELD, *Phys. Rev.*, **179**, 9, 1969.
(2) L. G. PARRATT, *Phys. Rev.*, **44**, 695, 1933.
(3) B. G. GOKHALE, *Ann. Phys.* **7**, 852, 1952.
(4) G. C. NELSON, W. JOHN et B. G. SAUNDERS, *Phys. Rev.*, **187**, 1, 1969; *Phys. Rev.* A, **2**, 542, 1970.
(5) J. H. WILLIAMS, *Phys. Rev.*, **45**, 71, 1934.
(6) A. BRILL, *Physica*, **13**, 481, 1947.
(7) J. N. COOPER, *Phys. Rev.*, **61**, 234, 1942.
(8) C. P. BHALLA, *Phys. Rev.* A, **2**, 2575, 1970.
(9) R. E. PRICE, H. MARK et C. D. SWIFT, *Phys. Rev.*, **176**, 3, 1968.
(10) J. BYRNE et N. HOWART, *J. Phys. B: Atom. Molec. Phys.*, **3**, 280, 1970.
(11) J. S. GEIGER, R. L. GRAHAM et J. S. MERRIT, *Nuc. Phys.*, **48**, 97, 1963.
(12) G. KAYE, *Nuc. Phys.*, **68**, 529, 1965.

Toute la correspondance concernant la rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Prix de l'abonnement:	250 escudos (US $8.50) par volume
Prix des volumes déjà parus:	300 escudos (US $10)
Prix du fascicule:	75 escudos (US $2.50)

Les membres de la «Sociedade Portuguesa de Química e Física» ont une réduction de 50 % sur les prix indiqués.

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Scientifiques et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu detaillé de tous les ouvrages soumis à la rédaction en deux exemplaires.

All mail concerning PORTUGALIAE PHYSICA to be addressed to:

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Subscription rates:	250 escudos (US $8.50) per volume
Price of past volumes:	300 escudos (US $10)
Price of copy:	75 escudos (US $2.50)

Members of the «Sociedade Portuguesa de Química e Física» may obtain *Portugaliae Physica* at a reduced price (50 %).

Universities, Physics Laboratories, Academies, Scientific Societies and Physics Publications are invited to receive this review in exchange for their publications.

PORTUGALIAE PHYSICA will give a detailed report of any book if two copies have been submitted.

TIP. MATEMÁTICA, LDA. — LISBOA

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 6
FASCÍCULO 4
1971

INSTITUTO DE ALTA CULTURA
CENTROS DE ESTUDOS DE FÍSICA DAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS

PORTUGALIAE PHYSICA

Fundadores: A. Cyrillo Soares, M. Telles Antunes, A. Marques da Silva, M. Valadares.

VOLUME 6 1971 FASCÍCULO 4

VOLUMES PUBLICADOS:

Vol. 1 — 1943-45 — 326 pp.

Vol. 2 — 1946-47 — 256 pp.

Vol. 3 — 1949-54 — 173 pp.

Vol. 4 — 1965-66 — 304 pp.

Vol. 5 — 1967-70 — 194 pp.

Vol. 6 — 1970-71 — 316 pp.

Redacção: Laboratório de Física da Faculdade de Ciências — Lisboa-2 (PORTUGAL)

Comissão de redacção:

J. Moreira de Araújo — Carlos Braga — Carlos Cacho — A. Pires de Carvalho — M. Abreu Faro — J. Gomes Ferreira — F. Bragança Gil — Manuel Laranjeira. Amaro Monteiro — J. Pinto Peixoto — J. da Providência — Lídia Salgueiro — J. de Almeida Santos — José Sarmento — António da Silveira — J. Veiga Simão.

ÍNDICE

(Table des matières)

Contribution à la mécanique ondulatoire de la particule de spin maximum 1, par JOSÉ VASSALO PEREIRA 203

Liste des publications reçues actuellement en échange avec Portugaliae Physica. 309

Instructions pour les auteurs 313

CDU 53 (469) (05)

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 6
FASCÍCULO 4
1971

CONTRIBUTION A LA MECANIQUE ONDULATOIRE DE LA PARTICULE DE SPIN MAXIMUM 1 (*)

JOSÉ VASSALO PEREIRA

ABSTRACT — A generalization of the theory of the spin maximum 1 particle is proposed which enables the theory to describe a charged particle moving in an electromagnetic field.

The general problem of passing from the relativistic theories to the corresponding non-relativistic ones is then discussed, in which we stress the importance of the «β-approximation».

One then calculates the non relativistic approximation of the foregoing generalized theory of the particle of spin maximum 1, which brings to light the validity of the so-called «method of the fusion» within the frame of non relativistic Wave Mechanics. As a particular case of the preceding results, we are led to the approximation of the MAXWELL-DE BROGLIE equations. describing the non relativistic bahaviour of the photon.

RESUME — On présente d'abord une généralisation de la théorie de la particule de spin maximum 1 au cas des particules se déplaçant dans un champ électromagnétique.

Le problème général du passage des théories rélativistes aux théories non rélativistes correspondantes est ensuite étudié, ce qui nous permet de mettre en relief l'importance de l'«approximation en β».

Nous calculons l'approximation non relativiste de la théorie généralisée de la particule de spin maximum 1 pour en conclure que la «méthode de fusion» reste aussi valable au niveau non relativiste. Comme un cas particulier de ces résultats, on est conduit à l'approximation des équations de MAXWELL-DE BROGLIE, décrivant le comportement non relativiste du photon.

(*) Thèse présentée à l'Université de Paris VI pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences Physiques.

Reçu le 1er Juillet 1971.

INTRODUCTION

Les résultats exposés dans notre travail sont une contribution à la théorie de la particule de spin maximum 1, théorie proposée par M. DE BROGLIE en 1934 et développée surtout dans le but de constituer une Mecanique Ondulatoire du Photon. Dans cette thèse nous présentons notamment une généralisation de la théorie au cas des particules chargées se déplaçant dans un champ électromagnétique et étudions en détail le problème de l'approximation non relativiste.

Dans le Chapitre I nous présentons un bref rappel des idées et des résultats fondamentaux obtenus par M. DE BROGLIE et ses collaborateurs. On commence par présenter la méthode de fusion et la forme spinorielle des équations fondamentales, pour en déduire ensuite la forme tensorielle équivalente de ces équations. Celles-ci se séparent en deux groupes indépendants, celui des «équations maxwelliennes», décrivant le comportement de la particule de spin 1, et celui des «équations non maxwelliennes», ayant trait à la particule de spin 0. On expose ensuite le sens physique des grandeurs tensorielles de champ associées à chaque type de particule.

Au Chapitre II nous proposons une généralisation de la théorie au cas des particules chargées. Nous y exposons d'abord les difficultés soulevées par la généralisation formelle des équations spinorielles fondamentales, pour ensuite résoudre le problème en introduisant le Lagrangien et les équations spinorielles de la particule de spin maximum 1 et charge q. Ces résultats permettent de développer le formalisme de la théorie généralisée, ce qui nous amène à étudier le quadrivecteur densité-flux de probabilité s_μ et le tenseur densité d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Enfin, nous comparons quelques uns de nos résultats avec des résultats correspondantes dûs à A. PROCA.

Avant d'entreprendre au Chapitre IV un calcul aboutissant

à l'approximation non relativiste des équations généralisées, nous examinons au Chapitre III le problème général du passage des théories relativistes aux théories non relativistes correspondantes. L'étude des relations entre le groupe de LORENTZ et celui de GALILÉE nous conduira ainsi à prendre l'approximation en $\beta = v/c$ comme étant celle qui assure le passage correct au niveau non relativiste. L'approximation non relativiste de l'impulsion et de l'énergie appuie cette hypothèse et, une fois que l'on a exposé le procédé général d'approximation non relativiste en Mécanique Ondulatoire, la même hypotèse sera confirmée lors du passage de l'équation de KLEIN-GORDON à l'équation de SCHRÖDINGER et dans le passage des équations de DIRAC aux équations de PAULI. Dans cette dernière partie on traitera, plus généralement, du raccord entre le formalisme de la théorie de DIRAC et celui de la théorie de PAULI.

La première partie du Chapitre IV est entièrement occupée par le calcul de l'approximation non relativiste des équations spinorielles généralisées, conduisant aux équations non relativistes de la particule de spin maximum 1 et charge q se déplaçant dans un champ électromagnétique. Ces équations montrent clairement que la méthode de fusion reste valable à l'approximation non relativiste ou, plus précisément, que par le même procédé formel la fusion de deux corpuscules de PAULI permet d'obtenir les équations non relativistes de la particule de spin maximum 1. Le formalisme découlant de ces nouvelles équations est étudié, de même que la forme vectorielle des équations.

Le Chapitre V s'occupe spécialement de l'étude du photon à l'approximation non relativiste. On en présente d'abord les équations, après quoi on discute la signification physique des grandeurs électromagnétiques non relativistes. On compare la forme finale des équations non relativistes de la particule de spin maximum 1 avec les équations maxwelliennes et non maxwelliennes présentées au Chapitre II, la dernière partie étant consacrée à l'étude non relativiste des solutions du type onde plane monochromatique.

Que M. DE BROGLIE veuille bien trouver ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance par l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à ce travail. Ses suggestions m'ont toujours été très profitables, de même que la fréquentation de son Séminaire à l'Académie des Sciences.

Je remercie M.me M.-A. TONNELAT, Professeur à l'Institut HENRI POINCARÉ, qui a bien voulu accepter d'être présente dans le jury de thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. J. ANDRADE E SILVA, Maître de Recherches au C. N. R. S., qui me proposa le sujet de cette thèse et qui, par ses conseils, son expérience et son aide amicale, m'initia à la recherche scientifique.

Je remercie aussi M. GEORGES LOCHAK des nombreuses discussions que nous avons eues, de ses remarques au sujet de ce travail et de son amicale bienveillance.

Enfin, je ne saurais oublier que c'est grâce à l'appui matériel de l'Instituto de Alta Cultura (Lisbonne) que j'ai pu mener à bien les recherches qui font l'objet de ce travail.

CHAPITRE 1

Rappel de la théorie de la particule de spin maximum 1

§ 1. La méthode de la fusion et la forme spinorielle des équations fondamentales.

Comme nous l'avons rappelé dans l'Introduction, la théorie de la particule de spin maximum 1 est due à M. de Broglie [1] et a été dévéloppée par lui-même et ses collaborateurs, notamment Mme Tonnelat [2] et MM. Géhéniau [3] et Pétiau [4]. La méthode de fusion, dont M. de Broglie s'inspira pour parvenir aux équations de la particule de spin maximum 1, conduisit, par la suite, à une théorie générale des particules de spin quelconque [5]. Cette théorie se trouvant en dehors du cadre de notre travail, on se bornera ici à exposer les aspects essentiels de la seule théorie de la particule de spin maximum 1.

La méthode de fusion s'appuie sur l'idée que la particule de spin maximum 1 peut être considérée comme étant due à la «fusion» de deux corpuscules de spin 1/2, laquelle peut donner lieu soit à une particule de spin 0 soit à une particule spin 1. Dans ce contexte, les équations de Dirac jouent un rôle fondamental, car le procédé formel qui traduit mathématiquement la fusion des corpuscules composants consiste, en particulier, à fusionner les matrices α_μ qui apparaissent dans les équations de Dirac.

Pour préciser ce concept de fusion de matrices, donnons-nous une matrice $n \times n$ α; on définit alors les matrices fusionnées de α comme étant deux matrices $n \times n$, a et b, obtenues en prenant

le produit extérieur de α par I (matrice identité $n \times n$) et de I par α:

I. 1 $$a = \alpha \times I \qquad b = I \times \alpha .$$

Rappelons que le produit extérieur de deux matrices $n \times n$ A et B est une matrice $n \times n$, $A \times B$, qui s'obtient en remplaçant chaque élément a_{ik} de A par $a_{ik} B$. En conséquence, si $\alpha = [a_{ik}]$ $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$, on a

I. 2 $$a = \alpha \times I = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{11} & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \ddots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n1} & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$b = I \times \alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 \cdots & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 \cdots & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & 0 & 0 \cdots & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ & & & & & & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & & & & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A partir de ces définitions on vérifie aisément les relations qui nous seront utiles par la suite

I. 3 $$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C);$$
$$(A \times B)(C \times D) = (A\,C) \times (B\,D).$$

Chaque corpuscule de spin 1/2 et de masse propre $m_0/2$ étant traduit par un système d'équations de Dirac, tant que les

deux corpuscules demeurent sans interaction leur description est donnée par un ensemble de deux équations de Dirac,

$$\text{I. 4} \qquad \begin{aligned} &\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\alpha_1 - \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2 - \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3 - i\frac{m_0 c}{2\hbar}\alpha_4\right]\psi_1 = 0 \\ &\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\alpha_1 - \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2 - \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3 - i\frac{m_0 c}{2\hbar}\alpha_4\right]\psi_2 = 0\,. \end{aligned}$$

D'après la méthode de fusion, pour obtenir les équations de la particule de spin maximum 1 on doit procéder dans I. 4 aux trois substitutions suivantes: 1) les matrices α_μ sont remplacées par leurs matrices fusionnées

$$\text{I. 5} \qquad a_\mu = \alpha_\mu \times I\,, \qquad b_\mu = I \times \alpha_\mu \qquad (\mu = 1,2,3,4);$$

2) la masse $m_0/2$ de chaque corpuscule composant fait place dans les équations finales à la masse m_0 de la particule résultante de la fusion; 3) les fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 à quatre composantes, décrivant séparément chaque corpuscule, sont remplacées par une seule fonction ψ à $4 \times 4 = 16$ composantes traduisant le comportement de la particule de spin maximum 1 résultante. Le système d'équations de cette particule de vient ainsi (*):

$$\text{I. 6} \qquad \begin{aligned} &\left[\frac{1}{c}\,\partial_t - \partial_x a_1 - \partial_y a_2 - \partial_z a_3 - \frac{i m_0 c}{\hbar} a_4\right]\psi = 0 \\ &\left[\frac{1}{c}\,\partial_t - \partial_x b_1 - \partial_y b_2 - \partial_z b_3 - \frac{i m_0 c}{\hbar} b_4\right]\psi = 0\,. \end{aligned}$$

Dans la matrice colonne ψ, chaque élément est identifié au moyen de deux indices, ik, les seize élément ψ_{ik} étant ordonnés de la façon suivante (**): $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{13}\,\psi_{14}\,\psi_{21}\,\psi_{22}\,\psi_{23}\cdots\psi_{42}\,\psi_{43}\,\psi_{44}$. En conséquence, les éléments de chaque matrice 16×16 a_μ et b_μ sont identifiés au moyen de quatre indices, ik, lm; plus précisément, $(a_\mu)_{ik,\,lm}$ est l'élément qui se trouve dans la ligne ik et la colonne lm de la matrice a_μ, chaque paire d'indices ik

---

(*) Les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial t}$ sont désignées, d'une façon abrégée, par $\partial x\,\partial y\,\partial z\,\partial t$.

(**) Signalons que la variance de ψ_{ik} est celle d'un produit $\psi_i \psi_k$ de deux composantes d'un spineur de Dirac.

et lm étant ordonnée comme les composantes ψ_{ik} dans ψ. En tenant compte de ce qui précède, on peut donner aux définitions I. 5 la forme équivalente

I. 7 $$(a_\mu)_{ik\,,\,lm} = \alpha_{il}\,\delta_{km}\,, \quad (b_\mu)_{ik\,,\,lm} = \alpha_{km}\,\delta_{il}\,,$$

δ_{ik} désignant le symbole de Kronecker. Avec ces notations, il est clair que l'expression $a_\mu \psi$, par exemple, désigne la matrice colonne $(a_\mu \psi)_{ik} = \sum_{lm} (a_\mu)_{ik\,,\,lm}\,\psi_{lm}$. Signalons aussi que, les matrices α_μ étant hermitiques, a_μ et b_μ le sont également car on a, par I. 7,

I. 8 $$(a_\mu)^*_{ik\,,\,lm} = (a_\mu)_{lm\,,\,ik}\,, \quad (b_\mu)^*_{ik\,,\,lm} = (b_\mu)_{lm\,,\,ik}\,.$$

En outre, les huit matrices a_μ et b_μ obéissent à des relations de commutation identiques à celles de Dirac pour les α_μ. En effet, on tire de I. 3 et I. 5 que

$$a_\mu a_\nu + a_\nu a_\mu = ((\alpha_\mu \alpha_\nu) \times I) + ((\alpha_\nu \alpha_\mu) \times I) = (\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu) \times I\,,$$

une relation analogue ayant lieu pour les b_μ. On a donc

I. 9 $$a_\mu a_\nu + a_\nu a_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu} I$$

I. 10 $$b_\mu b_\nu + b_\nu b_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu} I \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

On démontre de la même façon la relation suivante

I. 11 $$a_\mu b_\nu - b_\nu a_\mu = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

Retournons maintenant aux équations spinorielles fondamentales I. 6. La question qui se pose d'emblée dans leur étude est celle de la compatibilité du système car il contient 32 équations, les composantes ψ_{ik} de la fonction d'onde ψ étant au nombre de 16. En omettant la démonstration [6], nous devons néanmoins rappeler ici que le système I. 6 demeure effectivement compatible au cours du temps.

Signalons encore que, à l'instar de ce qui arrive pour toutes les équations d'évolution de la Mécanique Ondulatoire, les équations I. 6 permettent d'établir aisément une relation de continuité,

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0\,,$$

les expressions de ρ et $\vec{j}$ étant les suivantes:

I. 12 $$\rho = \psi^* \frac{a_4 + b_4}{2} \psi$$

I. 13 $$\vec{j} = -c\psi^* \frac{a_4 \vec{b} + \vec{a} b_4}{2} \psi .$$

On considère I. 12 et I. 13 comme fournissant l'expression de la densité de probabilité et du flux de probabilité de la particule de spin maximum 1.

§ 2. La forme tensorielle des équations fondamentales.

Les équations I. 6 traduisent le comportement de la particule obtenue par la fusion de deux corpuscules de Dirac et, par là même, décrivent deux particules de valeur de spin différente, 0 ou 1. On doit donc pouvoir écrire ces équations sous une forme équivalente où apparaissent séparées les équations ayant trait à la particule de spin 0 et celles concernant la particule de spin 1. Aussi va-t-on rappeler brièvement dans ce qui suit le procédé qui permet d'obtenir un système équivalent à I. 6 et dans lequel la description de la particule de spin 0 est donnée indépendamment de celle de spin 1.

Pour cela, multiplions à gauche la première équation de I. 6 par $-ia_4$ et la deuxième par $-ib_4$. En tenant compte de I. 9 et I. 10, on obtient

I. 14
$$\left(\left[\frac{1}{ic} \partial_t \alpha_4 + \vec{\nabla} \cdot (i\alpha_4 \vec{\alpha}) - k_0 \right] \times I \right) \psi = 0$$

$$\left(I \times \left[\frac{1}{ic} \partial_t \alpha_4 + \vec{\nabla} \cdot (i\alpha_4 \vec{\alpha}) - k_0 \right] \right) \psi = 0 ,$$

k_0 désignant la constante

I. 15 $$k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar} .$$

Introduisons ici les coordonnées relativistes $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, et employons aussi les matrices γ_μ de von Neumann

($\mu = 1, 2, 3, 4$), définies à partir des matrices α_μ de Dirac de la façon suivante,

$$\text{I. 16} \qquad \gamma_k = i\alpha_4\alpha_k \quad (k = 1, 2, 3); \qquad \gamma_4 = \alpha_4 .$$

Le système I. 14 s'écrit alors

$$[(\Sigma\, \partial_\mu \gamma_\mu - k_0) \times I]\psi = 0$$

$$[I \times (\Sigma\, \partial_\mu \gamma_\mu - k_0)]\psi = 0 .$$

En utilisant, au lieu de la matrice colonne ψ, la matrice 4×4

$$\text{I. 17} \qquad \Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix},$$

on vérifie aisément, compte tenu de I. 7, que le système peut se mettre sous la forme équivalente

$$\text{I. 18} \qquad \begin{aligned} \Sigma\, \partial_\mu \gamma_\mu \Psi - k_0 \Psi &= 0 \\ \Sigma\, \partial_\mu \Psi \gamma_\mu^T - k_0 \Psi &= 0 , \end{aligned}$$

le symbole T désignant la matrice transposée. Arrêtons-nous maintenant sur le choix des matrices α_μ de Dirac. Comme il est bien connu, on a toute liberté de fixer leurs valeurs pour autant que celles-ci obéissent aux relations $\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu}$. Or on peut voir que les matrices

$$\text{I. 19} \qquad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

remplissent les conditions exigées et, dans tout notre travail, nous allons adopter ce choix por les α_μ. Partant de I. 19 on peut construire les quatre γ_μ définis en I. 16. Construisons aussi la matrice

I. 20 $$\Gamma = i\,\gamma_2\,\gamma_4\,.$$

On peut ainsi vérifier que l'on a les égalités

I. 21 $$\gamma_\mu^T\,\Gamma = -\,\Gamma\,\gamma_\mu \qquad (\mu = 1,2,3,4)\,.$$

Retournons alors aux équations I. 18 et multiplions-les à droite par Γ. En tenant compte de I. 21, on obtient

$$\Sigma\,\partial_\mu\,\gamma_\mu\,\Psi\,\Gamma - k_0\,\Psi\,\Gamma = 0$$

$$\Sigma\,\partial_\mu\,\Psi\,\Gamma\,\gamma_\mu + k_0\,\Psi\,\Gamma = 0\,,$$

c'est à dire, en ajoutant et retranchant,

I. 22 $$\begin{aligned}&\Sigma\,\partial_\mu\,\gamma_\mu\,\Psi\,\Gamma + \Sigma\,\partial_\mu\,\Psi\,\Gamma\,\gamma_\mu = 0\\ &\Sigma\,\partial_\mu\,\gamma_\mu\,\Psi\,\Gamma - \Sigma\,\partial_\mu\,\Psi\,\Gamma\,\gamma_\mu = 2\,k_0\,\Psi\,\Gamma\,.\end{aligned}$$

Considérons maintenant le système complet engendré par les quatre matrices γ_μ. Ce système, désigné d'une façon abrégée par γ_a, comprendra:

I. 23

a) les cinq matrices $\gamma_0 = \mathrm{I}$, $\gamma_k = i\alpha_4\alpha_k (k = 1,2,3)$, $\gamma_4 = \alpha_4$;

b) les six matrices $\gamma_{\mu\nu} = i\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,(\mu,\nu = 1,2,3,4;\ \mu < \nu)$, c'est à dire, $\gamma_{12} = i\,\gamma_1\,\gamma_2$, $\gamma_{13} = i\,\gamma_1\,\gamma_3$, $\gamma_{14} = i\,\gamma_1\,\gamma_4$, $\gamma_{23} = i\,\gamma_2\,\gamma_3$, $\gamma_{24} = i\,\gamma_2\,\gamma_4$ et $\gamma_{34} = i\,\gamma_3\,\gamma_4$;

c) les quatre matrices $\gamma_{\mu\nu\rho} = i\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,(\mu,\nu,\rho = 1,2,3,4;\ \mu < \nu < \rho)$, c'est à dire, $\gamma_{123} = i\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$, $\gamma_{124} = i\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_4$ $\gamma_{134} = i\,\gamma_1\,\gamma_3\,\gamma_4$ et $\gamma_{234} = i\,\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4$;

d) la matrice $\gamma_{1234} = \gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4$.

En partant du choix adopté pour les $\alpha\mu$ (I. 19), on peut vérifier que les seize γ_a précédemment définies sont toutes hermiti-

ques. En plus, cet ensemble de seize matrices étant complet, toute matrice 4×4 peut être écrite comme combinaison linéaire des γ_a. En particulier, ce sera le cas pour la matrice 4×4 $\Psi\Gamma$ qui intervient dans I. 22, laquelle peut donc s'écrire sous la forme d'un développement

$$\text{I. 24} \qquad \Psi\Gamma = \sum_{a=1}^{16} \varphi_a \gamma_a .$$

Les coefficientes φ_a sont des fonctions linéaires bien déterminées des ψ_{ik} et possèdent des propriétés de variance bien précises qui ont été données en [7]. Nous nous bornerons ici à les rappeler φ_0 est un scalaire, φ_{1234} est un pseudo-scalaire, et $\varphi_\mu\,(\mu=1,2,3,4)$ est un vecteur d'Univers; pour ce qui est des six fonctions $\varphi_{\mu\nu}(\mu,\nu=1,2,3,4;\mu<\nu)$ et des quatre fonctions $\varphi_{\mu\nu\rho}(\mu,\nu,\rho=1,2,3,4;\mu<\nu<\rho)$ elles sont, respectivement, les composantes distinctes d'un tenseur de rang 2 antisymétrique et d'un tenseur de rang 3 complètement antisymétrique.

En introduisant maintenant le développement I. 24 dans les équations I. 22, celles-ci prennent la forme

$$\text{I. 25} \qquad \begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{4} \partial_\mu \gamma_\mu \left(\sum_a^{16} \varphi_a \gamma_a\right) + \sum_\mu^4 \partial_\mu \left(\sum_a^{16} \varphi_a \gamma_a\right) \gamma_\mu = 0 \\ &\sum_\mu \partial_\mu \gamma_\mu \left(\sum_a^{16} \varphi_a \gamma_a\right) - \sum_\mu \partial_\mu \left(\sum_a \varphi_a \gamma_a\right) \gamma_\mu - 2 k_0 \sum_a^{16} \varphi_a \gamma_a = 0 \end{aligned}$$

Les définition set les propriétés de commutation des γ_a permettent alors d'écrire les premiers membres de ces équations comme des combinaisons linéaires des seize γ_a. On est ainsi conduit à des équations de la forme

$$\sum_a^{16} f_a \gamma_a = 0 \qquad \sum_a^{16} g_a \gamma_a = 0 ,$$

où les f_a et g_a sont des fonctions bien déterminées des φ_a et de leurs dérivées premières. Les γ_a étant linéairement indépendantes, il en découle que chaque coefficient f_a et g_a doit être

nul, ce qui permet d'obtenir les 32 équations

$$f_a = 0 \qquad g_a = 0 .$$

D'une façon plus précise, et en omettant les calculs, le système I. 25 conduit aux équations suivantes,

I. 26
$$\partial_\mu \varphi_\mu = 0 \qquad \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu = i k_0 \varphi_{\mu\nu}$$
$$\partial_\mu \varphi_{\mu\nu} = - i k_0 \varphi_\nu \qquad \partial_\mu \varphi_{\nu\varrho} + \partial_\varrho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\varrho\mu} = 0$$

$$\varphi_0 = 0$$

I. 27
$$\partial_\nu \varphi_0 = 0 \qquad \partial_\mu \varphi_{\mu\nu\varrho\sigma} = i k_0 \varphi_{\nu\varrho\sigma}$$
$$\partial_\mu \varphi_{\mu\nu\varrho} = 0 \qquad \partial_\mu \varphi_{\nu\varrho\sigma} - \partial_\nu \varphi_{\varrho\sigma\mu} + \partial_\varrho \varphi_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma \varphi_{\mu\nu\varrho} = - i k_0 \varphi_{\mu\nu\varrho\sigma} .$$

Ces équations sont équivalentes aux équations spinorielles I. 6 et, ainsi qu'on l'avait annoncé plus haut, elles se séparent en deux groupes bien distincts: l'un est formé par les équations I. 26 et ne fait intervenir que les grandeurs φ_μ et $\varphi_{\mu\nu}$, l'autre contient les équations I. 27 et concerne seulement les fonctions φ_0, $\varphi_{\mu\nu\varrho}$ et φ_{1234}. Le premier groupe d'équations se rapporte à la particule de spin 1 dont le comportement est ainsi décrit par un tenseur antisymétrique du second rang et par un vecteur d'Univers; étant donnée l'étroite parenté de I. 26 avec les équations classiques de l'électromagnétisme, M. de Broglie les a dénommées «équations maxwelliennes» (1). Le second groupe, formé par les «équations non maxwelliennes» I. 27, a trait à la particule de spin 0 qui apparait ainsi décrite par deux invariants et un tenseur de rang 3 complètement antisymétrique.

§ 3. Les équations maxwelliennes et non maxwelliennes.

La signification physique des grandeurs de champ φ_μ, $\varphi_{\mu\nu}$ associées à la particule de spin 1 a été donnée par M. de Broglie au moyen de l'identification suivante avec les grandeurs électro-

(1) La raison de cette désignation deviendra plus claire au paragraphe suivant lorsqu'on écrira les équations I. 26, I. 27 sous la forme I. 30, I. 31.

magnétiques $\vec{A}, V, \vec{E}, \vec{H}$ (1):

$$\text{I. 28} \qquad \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix} = K k_0 \begin{bmatrix} 0 & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \varphi_{21} & 0 & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 & \varphi_{34} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_x A_y A_z ; iV] = -iK[\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 ; \varphi_4],$$

avec $K = \hbar / 2\sqrt{m_0}$. D'une façon analogue, on définit pour la particule de spin 0:

$$\text{I. 29} \qquad \varphi_0 = I_1 \qquad\qquad \varphi_{1234} = i I_2$$
$$\varphi_{234} = i\sigma_1 \qquad \varphi_{134} = -i\sigma_2 \qquad \varphi_{124} = i\sigma_3 \qquad \varphi_{123} = \sigma_4 .$$

Avec ces définitions, les équations I. 26 et I. 27 prennent la forme suivante,

équations maxwelliennes

$$\text{I. 30} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t V = 0 && \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A} \\ &\frac{1}{c}\partial_t \vec{E} - \operatorname{rot} \vec{H} = k_0^2 \vec{A} && \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} \\ &\operatorname{div} \vec{E} = -k_0^2 && -\frac{1}{c}\partial_t \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{E} \\ & && \operatorname{div} H = 0 \end{aligned}$$

équations non maxwelliennes

$$\text{I. 31} \qquad \begin{aligned} &I_1 = 0 && \frac{1}{c}\partial_t \vec{\sigma} + \operatorname{grad} \sigma_4 = 0 \\ &\operatorname{grad} I_1 = 0 && i k_0 \sigma_4 = -\frac{1}{c}\partial_t I_2 \\ &\partial_t I_1 = 0 && \operatorname{grad} I_2 = i k_0 \vec{\sigma} \\ &\operatorname{rot} \vec{\sigma} = 0 && \frac{1}{c}\partial_t \sigma_4 + \operatorname{div} \vec{\sigma} = i k_0 I_2 . \end{aligned}$$

En laissant de côté les équations non maxwelliennes dont la signification ne parait pas très claire, nous nous occuperons des

(1) C'est à dire, le potentiel vecteur, le potentiel scalaire, le champ électrique et le champ magnétique, respectivement.

équations de la particule de spin 1. Ces équations appellent de nombreuses remarques et nous voulons en relever quelques unes, touchant à l'ordre de grandeur de k_0 ou, ce qui revient au même, de la masse propre $m_0 = \frac{\hbar}{c} k_0$.

Signalons, avant tout, que sans l'hypothèse $m_0 \neq 0$ on ne saurait obtenir les équations I. 6 par le procédé décrit en I. § 1, ne serait-ce parce que les équations de Dirac ne sont pas à même de décrire correctement des corpuscules de spin 1/2 et de masse nulle. En plus, la valeur non nulle de k_0 introduit des différences entre les équations maxwelliennes et les équations de l'électromagnétisme habituel, notamment que les potentiels électromagnetiques $\vec{A}$ et V ne sont plus ici des fonctions auxiliaires de calcul, mais de véritables grandeurs de champ. C'est ce que montrent les équations I. 30 qui assignent des valeurs bien déterminées pour $\vec{A}$ et V en partant des valeurs assumées par $\vec{E}$ et $\vec{H}$. L'ambiguité laissée par la théorie de Maxwel aux valeurs de $\vec{A}$ et V disparait ainsi, les potentiels électromagnétiques devenant des variables de champ à part entière (*).

Pourtant, si la masse propre du photon n'est pas nulle, elle doit certainement posséder une valeur extrêmement petite, dont la borne supérieure est située par M. de Broglie aux environs de 10^{-45} grammes, la petitesse même de cette valeur lui ayant permis d'écarter toutes les objections soulevées par l'hypothèse $m_0 \neq 0$ [8].

En conséquence, les termes en m_0^2 des équations I. 30 sont, eux aussi, extrêmement petits et dans une étude moins précise on peut raisonnablement les négliger. Faisant ainsi, on retrouve exactement les équations habituelles de l'électromagnétisme de Maxwell. On peut donc penser que pour la description quantique--et donc plus approfondie — du photon, les équations de Maxwell doivent être remplacées par les équations maxwelliennes I. 30, les deux théories s'identifiant à un niveau moins poussé toutes fois que l'on prend $k_0^2 \cong 0$.

Avant de finir ce chapitre nous voulons souligner une différence fondamentale entre la nature des variables de champ telles que nous les définissons en Mécanique Ondulatoire du Photon

(*) Signalons que les expériences de Boersch et ses collaborateurs [9], faisant suite à une analyse théorique de Bohm et Aharonov [10], appuyent l'hypothèse de la réalité physique des potentiels.

et telles qu'eles sont considérées en théorie de Maxwell. En théorie du photon, comme d'ailleurs dans toute la Mécanique Ondulatoire, les composantes ψ_{ik} de la fonction d'onde sont des fonctions complexes et, par suite de I. 24 et I. 28, les variables $\vec{A}$, V, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ le sont également. On doit opposer cela à ce qui a lieu dans l'électromagnétisme usuel où ces mêmes grandeurs de champ sont évidemment réelles. Rappelons, en effet, que si on est parfois amené à les considérér comme des grandeurs complexes, il n'en reste pas moins que c'est là un expédient mathématique utile pour mener à bien certains calculs et qui ne doit jamais nous faire oublier la nature réelle que la théorie de Maxwell assigne aux fonctions de champ [11].

CHAPITRE II

Généralisation de la théorie au cas des particules chargées

§ 1. Sur l'incompatibilité du système obtenu par la généralisation formelle de I. 6.

Le but du présent chapitre est de chercher à généraliser la théorie de la particule de spin maximum 1 de façon à lui permettre de décrire le comportement des particules de charge q se déplaçant dans un champ électromagnétique défini par les potentiels $\vec{A}$ et V [12]. Ce sera notamment le cas d'une particule α en cours d'accélération dans une machine à haute énergie. Soulignons avant tout que dans la plupart des équations de la Mécanique Ondulatoire des généralisations de ce type ne soulèvent aucune difficulté. En effet, une équation d'évolution de la Mécanique Ondulatoire peut toujours se représenter formellement par

$$f(-i\hbar\partial_t,\ i\hbar\partial_x,\ i\hbar\partial_y,\ i\hbar\partial_z)\psi = 0, \tag{II. 1}$$

où f désigne une certaine fonction des opérateurs $-i\hbar\partial_t$ et $i\hbar\vec{\nabla}$ (et éventuellement de certaines matrices à éléments constants) appliquée à la fonction d'onde ψ pouvant posséder plusieurs composantes. Or la Mécanique Ondulatoire, en faisant correspondre un opérateur linéaire hermitique à chaque grandeur physique, définit les opérateurs d'énergie et d'impulsion comme étant $-i\hbar\partial_t$ et $i\hbar\vec{\nabla}$, respectivement:

$$\begin{aligned} E &\longleftrightarrow E_{op} = -i\hbar\partial_t \\ \vec{p} &\longleftrightarrow \vec{p}_{op} = \ \ i\hbar\vec{\nabla}. \end{aligned} \tag{II. 2}$$

On doit remarquer que cette correspondance demeure la même dans le cas relativiste que dans le cas non relativiste, les opérateurs associés à l'énergie totale et à l'impulsion demeurant les mêmes (*). C'est pour cette raison que le schéma que nous décrivons ici contient les deux cas, l'équation II. 1 pouvant représenter une équation d'évolution aussi bien relativiste que non relativiste.

En vertu de II. 2, l'équation II. 1 peut s'écrire alors

$$[f(E, p_x, p_y, p_z)]_{op}\,\psi = 0. \qquad \text{II. 3}$$

La généralisation au cas des particules chargées se fait en employant un procédé qui est suggéré par la Mécanique Analytique et qui consiste à substituer dans les équations d'évolution E et $\vec{p}$ par $E - qV$ et $\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$, respectivement. Ceci revient à dire, en tenant compte de II. 2, que dans l'équation II. 3 les opérateurs doivent être remplacés comme suit:

$$\begin{aligned} E_{op} = -i\hbar\,\partial_t &\rightarrow (E - qV)_{op} = -i\hbar\,\partial_t - qV \\ \vec{p}_{op} = i\hbar\vec{\nabla} &\rightarrow \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)_{op} = i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}, \end{aligned} \qquad \text{II. 4}$$

l'équation généralisée devenant ainsi,

$$f\left(-i\hbar\,\partial_t - qV, i\hbar\,\partial_x - \frac{q}{c}A_x, i\hbar\,\partial_y - \frac{q}{c}A_y, i\hbar\,\partial_z - \frac{q}{c}A_z\right)\psi = 0.$$

C'est ce procédé que nous venons de rappeler qui nous donne par exemple, la généralisation de l'équation de Schrödinger, $[E - \vec{p}^2/2m]_{op} = 0$, qui devient $\left[E - qV - \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\right]_{op} = 0$. Parallèlement, l'équation de Dirac, $\left[\frac{E}{c} + \vec{p}\cdot\vec{\alpha} - m_0 c\,\alpha_4\right]_{op} = 0$, se transforme en l'équation généralisée $\left[\frac{E - qV}{c} + \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\alpha} - m_0 c\,\alpha_4\right]_{op} = 0$.

(*) Nous reviendrons sur cette question au Chapitre III.

Le problème se pose alors d'obtenir une généralisation analogue pour les équations relativistes I. 6 de la particule de spin maximum 1,

$$\text{II. 5} \qquad \begin{aligned} &\left[\frac{1}{c}\partial_t - \partial_x a_1 - \partial_y a_2 - \partial_z a_3 - i k_0 a_4\right]\psi = 0 \\ &\left[\frac{1}{c}\partial_t - \partial_x b_1 - \partial_y b_2 - \partial_z b_3 - i k_0 b_4\right]\psi = 0. \end{aligned}$$

Ce système, en faisant intervenir les définitions II. 2, peut s'écrire sous la forme

$$\text{II. 6} \qquad \begin{aligned} &[E/c + p_x a_1 + p_y a_2 + p_z a_3 - m_0 c\, a_4]_{op}\,\psi = 0 \\ &[E/c + p_x b_1 + p_y b_2 + p_z b_3 - m_0 c\, b_4]_{op}\,\psi = 0. \end{aligned}$$

Si l'on veut maintenant obtenir la généralisation de II. 6 pour le cas des particules chargées, une difficulté apparait alors, à savoir, que si l'on y procède à la substitution habituelle II. 4, le système obtenu,

$$\text{II. 7} \qquad \begin{aligned} &\left[\frac{1}{c}(E - qV) + \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{a} - m_0 c\, a_4\right]_{op}\psi = 0 \\ &\left[\frac{1}{c}(E - qV) + \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{b} - m_0 c\, b_4\right]_{op}\psi = 0, \end{aligned}$$

est incompatible. La raison en est que, à l'encontre de ce qui arrive en théorie de Klein-Gordon et en théorie de Dirac, nous avons affaire ici á un système contenant, outre les 16 équations d'évolution pour les 16 inconnues ψ_{ik}, 16 équations de condition. Dans le cas non généralisé le système est compatible parce que les équations d'évolution assurent la validité des équations de condition au cours du temps, une fois qu'elles sont supposées être respectées à un instant initial. Il n'en est plus de même ici comme nous allons le démontrer.

Commençons par ajouter et retrancher les équations de II. 7,

$$\text{II. 8} \qquad a) \quad \left[\left(\frac{-i\hbar\partial_t - qV}{c}\right) + \left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - m_0 c\,\frac{a_4 + b_4}{2}\right]\psi = 0$$

$$b)\quad \left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]\psi=0,$$

de façon à séparer les 16 équations de condition II. 8*b* des 16 équations d'évolution II. 8*a*. Il s'agit donc de montrer que les équations d'évolution *a*) ne suffisent pas à assurer la validité des équations de condition *b*) au cours du temps ou, ce qui revient au même, que

$$\partial_t\left\{\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]\psi\right\}\neq 0.$$

En effet, cette dérivée vient égale à

$$-\frac{q}{c}\left(\partial_t\vec{A}\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)\psi+\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]\partial_t\psi,$$

et en y introduisant l'expression de $\partial_t\psi$ tirée de II. 8*a*, on obtient

$$\begin{aligned}&-\frac{q}{c}\left(\partial_t\vec{A}\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)\psi-\\&-\frac{q}{i\hbar}\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]V\psi+\\&+\frac{c}{i\hbar}\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]\cdot\\&\cdot\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-m_0c\,\frac{a_4+b_4}{2}\right]\psi,\end{aligned}$$

ce qui revient à écrire

$$\begin{aligned}\text{II. 9}\qquad&-\frac{q}{c}\left(\partial_t\vec{A}\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)\psi-\\&-\frac{q}{i\hbar}\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]V\psi+\\&+\frac{c}{i\hbar}\left[\sum_{k=1}^{3}\left(i\hbar\,\partial_k-\frac{q}{c}A_k\right)^2\frac{a_k-b_k}{2}\,\frac{a_k+b_k}{2}+\right.\end{aligned}$$

$$+\sum_{k\neq l}^{3}\left(i\hbar\,\partial_l-\frac{q}{c}A_l\right)\left(i\hbar\,\partial_k-\frac{q}{c}A_k\right)\frac{a_l-b_l}{2}\,\frac{a_k+b_k}{2}-$$

$$-m_0 c\sum_k\left(i\hbar\,\partial_k-\frac{q}{c}A_k\right)\left(\frac{a_k-b_k}{2}\,\frac{a_4+b_4}{2}+\frac{a_4-b_4}{2}\,\frac{a_k+b_k}{2}\right)+$$

$$+m_0^2c^2\,\frac{a_4-b_4}{2}\,\frac{a_4+b_4}{2}\Big]\psi\,.$$

Or, en tenant compte de I. 9, I. 10, I. 11, on peut démontrer l'égalité suivante,

$$(a_\mu-b_\mu)(a_\nu+b_\nu)+(a_\nu-b_\nu)(a_\mu+b_\mu)=$$
$$=(a_\mu a_\nu+a_\nu a_\mu)-(b_\mu b_\nu+b_\nu b_\mu)=0\,,$$

et, cette relation étant valable pour $\mu,\nu=1,2,3,4$, on obtient en particulier

$$(a_k-b_k)(a_k+b_k)=0$$
$$(a_4-b_4)(a_4+b_4)=0$$
$$(a_k-b_k)(a_i+b_i)+(a_i-b_i)(a_k+b_k)=0$$
$$(a_k-b_k)(a_4+b_4)+(a_4-b_4)(a_k+b_k)=0\qquad(i,k=1,2,3;i\neq k)\,.$$

En outre, on reconnait aisément que l'on a aussi

$$\left(i\hbar\,\partial_l-\frac{q}{c}A_l\right)\left(i\hbar\,\partial_k-\frac{q}{c}A_k\right)-\left(i\hbar\,\partial_k-\frac{q}{c}A_k\right)\left(i\hbar\,\partial_l-\frac{q}{c}A_l\right)=$$
$$=i\hbar\,\frac{q}{c}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)_m\,,$$

l,k,m désignant une permutation circulaire de $1,2,3$.

La substitution en II. 9 des résultats précédents conduit alors à écrire

$$-\frac{q}{c}\left(\partial_t\vec{A}\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)\psi-$$

$$-\frac{q}{i\hbar}\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0 c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]V\psi-$$

$$-q\left[\sum_{k,l,m}(a_l-b_l)(a_k+b_k)(\mathrm{rot}\,\vec{A})_m\right]\psi\,.$$

Telle est donc l'expression de la dérivée par rapport au temps des équations de condition II. 8*b*. On voit que pour qu'elle soit toujours nulle il faut que $\partial_t \vec{A} = \text{rot}\, \vec{A} = V = 0$, ce qui équivaut à dire que les champs électromagnétiques extérieurs $\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A} - \text{grad}\, V$ et $\vec{H} = \text{rot}\, \vec{A}$ doivent être nuls, et l'on retombe ainsi sur les équations non généralisées du début.

La conclusion à en tirer est que l'on ne peut pas entreprendre la généralisation habituelle II. 4 sur les équations de la particule de spin maximum 1 — du moins sous leur forme II. 5 — sans arriver à un système qui ne soit incompatible.

§ 2. Les équations spinorielles de la particule de charge q et spin maximum 1.

Pour surmonter la difficulté signalée au paragraphe précédent nous remarquerons qu'il est possible d'écrire I. 6 sous la forme équivalente d'un système ne contenant que les 16 équations

$$\text{II. 10} \qquad \left[\frac{1}{c}\partial_t \frac{a_4 + b_4}{2} - \sum_{k=1}^{3} \partial_k \frac{a_4 b_k + a_k b_4}{2} - i k_0 a_4 b_4\right]\psi = 0 .$$

En effet, on démontre [6] que l'on peut déduire de ce système un autre ensemble de 16 équations, savoir,

$$\text{II. 11} \qquad \left[\frac{1}{c}\partial_t \frac{a_4 - b_4}{2} - \sum_{k=1}^{3} \partial_k \frac{a_4 b_k - a_k b_4}{2}\right]\psi = 0 .$$

Il suffit, pour cela, de multiplier II. 10 à gauche par $\frac{1}{c}\partial_t \frac{a_4 - b_4}{2}$ et de tenir compte de I. 9, I. 10, I. 11. On arrive ainsi aux équations

$$\frac{i k_0}{c}\partial_t \frac{a_4 - b_4}{2}\psi = \left(\sum_{k}^{3} \partial_k \frac{a_4 a_k - b_4 b_k}{2}\right)\frac{1}{c}\partial_t \frac{a_4 + b_4}{2}\psi .$$

Si l'on introduit dans ces équations l'expression de $\frac{1}{c}\partial_t \frac{a_4 + b_4}{2}\psi$ tirée de II. 10, un calcul sans difficulté conduit alors aux équa-

tions II. 11. Une fois II. 11 obtenu, on voit que II. 10, II. 11 est équivalent à II. 5. Effectivement, en ajoutant et retranchant II. 10 et II. 11, on obtient

$$\left[\frac{1}{c}\partial_t b_4 - \sum_{k=1}^{3}\partial_k a_k b_4 - i k_0 a_4 b_4\right]\psi = 0$$

$$\left[\frac{1}{c}\partial_t a_4 - \sum_{k}\partial_k a_4 b_k - i k_0 a_4 b_4\right]\psi = 0,$$

et en multipliant à gauche la première équation par b_4 et la deuxième par a_4, on retrouve le système II. 5.

On voit ainsi apparaitre l'importance du système de 16 équations II. 10, à partir duquel on pourrait tout aussi bien développer la théorie. Or, et c'est là un point très important, les équations II. 10 sont précisément les équations de Lagrange de la particule de spin maximum 1 (non chargée), et ce fait amène à penser que le formalisme lagrangien peut être utile pour venir à bout des difficultés signalées plus haut. D'ailleurs, étant donné que l'on va non seulement introduire les équations généralisées mais aussi refaire toute la théorie de la particule de spin maximum 1 supposée avoir maintenant une charge q et se déplacer dans un champ électromagnétique, nous allons rappeler rapidement quelques points de ce formalisme lagrangien qui seront utiles par la suite [8].

Ainsi peut-on voir, en prenant le Lagrangien

$$\text{II. 12}\quad \mathcal{L}_0 = \frac{\hbar c}{2i}\psi^*\left[\frac{1}{c}\partial_t\frac{a_4+b_4}{2} - \vec{\nabla}\cdot\frac{a_4\vec{b}+\vec{a}b_4}{2} - i k_0 a_4 b_4\right]\psi + \text{conj},$$

que les équations de Lagrange

$$\text{II. 13}\quad \partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial t}\right)} + \partial_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial x}\right)} + \partial_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial y}\right)} + \partial_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial z}\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{\mu\nu}} \qquad (\mu,\nu = 1,2,3,4),$$

donnent les équations II. 10 de la particule de spin maximum 1 (non chargée) ou, ce qui revient au même, les équations II. 5 car les deux systèmes sont équivalents.

Parallèlement, dans le cas de la théorie de Dirac, le même formalisme nous apprend que, étant donné le Lagrangien

$$\mathcal{L}_0^D = \frac{\hbar c}{2i}\psi^*\left[\frac{1}{c}\partial_t - \vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha} - i k_0 \alpha_4\right]\psi \,\text{conj},$$

les équations de Lagrange

$$\text{II. 14} \qquad \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t}\right)} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x}\right)} + \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y}\right)} + \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,3,4),$$

conduisent aux équations de Dirac. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que le cas simple de la particule en absence de champs électromagnétiques extérieurs, mais on vérifie aisément que si l'on ajoute à $\mathcal{L}_0^D$ le le terme réel $\mathcal{L}_I^D = -q\psi^*[\vec{A}\cdot\vec{\alpha} + V]\psi$, alors, en faisant intervenir le Lagrangien $\mathcal{L}_0^D + \mathcal{L}_I^D$ dans les équations II. 14, on obtient les équations de Dirac généralisées pour la particule de charge q en présence d'un champ électromagnétique de potentiels $\vec{A}$ et V.

Or on sait qu'en théorie de la particule de spin maximum 1 plusieurs expressions — et c'est notamment le cas de $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_0^D$ — peuvent s'obtenir formellement d'expressions correspondantes de la théorie de Dirac par la seule substitution de matrices

$$\text{II. 15} \qquad \begin{aligned} I &\longrightarrow \frac{a_4 + b_4}{2} \\ \alpha_\mu &\longrightarrow \frac{a_\mu b_4 + a_4 b_\mu}{2} \qquad (\mu = 1,2,3,4), \end{aligned}$$

où $\alpha_\mu\,(\mu = 1,2,3,4)$ sont les matrices de Dirac et I la matrice identité 4×4. Il y a donc lieu de penser que le Lagrangien $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, avec $\mathcal{L}_I$ obtenu de $\mathcal{L}_I^D$ par la substitution II. 15, sera le Lagrangien de la particule de spin maximum 1 et charge q en présence d'un champ électromagnétique de potentiels $\vec{A}$ et V.

Ce Lagrangien s'écrit alors

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \mathcal{L}_0 - q\,\psi^*\left[\vec{A}\cdot\frac{a_4\vec{b}+\vec{a}\,b_4}{2}+\frac{a_4+b_4}{2}V\right]\psi,$$

c'est à dire, en tenant compte de II. 12,

$$\text{II. 16}\qquad \mathcal{L}=\frac{\hbar c}{2i}\,\psi^*_{\sigma\tau}\left[\left(\frac{1}{c}\partial_t-\frac{iq}{\hbar c}V\right)\left(\frac{a_4+b_4}{2}\right)_{\sigma\tau,\mu\nu}-\right.$$

$$\left.-\sum_k^3\left(\partial_k+\frac{iq}{\hbar c}A_k\right)\left(\frac{a_4\,b_k+a_k\,b_4}{2}\right)_{\sigma\tau,\mu\nu}-i\,k_0\,(a_4\,b_4)_{\sigma\tau,\mu\nu}\right]\psi_{\mu\nu}+\text{conj}$$

Pour en déduire les équations de Lagrange calculons les dérivées suivantes,

$$\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_k\,\psi_{\mu\nu})}=-\frac{\hbar c}{2i}\left(\frac{a_k\,b_4+a_4\,b_k}{2}\right)_{\sigma\tau,\mu\nu}\psi^*_{\sigma\tau};$$

$$\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_t\,\psi_{\mu\nu})}=\frac{\hbar}{2i}\left(\frac{a_4+b_4}{2}\right)_{\sigma\tau,\mu\nu}\psi^*_{\sigma\tau};$$

$$\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\psi_{\mu\nu}}=-\frac{\hbar c}{2i}\left[\left(\frac{1}{c}\partial_t+\frac{2iq}{\hbar c}V\right)\left(\frac{a_4+b_4}{2}\right)_{\sigma\tau,\mu\nu}-\right.$$

$$\left.-\sum_k^3\left(\partial_k-\frac{2iq}{\hbar c}A_k\right)\left(\frac{a_k\,b_4+a_4\,b_k}{2}\right)_{\sigma\tau,\mu\nu}+2\,i\,k_0\,(a_4\,b_4)_{\sigma\tau,\mu\nu}\right]\psi^*_{\sigma\tau}.$$

Si l'on substitue ces expressions dans II. 13 on obtient

$$\left[\left(\frac{1}{c}\partial_t+\frac{iq}{\hbar c}V\right)\left(\frac{a_4+b_4}{2}\right)_{\sigma\tau,\mu\nu}-\right.$$

$$\left.-\sum_k^3\left(\partial_k-\frac{iq}{\hbar c}A_k\right)\left(\frac{a_4\,b_k+a_k\,b_4}{2}\right)_{\sigma\tau,\mu\nu}+i\,k_0\,(a_4\,b_4)_{\sigma\tau,\mu\nu}\right]\psi^*_{\sigma\tau}=0,$$

et en prenant les complexes conjugués de ces équations, on doit écrire, compte tenu de I. 8,

$$\text{II. 17}\qquad \left[\left(\frac{1}{c}\partial_t-\frac{iq}{\hbar c}V\right)\frac{a_4+b_4}{2}-\right.$$

$$\left.-\sum_k^3\left(\partial_k+\frac{iq}{\hbar c}A_k\right)\frac{a_k\,b_4+a_4\,b_k}{2}-i\,k_0\,a_4\,b_4\right]\psi=0.$$

Ce sont les équations spinorielles de la particule de spin maximum 1 et charge q dans un champ donné par les potentiels électromagnétiques $\vec{A}$ et V. De par sa nature même (c'est un ensemble de 16 équations différentielles du premier ordre avec 16 fonctions $\psi_{\mu\nu}$), ce système ne soulève pas de problèmes de compatibilité. En plus, si l'on y fait $\vec{A} = V = 0$ (ou $q = 0$), on retombe sur les équations II. 10 dont on peut déduire le système II. 5 par le procédé dont il a été question plus haut.

§ 3. Le quadrivecteur densité-flux de courant et le tenseur densité d'énergie-impulsion.

A partir des équations II. 17 on doit chercher à savoir si l'existence de $\vec{A}$ et V n'introduit pas quelques différences dans les grandeurs physiques attachées à la particule par rapport à ces mêmes grandeurs lorsque $\vec{A} = V = 0$.

La définition du 4-vecteur densité-flux de probabilité n'est pas modifiée. En effet, on vérifie aisément que les équations II. 17 impliquent toujours une relation de continuité $\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$, avec

$$\text{II. 18} \qquad \rho = \psi^* \frac{a_4 + b_4}{2} \psi$$

$$\text{II. 19} \qquad \vec{j} = -c\psi^* \frac{\vec{a}\, b_4 + a_4 \vec{b}}{2} \psi ,$$

$i\rho$ et $\vec{j}/c$ étant les quatre composantes d'un vecteur d'Univers que nous désignerons par f_μ (*). Puisque la particule est maintenant supposée avoir une charge q on peut, à partir de $f_\mu = [i\rho; \vec{j}/c]$, former le 4-vecteur densité-flux de courant dont les composantes sont alors $s_\mu = q f_\mu = q[i\rho; \vec{j}/c]$, l'équation de continuité $\partial_\mu s_\mu = 0$ exprimant la conservation de la charge. On peut

(*) On emploie les coordonnées d'Univers $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$.

montrer qu'il est possible d'exprimer ce vecteur sous une autre forme qui nous sera utile par la suite. En effet, on obtient à partir du Lagrangien II. 16:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} = -q\psi^* \frac{a_4 b_k + a_k b_4}{2}\psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} = -q\psi^* \frac{a_4 + b_4}{2}\psi,$$

et, compte tenu du fait que $\mathcal{A}_\mu = [iV; \vec{A}]$ est un vecteur d'Univers, on a

II. 20 $$s_\mu = q f_{ri} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\mu}.$$

Passons maintenant à l'étude du tenseur densité d'énergie-impulsion de la particule, $T_{\mu\nu}$, et soulignons que les considérations qui vont suivre concernent n'importe quel type de particule (et pas seulement la particule de spin maximum 1) pour autant qu'elle puisse être décrite à partir d'un Lagrangien $\mathcal{L}$, fonction de certaines variables de champ r_a, de leurs dérivées premières et de leurs complexes conjugués (*):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(r_a, r_a^*, \partial_\nu r_a, \partial_\nu r_a^*).$$

Supposons pour commencer que la particule soit dans un champ nul (ou que $q = 0$). Dans ce cas, le tenseur doit obéir à la condition de divergence nulle $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$. Mais si, comme c'est le cas que nous allons étudier, $\vec{A} \neq 0$, $V \neq 0$ et $q \neq 0$, alors $\partial_\mu T_{\mu\nu}$ n'est plus nul mais égal à un vecteur d'Univers dont les composantes d'espace sont les trois composantes de la force de Lorentz $q\rho(\vec{E} - \frac{1}{c}\vec{H} \wedge \vec{v})$ et la composante de temps est le

(*) Le Lagrangien sera aussi fonction de $xyzt$ toutes fois que la particule n'est pas isolée.

travail $\frac{i}{c} q \varrho \vec{E} \cdot \vec{v}$. Avec nos notations (*) ceci s'exprime par

II. 21 $$\partial_\mu T_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\nu\varrho} s_\varrho .$$

A partir de cette relation et en faisant appel à un procédé employé autrefois par Schrödinger, on peut déterminer la forme de $T_{\mu\nu}$. Pour ce faire, on commence par calculer la dérivée du Lagrangien par rapport à la coordonnée x_β :

$$\partial_\beta \mathcal{L} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} \frac{\partial \eta_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} + \text{conj} \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\sigma} \frac{\partial \mathcal{A}_\sigma}{\partial x_\beta} .$$

Les equations de Lagrange permettent alors de poser

$$\partial_\beta \mathcal{L} = \partial_\sigma (\delta_{\sigma\beta} \mathcal{L}) = \left\{ \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \right) \frac{\partial \eta_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} + \text{conj} \right\} +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\sigma} \frac{\partial \mathcal{A}_\sigma}{\partial x_\beta}$$

$$= \partial_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \frac{\partial \eta_a}{\partial x_\beta} + \text{conj} \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\sigma} \frac{\partial \mathcal{A}_\sigma}{\partial x_\beta} ,$$

c'est à dire,

II. 22 $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\sigma} \frac{\partial \mathcal{A}_\sigma}{\partial x_\beta} = \partial_\sigma \left[\delta_{\sigma\beta} \mathcal{L} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \partial_\beta \eta_a + \text{conj} \right) \right] .$$

Retournons à l'équation II. 21. En vertu de l'équation de conservation de la charge, on peut écrire

$$\partial_\alpha T_{\alpha\beta} = \mathcal{F}_{\beta\sigma} s_\sigma = (\partial_\beta \mathcal{A}_\sigma - \partial_\sigma \mathcal{A}_\beta) s_\sigma = (\partial_\beta \mathcal{A}_\sigma) s_\sigma - \mathcal{A}_\beta \partial_\sigma s_\sigma - s_\sigma \partial_\sigma \mathcal{A}_\beta =$$

$$= s_\sigma \partial_\beta \mathcal{A}_\sigma - \partial_\sigma (s_\sigma \mathcal{A}_\beta) ,$$

(*) En plus des coordonnées d'Univers $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ nous avons déjà défini le vecteur potential d'Univers $\mathcal{A}_\mu = [iV ; \vec{A}]$. On définira le tenseur de champ électromagnétique par $\mathcal{F}_{\mu\nu}$: $\mathcal{F}_{14} = -iE_x$, $\mathcal{F}_{24} = -iE_y$, $\mathcal{F}_{34} = -iE_z$, $\mathcal{F}_{12} = \mathcal{F}_z$, $\mathcal{F}_{31} = H_y$, $\mathcal{F}_{23} = H_x$ ($\mathcal{F}_{\mu\nu} = -\mathcal{F}_{\nu\mu}$). En conséquence, les relations de définition des champs, $\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \text{grad } V$ et $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ s'écrivent $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$.

et compte tenu de II. 20 et II. 22, on obtient finalement

$$\partial_\alpha T_{\alpha\beta} = \partial_\sigma \left[\delta_{\sigma\beta} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\sigma} \mathcal{A}_\beta - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \frac{\partial \eta_a}{\partial x_\beta} + \text{conj} \right) \right].$$

Cette relation conduit à définir le tenseur $T_{\alpha\beta}$ de densité d'énergie-impulsion de la particule décrite par le Lagrangien $\mathcal{L}(\eta_a, \eta_a^* \cdots)$ et se déplaçant dans un champ électromagnétique de potentiel $\mathcal{A}_\mu$ de la façon suivante,

$$\text{II. 23} \qquad T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}\alpha} \mathcal{A}_\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \eta_a)} \frac{\partial \eta_a}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \eta_a^*)} \frac{\partial \eta_a^*}{\partial x_\beta}.$$

Si maintenant on considère le cas de la particule de spin maximum 1 décrite par le Lagrangien II. 16, fonction des grandeurs spinorielles $\psi_{\mu\nu}$, on obtient

$$\text{II. 24} \quad T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}\alpha} \mathcal{A}_\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \psi_{\mu\nu})} \frac{\partial \psi_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \psi_{\mu\nu}^*)} \frac{\partial \psi_{\mu\nu}^*}{\partial x_\beta}.$$

Cette expression a symétrique se réduit bien à la forme connue de $T_{\mu\nu}$ donnée par M. de Broglie pour le cas où $\mathcal{A}_\mu = 0$ (ou $q = 0$) [8].

§ 4. Les équations tensorielles de la particule de spin maximum 1 et de charge q.

Dans ce paragraphe nous allons présenter la forme tensoriel le des équations spinorielles II. 17,

$$\text{II. 25} \quad \left[\left(\frac{1}{ic} \partial_t + \frac{iq}{\hbar c} iV \right) \frac{a_4 + b_4}{2} + i \left(\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar c} \vec{A} \right) \cdot \frac{\vec{a} b_4 + \vec{b} a_4}{2} - \right.$$
$$\left. - k_0 a_4 b_4 \right] \psi = 0.$$

Pour commencer, et en partant de I. 9 e I. 10 e I. 11, on vérifie aisément que

$$a_4 b_4 (a_4 + b_4) = a_4 + b_4$$
$$a_4 b_4 (a_4 b_k + a_k b_4) = a_4 a_k + b_4 b_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$
$$a_4 b_4 \cdot a_4 b_4 = I.$$

Par conséquent, si on multiplies II. 25 à gauche par $a_4 b_4$, on obtient

$$\text{II. 26} \qquad \left[\left(\frac{1}{ic}\partial_t + \frac{iq}{hc} iV\right)\frac{a_4+b_4}{2} + i\left(\vec{\nabla} + \frac{iq}{hc}\vec{A}\right)\cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{a_4\vec{a}+b_4\vec{b}}{2} - k_0\right]\psi = 0.$$

Définissons maintenant, à partir du potentiel $\mathcal{A}_\mu = [iV; \vec{A}]$ et du gradient $\partial_\mu = \left[\frac{1}{ic}\partial_t; \vec{\nabla}\right]$, le vecteur d'Univers

$$\text{II. 27} \qquad P_\mu = ih\,\partial_\mu - \frac{q}{c}\mathcal{A}_\mu .$$

Les équations II. 26 prennent alors la forme

$$\text{II. 28} \qquad \left[a_4 P_4 + \sum_{k=1}^{3} i a_4 a_k P_k - 2 i m_0 c\right]\psi +$$

$$+\left[b_4 P_4 + \sum_{k}^{3} i b_4 b_k P_k\right]\psi = 0.$$

Introduisons la matrice 4×4 Ψ formée avec les composantes $\psi_{\mu\nu}$ de la matrice colonne ψ, disposées selon I. 17. On vérifie ainsi, en tenant compte de I. 5, que les équations II. 28 peuvent s'écrire

$$\left[\alpha_4 P_4 + \sum_{k=1}^{3} i\sigma_4\alpha_k P_k - 2 i m_0 c\right]\Psi +$$

$$+\left(\left[\alpha_4 P_4 + \sum_{k}^{3} i\alpha_4\alpha_k P_k\right]\Psi^T\right)^T = 0,$$

c'est à dire, en employant les matrices γ_μ définies en I. 16,

$$\left[\sum_{\mu}^{4}\gamma_\mu P_\mu - 2 i m_0 c\right]\Psi + \sum_{\mu}^{4} P_\mu \Psi \gamma_\mu^T = 0 .$$

Si on multiplie à droite ce système par la matrice Γ introduite en I. 20 nous avons, par I. 21,

$$\text{II. 29} \qquad \left[\sum_{\mu}^{4} \gamma_\mu P_\mu - 2 i m_0 c\right] \Psi \Gamma - \sum_{\mu}^{4} P_\mu \Psi \Gamma \gamma_\mu = 0 .$$

Or la matrice $\Psi\Gamma$, comme d'ailleurs toute matrice 4×4, peut être exprimée comme une combinaison linéaire des 16 γ_a qui forment le système complet engendré par les quatre matrices γ_μ de von Neumann, et dont il a été question en I. 23. Posons alors, avec certains coefficients φ_a,

$$\Psi\Gamma = \sum_{a}^{16} \varphi_a \gamma_a = \varphi_0 \gamma_0 + \sum_{\mu}^{4} \varphi_\mu \gamma_\mu + \sum_{\substack{\mu,\nu=1,2,3,4 \\ \mu<\nu}} \varphi_{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} +$$

II. 30

$$+ \sum_{\substack{\mu,\nu,\varrho=1,2,3,4 \\ \mu<\nu<\varrho}} \varphi_{\mu\nu\varrho} \gamma_{\mu\nu\varrho} + \varphi_{1234} \gamma_{1234} \text{ (*)} .$$

En introduisant le développement II. 30 dans les équations II. 29 et en y égalant à zéro les coefficients des seize matrices γ_a (car elles sont linéairement indépendantes), le calcul nous conduit aux équations suivantes,

$$P_\mu \varphi_{\mu\nu} = m_0 c \varphi_\nu$$

II. 31

$$P_\mu \varphi_\nu - P_\nu \varphi_\mu = - m_0 c \varphi_{\mu\nu}$$

$$\varphi_0 = 0$$

II. 32 $$P_\mu \varphi_{\mu\nu\varrho\sigma} = - m_0 c \varphi_{\nu\varrho\sigma}$$

$$P_\mu \varphi_{\nu\varrho\sigma} - P_\nu \varphi_{\varrho\sigma\mu} + P_\varrho \varphi_{\sigma\mu\nu} - P_\sigma \varphi_{\mu\nu\varrho} = m_0 c \varphi_{\mu\nu\varrho\sigma} .$$

Si l'on tient compte de la définition II. 27 de l'opérateur P_μ, on peut écrire ces équations sous la forme explicite

---

(*) Pour ce qui est des propriétés de variance des φ_a, nous renvoyons au Chapitre I, § 2.

II. 33

$$\begin{cases} \partial_\mu \varphi_{\mu\nu} + \dfrac{iq}{\hbar c} \mathcal{A}_\mu \varphi_{\mu\nu} = -ik_0 \varphi_\nu \\ \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu + \dfrac{iq}{\hbar c} (\mathcal{A}_\mu \varphi_\nu - \mathcal{A}_\nu \varphi_\mu) = ik_0 \varphi_{\mu\nu} \end{cases}$$

$$(k_0 = m_0 c/\hbar)$$

II. 34

$$\begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ \partial_\mu \varphi_{\mu\nu\rho\sigma} + \dfrac{iq}{\hbar c} \mathcal{A}_\mu \varphi_{\mu\nu\rho\sigma} = ik_0 \varphi_{\nu\rho\sigma} \\ \partial_\mu \varphi_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu \varphi_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho \varphi_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma \varphi_{\mu\nu\rho} + \\ \dfrac{iq}{\hbar c} (\mathcal{A}_\mu \varphi_{\nu\rho\sigma} - \mathcal{A}_\nu \varphi_{\rho\sigma\mu} + \mathcal{A}_\rho \varphi_{\sigma\mu\nu} - \mathcal{A}_\sigma \varphi_{\mu\nu\rho}) = -ik_0 \varphi_{\mu\nu\rho\sigma}. \end{cases}$$

Ce sont les équations tensorielles de la particule de spin maximum 1 et charge q dans un champ $\mathcal{A}_\mu$, équivalentes aux équations spinorielles II. 17. A l'instar de ce qui arrivait déjà dans la théorie non généralisée (voir équations I. 26, I. 27), la description de la particule de spin 0 et celle de la particule de spin 1 sont indépendantes; les trois dernières équations traduisent le comportement de la particule de spin 0, tandis que les deux premières concernent la particule de spin 1.

La parenté des équations II. 33 avec les équations maxwelliennes de M. de Broglie est évidente. En effet, en prenant $\mathcal{A}_\mu = 0$ (ou $q = 0$) on obtient deux de ces équations maxwelliennes,

$$\partial_\mu \varphi_{\mu\nu} = -ik_0 \varphi_\nu, \qquad \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu = ik_0 \varphi_{\mu\nu}.$$

Or de la première on déduit que $-ik_0 \partial_\nu \varphi_\nu = \partial_\nu \partial_\mu \varphi_{\mu\nu} = 0$, c'est à dire,

$$\partial_\nu \varphi_\nu = 0;$$

tandis que la deuxième nous donne $ik_0(\partial_\mu \varphi_{\nu\rho} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\rho \varphi_{\mu\nu}) = ik_0(\partial_\mu \partial_\nu \varphi_\rho - \partial_\mu \partial_\rho \varphi_\nu + \partial_\nu \partial_\rho \varphi_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \varphi_\rho + \partial_\rho \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\rho \partial_\nu \varphi_\mu) = 0$, c'est à dire,

$$\partial_\mu \varphi_{\nu\rho} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\rho \varphi_{\mu\nu} = 0.$$

On retrouve ainsi toutes les équations maxwelliennes I. 26. Des raisonnements identiques ont lieu en ce qui concerne les équations II. 34 vis-à-vis des équations non maxwelliennes I. 27.

§ 5. Le formalisme lagrangien exprimé en grandeurs tensorielles.

Dans ce paragraphe nous déterminons la forme du Lagrangien lorsqu'on l'exprime en grandeurs tensorielles, c'est à dire, lorsqu'on remplace les spineurs $\psi_{\mu\nu}$ de II. 16 par leurs expressions en combinaisons linéaires des φ_a, donnés par II. 30. Pour ce faire, on construit d'abord la matrice Γ et les seize matrices γ_a définies en I. 20 et I. 23, et ceci en employant la forme I. 19 adoptée pour les α_μ. Une fois Γ et les γ_a obtenues et introduites dans le développement II. 30, on arrive aux relations suivantes,

$$\psi_{11} = -\varphi_1 + i\varphi_2 + i\varphi_{14} + \varphi_{24} \qquad \psi_{12} = \varphi_3 - i\varphi_{34} - \varphi_{123} - i\varphi_{1234}$$
$$\psi_{21} = \varphi_3 - i\varphi_{34} + \varphi_{123} + i\varphi_{1234} \qquad \psi_{22} = \varphi_1 + i\varphi_2 - i\varphi_{14} + \varphi_{24}$$
$$\psi_{31} = -\varphi_{13} + i\varphi_{23} + \varphi_{134} - i\varphi_{234} \qquad \psi_{32} = i\varphi_0 - i\varphi_4 - i\varphi_{12} + i\varphi_{124}$$
$$\psi_{41} = -i\varphi_0 + i\varphi_4 - i\varphi_{12} + i\varphi_{124} \qquad \psi_{42} = -\varphi_3 - i\varphi_{25} + \varphi_{134} + i\varphi_{234}$$

$$\psi_{13} = -\varphi_{13} + i\varphi_{23} - \varphi_{134} + i\varphi_{234} \qquad \psi_{14} = i\varphi_0 + i\varphi_4 - i\varphi_{12} - i\varphi_{124}$$
$$\psi_{23} = -i\varphi_0 - i\varphi_4 - i\varphi_{12} - i\varphi_{124} \qquad \psi_{24} = -\varphi_{13} - i\varphi_{23} - \varphi_{134} - i\varphi_{234}$$
$$\psi_{33} = \varphi_1 - i\varphi_2 + i\varphi_{14} + \varphi_{24} \qquad \psi_{34} = -\varphi_3 - i\varphi_{34} + \varphi_{123} - i\varphi_{1234}$$
$$\psi_{43} = -\varphi_3 - i\varphi_{34} - \varphi_{123} + i\varphi_{1234} \qquad \psi_{44} = -\varphi_1 - i\varphi_2 - i\varphi_{14} + \varphi_{24}$$

Ce sont ces valeurs des $\psi_{\mu\nu}$ que l'on doit substituer dans le Lagrangien II. 16. Après un calcul long mais sans difficulté, on obtient l'expression de $\mathcal{L}$ en grandeurs tensorielles. On trouve alors que $\mathcal{L}$ possède la forme

II. 35 $$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(0)}$$

où $\mathcal{L}^{(1)}$ est un fonction réelle des grandeurs de champ décrivant la particule de spin 1 (le vecteur φ_μ et le tenseur antisymétrique $\varphi_{\mu\nu}$), de leurs dérivées premières et de leurs conjugués, et $\mathcal{L}^{(0)}$ est unc fonction réelle de $\varphi_0, \varphi_{\mu\nu}$, et φ_{1234} (grandeurs de champ

associées à la particule de spin 0), de leurs dérivées premières et de leurs complexes conjugués. L'expression exacte de $\mathcal{L}^{(1)}$ s'écrit

$$\text{II. 36} \qquad \mathcal{L}^{(1)} = -2c\left[\sum_{\mu}^{4}\varphi_{\mu}^{*}\left(\sum_{\nu}^{4}P_{\nu}\varphi_{\mu\nu}+m_0 c\,\varphi_{\mu}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\varphi_{\mu\nu}^{*}(m_0 c\,\varphi_{\mu\nu}+P_{\mu}\varphi_{\nu}-P_{\nu}\varphi_{\mu})\right]+\text{conj}$$

$$\left(P_{\mu}=i\hbar\,\partial_{\mu}-\frac{q}{c}\mathcal{A}_{\mu}\right)$$

et celle de $\mathcal{L}^{(0)}$ vient égale à

$$\text{II. 37} \qquad \mathcal{L}^{(0)} = -2c\,\varphi_{1234}^{*}(P_1\varphi_{234}-P_2\varphi_{134}+P_3\varphi_{124}-P_4\varphi_{123})-$$

$$-2c\,(\varphi_{234}^{*}P_1\varphi_{1234}-\varphi_{134}^{*}P_2\varphi_{1234}+\varphi_{124}^{*}P_3\varphi_{1234}-\varphi_{123}^{*}P_4\varphi_{1234})-$$

$$-2m_0c^2(-\varphi_0^{*}\varphi_0-\varphi_{1234}^{*}\varphi_{1234}+\varphi_{123}^{*}\varphi_{123}+\varphi_{124}^{*}\varphi_{124}+$$

$$+\varphi_{134}^{*}\varphi_{134}+\varphi_{234}^{*}\varphi_{234})+\text{conj.}$$

En partant de II. 36, II. 37, on peut calculer les 16 équations tensorielles de Lagrange,

$$\sum_{\nu=1}^{4}\partial_{\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\varphi_a)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}$$

$$(\varphi_a=\varphi_0,\varphi_{\mu},\varphi_{\mu\nu},\varphi_{\mu\nu\rho},\varphi_{1234};\mu,\nu,\rho=1,2,3,4;\mu<\nu<\rho),$$

lesquelles, comme il fallait s'y attendre, redonnent bien II. 33, II. 34. C'est d'ailleurs en introduisant ces équations dans les expressions II. 36, II. 37 que l'on voit que

$$\text{II. 38} \qquad \mathcal{L}\equiv\mathcal{L}^{(1)}\equiv\mathcal{L}^{(0)}\equiv 0,$$

comme c'était déjà le cas dans la théorie non généralisée.

En considérant l'expression II. 35 de $\mathcal{L}$, on voit que l'étude de la particule de spin 0 peut se faire séparément de la particule de spin 1, et inversement. En effet, lorsqu'on veut étudier seulement la particule de spin 1 on considérera que la particule de spin 0 n'existe pas, ce qui revient à prendre $\varphi_0=\varphi_{\mu\nu\rho}=\varphi_{1234}=0$ et donc $\mathcal{L}^{(0)}=0$ et $\mathcal{L}=\mathcal{L}^{(1)}$. Inversement, on posera $\varphi_{\mu}=\varphi_{\mu\nu}=0$

si seule la particule de spin 0 nous intéresse. En conséquence, on aura alors $\mathcal{L}^{(1)} = 0$ et donc $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)}$. Les équations de Lagrange étant linéaires, on peut s'assurer que cette séparation se maintiendra tout au long de la théorie, pour autant que l'on emploie toujours les grandeurs tensorielles. C'est ce que nous montrent les définitions II. 20 et II. 23 du 4-vecteur densité-flux de courant et du tenseur densité d'énergie-impulsion:

II. 39
$$s_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\mu}$$

II. 40
$$T_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\mu}\mathcal{A}_\nu - \left(\sum_a^{16} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \partial_\nu \varphi_a + \text{conj}\right). (*)$$

En effet, compte tenu de la forme II. 35 du Lagrangien, s_μ vient donné par une somme de deux vecteurs, $s_\mu^{(0)}$ et $s_\mu^{(1)}$, le premier étant une fonction des grandeurs de champ se rapportant à la particule de spin 0 et le second ne contenant que les grandeurs qui décrivent la particule de spin 1:

$$s_\mu = s_\mu^{(0)} + s_\mu^{(1)}.$$

Des considérations analogues sont valables pour $T_{\mu\nu}$ qui, en grandeurs tensorielles, prend la forme

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)}.$$

D'une façon plus précise et en partant de II. 36, II. 37, II. 39, le calcul donne pour $s_\mu^{(1)}$:

II. 41
$$s_\mu^{(1)} = 4\,q\,\varphi_\nu^*\,\varphi_{\nu\mu} + \text{conj},$$

et l'on trouve pour $s_\mu^{(0)}$:

$$s_\mu^{(0)} = 4\,q\,\varphi_{1234}^*\,\varphi_{\nu\rho\sigma} + \text{conj}$$

($\mu\nu\rho\sigma$ en permutation circulaire de 1, 2, 3, 4).

(*) La sommation sur a est étundue à l'ensemble des 16 grandeurs tensorielles de champ équivalentes aux 16 $\psi_{\mu\nu}$: φ_0, φ_μ, $\varphi_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu\rho}$, φ_{1234} ($\mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4$; $\mu < \nu < \rho$).

On obtient de même les expressions de $T^{(1)}_{\mu\nu}$ et $T^{(0)}_{\mu\nu}$ dont la somme est égale à $T_{\mu\nu}$. Le tenseur $T^{(1)}_{\mu\nu}$ s'écrit

$$\text{II. 42} \qquad T^{(1)}_{\mu\nu} = -s^{(1)}_{\mu}\,\mathcal{A}_{\nu} - 2\,i\,c\,\hbar\,(\varphi_{\sigma\mu}\,\partial_{\nu}\,\varphi^{*}_{\sigma} + \varphi_{\sigma}\,\partial_{\nu}\,\varphi^{*}_{\sigma\mu} - \text{conj}),$$

et $T^{(0)}_{\mu\nu}$ possède la forme

$$T^{(0)}_{\mu\nu} = -s^{(0)}_{\mu}\,\mathcal{A}_{\nu} - 2\,i\,c\,\hbar\left(\varphi^{*}_{\alpha\beta\gamma}\,\partial_{\nu}\,\varphi_{1234} + \varphi^{*}_{1234}\sum_{\substack{\delta,\varepsilon,\eta=1\\ \delta<\varepsilon<\eta}}^{4}\partial_{\nu}\,\varphi_{\delta\varepsilon\eta} - \text{conj}\right)$$

($\mu, \alpha, \beta, \gamma$ en permutation circulaire de 1, 2, 3, 4).

§ 6. Comparaison avec les équations de Proca.

Pour terminer ce chapitre nous devons comparer quelques uns des résultats ci-dessus exposés avec des résultats correspondants dûs à M. Proca. En effet, les équations II. 33 (*) que nous avons obtenues comme décrivant un cas particulier (celui du spin 1) dans la théorie généralisée de la particule de spin maximum 1 ont été jadis étudiées par M. Proca qui les avait introduites par une autre voie [13].

Pour procéder à la comparaison, nous considérerons seulement le cas de la particule de spin 1. Par conséquent, le 4-vecteur s_{μ} sera maintenant égal à $s^{(1)}_{\mu}$ et le tenseur $T_{\mu\nu}$ se réduira à $T^{(1)}_{\mu\nu}$ (II. 41 et II. 42, respectivement). En plus, le Lagrangien prend la forme $\mathcal{L}^{(1)}$ (II. 36) d'où découlent les seulesé quations II. 33, c'est à dire

$$\text{II. 43} \qquad a) \qquad \partial_{\mu}\,\varphi_{\mu\nu} + \frac{i\,q}{\hbar\,c}\,\mathcal{A}_{\mu}\,\varphi_{\mu\nu} = -i\,k_0\,\varphi_{\nu}$$

$$b) \qquad i\,k_0\,\varphi_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\,\varphi_{\nu} - \partial_{\nu}\,\varphi_{\mu} + \frac{i\,q}{\hbar\,c}\,(\mathcal{A}_{\mu}\,\varphi_{\nu} - \mathcal{A}_{\nu}\,\varphi_{\mu}).$$

On voit de par ces équations que si l'on considère *b*) comme servant à définir $\varphi_{\mu\nu}$ au moyen de φ_{μ}, la particule peut aussi

(*) Ou plutôt, les équations II. 44 que nous déduirons par la suite et qui leur sont équivalentes.

bien être décrite par le 4-vecteur φ_μ seulement, et ceci au moyen de l'équation *a*) où l'on substitue $\varphi_{\mu\nu}$ par son expression déduite de *b*). C'est à dire que l'équation d'évolution devient alors

$$\text{II. 44} \quad \left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}\mathcal{A}_\mu\right)\left[\left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}\mathcal{A}_\mu\right)\varphi_\nu - \left(\partial_\nu + \frac{iq}{\hbar c}\mathcal{A}_\nu\right)\varphi_\mu\right] = k_0^2\,\varphi_\nu ,$$

ce qui est la forme sous laquelle M. Proca a présenté ses équations.

On pourrait donc essayer de trouver une théorie vectorielle pour la particule de spin 1, théorie qui n'employerait que le seul vecteur d'Univers φ_μ. En particulier, le lagrangien de cette théorie doit être une function réelle de φ_μ, de ses dérivées premières et de leurs conjugués, l'équation de Lagrange qui en découle devant être égale à II. 44. Nous remarquerons tout de suite que ce lagrangien n'est pas celui que l'on obtient de $\mathcal{L}^{(1)}$ en y remplaçant $\varphi_{\mu\nu}$ par son expression en φ_ν tirée de II. 43b, et ceci parce que $\mathcal{L}^{(1)}$ deviendrait alors une fonction de $\varphi_\mu, \varphi_\mu^*$ et de leurs dérivées premières et *secondes*.

Or ce qui caractérise fondamentalement la théorie de M. Proca est le fait qu'elle n'utilise qu'un vecteur d'Univers pour la description de la particule, φ_μ. On doit donc s'attendre à ce que sa théorie découle d'un lagrangien différent de $\mathcal{L}^{(1)}$. Et en effet, son lagrangien est

$$\text{II. 45} \quad \mathcal{L}^{Pr} = \frac{c^2}{2}(P_\mu P_\nu - P_\nu \varphi_\mu)^*(P_\mu \varphi_\nu - P_\nu \varphi_\mu) + m_0^2 c^4 \varphi_\mu^* \varphi_\mu$$

$$\left(P_\mu = i\hbar\,\partial_\mu - \frac{q}{c}\mathcal{A}_\mu\right),$$

et l'on peut vérifier que l'équation de Lagrange qui s'en déduit est bien l'équation II. 44.

Si l'on considère maintenant le 4-vecteur densité-flux de courant, on voit que les résultats des deux théories coincident. En effet, par l'introduction de l'expression II. 45 de $\mathcal{L}^{Pr}$ dans la définition II. 39, on obtient

$$s_\mu^{Pr} = \frac{\partial\,\mathcal{L}^{Pr}}{\partial\,\mathcal{A}_\mu} = q\,c\,\varphi_\nu^*(P_\nu \varphi_\mu - P_\mu \varphi_\nu) + \text{conj},$$

ce qui, à une constante près, rejoint II. 41 calculé en partant du lagrangien $\mathcal{L}^{(1)}$.

Mais en passant à l'étude du tenseur $T_{\mu\nu}$, nous allons trouver des écarts entre les deux théories, et ceci malgré le fait que M. Proca avait adopté la même définition II. 23 ci-dessus présentée. D'une façon plus précise et en partant de II. 23 et II. 45, le calcul donne pour le tenseur T^{Pr} de M. Proca l' expression symmétrique

$$T^{Pr}_{\mu\nu} = c^2 (P_\mu \varphi_\sigma - P_\sigma \varphi_\mu)^* (P_\sigma \varphi_\nu - P_\nu \varphi_\sigma) + m_0^2 c^4 \varphi^*_\mu \varphi_\nu + \text{conj} + \partial_{\mu\nu} \mathcal{L}^{Pr},$$

qui diffère du tenseur asymétrique

$$\text{II. 46} \qquad T^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{2\hbar}{i m_0} [P_\mu \varphi_\sigma - P_\sigma \varphi_\mu)^* \partial_\nu \varphi_\sigma -$$

$$- \varphi^*_\sigma \partial_\nu (P_\sigma \varphi_\mu - P_\mu \varphi_\sigma) - \text{conj}] - s^{(1)}_\mu \mathcal{A}_\nu,$$

que l'on trouve pour la particule de spin 1 en partant du lagrangien II. 43(*). On voit ainsi que la question de savoir laquelle des deux théories s'adapte mieux à la description de la particule de spin 1, se ramène à celle de savoir lequelle des deux tenseurs ($T^{(1)}_{\mu\nu}$ ou $T^{Pr}_{\mu\nu}$) décrit mieux les propriétés de l'énergie et de l'impulsion de la particule. Ce problème a été abordé par M. Costa de Beauregard qui a donné dans sa thèse [14] des arguments en faveur du tenseur asymétrique. En complément, nous nous bornerons ici à signaler que des expériences récentes paraissent confirmer la superiorité d'un tenseur asymétrique pour traduire les propriétés de la particule de spin 1 [15].

Il semble donc bien que l'emploi d'un seul vecteur d'Univers pour la description de la particule n'est pas justifié et qu'il doive être remplacé par l'utilisation d'un vecteur φ_μ et d'un tenseur $\varphi_{\mu\nu}$.

(*) Plus précisément, II. 46 est la forme que prend le tenseur II. 42 lorsque l'on y substitue $\varphi_{\mu\nu}$ par sa valeur en φ_μ, tirée de II. 43b.

CHAPITRE III

Les passage des théories relativistes aux théories non relativistes correspondantes

§ 1. Le groupe de Lorentz et le groupe de Galilée.

Ce chapitre a trait au problème général du passage des théories relativistes aux théories non relativistes correspondantes, question qui sera abordée ici par l'étude du raccord entre le groupe de Lorentz et le groupe de Galilée.

Pour simplifier, on considère dans ce qui suit le cas d'une transformation simple de Lorentz entre deux référentiels $K(x\,y\,z\,t)$ et $K'(x'\,y'\,z'\,t')$. Dans cette transformation, $y'=y$, $z'=z$ et l'axe $O'X'$ glisse sur l'axe OX avec la vitesse $v=\beta c$. Les équations de transformation de Lorentz sont, comme il est bien connu,

$$\text{III. 1} \qquad \begin{cases} x' = (x - v\,t)\,(1-\beta^2)^{-1/2} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \left(t - \dfrac{v}{c^2}\,x\right)(1-\beta^2)^{-1/2}. \end{cases}$$

Introduisons le développement de $(1-\beta^2)^{-1/2}$ en série de puissances de β,

$$\text{III. 2} \qquad \begin{cases} x' = (x - v\,t)\left(1 + \dfrac{1}{2}\beta^2 + \dfrac{3}{8}\beta^4 + \cdots\right) = \\ \quad = x - v\,t + \dfrac{1}{2}(x - v\,t)\,\beta^2 + \dfrac{3}{8}(x - v\,t)\,\beta^4 + \cdots \\ t' = \left(t - \dfrac{v}{c^2}\,x\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}\beta^2 + \dfrac{3}{8}\beta^4 + \cdots\right) = \\ \quad = t - \dfrac{\beta^2}{v}\,x + \dfrac{1}{2}\left(t\,\beta^2 - \dfrac{x}{v}\,\beta^4\right) + \dfrac{3}{8}\left(t\,\beta^4 - \dfrac{x}{v}\,\beta^6\right) + \cdots, \end{cases}$$

et prenons l'approximation en β^2 de ces équations (*). On obtient alors

$$\text{III. 3} \qquad \begin{cases} x' = (x - v\,t)\left(1 + \dfrac{1}{2}\beta^2\right) \\ t' = t\left(1 + \dfrac{1}{2}\beta^2\right) - \beta^2 \dfrac{x}{v}\,. \end{cases}$$

Il est évident que l'on ne retrouve pas ainsi les formules de transformation de Galilée, savoir,

$$\text{III. 4} \qquad x' = x - v\,t\,; \qquad t' = t\,.$$

En passant, on peut d'ailleurs se rendre compte du fait que, contrairement à ce qui arrive avec les équations de Lorentz (III. 1) et de Galilée (III. 4), aucune approximation en β^n des équations du groupe de transformations III. 1 ne possède les propriétés de groupe, exception faite de celle en β^1 ou, ce qui revient au même, en β^0, car il n'y a pas de termes en β^1 dans III. 2. Nous allons vérifier cette affirmation en prenant le cas simple de l'approximation en β^2, l'étude du cas général en β^n ne présentant guère plus de difficultés. Considérons alors une autre transformation du type III. 3,

$$\text{III. 5} \qquad \begin{cases} x'' = (x' - \bar{v}\,t')\left(1 + \dfrac{1}{2}\bar{\beta}^2\right) \\ t'' = t'\left(1 + \dfrac{1}{2}\bar{\beta}^2\right) - \bar{\beta}^2 \dfrac{x'}{\bar{v}} \end{cases} \qquad (\bar{\beta} \equiv \bar{v}/c).$$

Pour montrer que ces équations ne définissent pas un groupe, nous allons vérifier que l'application successive de III. 3, III. 5 n'est pas une transformation de la forme III. 3. En effet, on a

---

(*) Nous employons l'expression «approximation en β^n» pour indiquer que dans les développements finaux en série de puissances de $\beta = \dfrac{v}{c}$ on retient les termes jusqu'à l'ordre de β^n en négligeant ceux qui sont d'un ordre supérieur. Ceci revient à dire que dans une «approximation en β^n» on aura $\beta^k \neq 0$ $(k \leqq n)$, $\beta^k \doteq 0$ $(k > n)$.

$$x'' = (x - (v + \bar{v})\, t)\left(1 + \frac{1}{2}(\beta + \bar{\beta})^2\right) + f_1(\beta^2, \beta\bar{\beta}, \beta^2\bar{\beta}^2)$$

$$t'' = t\left(1 + \frac{1}{2}(\beta + \bar{\beta})^2\right) - (\beta + \bar{\beta})^2 \frac{x}{v + \bar{v}} + f_2(\bar{\beta}^2, \beta\bar{\beta}, \beta^2\bar{\beta}^2),$$

avec

$$f_1 = \beta^2 x \frac{\bar{v}}{v} - \beta\bar{\beta}(x - (v + \bar{v})\, t) + \frac{\beta^2\bar{\beta}^2}{4}\left(x - (v + \bar{v})\, t + 2\, x \frac{\bar{v}}{v}\right)$$

$$f_2 = \bar{\beta}^2 t \frac{v}{\bar{v}} - \beta\bar{\beta}\, t + \frac{\beta^2\bar{\beta}^2}{4}\left(t - \frac{2}{\bar{v}}(x - v\, t) - 2\frac{x}{v}\right).$$

Or cette transformation n'a pas la forme III. 3 par suite de l'existence des termes de f_1 et f_2. On peut donc dire, en retournant à III. 1 et III. 4, que le groupe de Galilée s'obtient à partir du groupe de Lorentz par une approximation qui est, au plus, en β. Et effectivement, en prenant $\beta^n \simeq 0\,(n \geqq 2)$ dans III. 2, on obtient les équations III. 4 du groupe de Galilée.

Remarquons cepedant que, étant donné qu'il n'y a pas de termes en β dans III. 2, on pourrait tout aussi bien dire que le groupe de Lorentz, par une approximation en β^0, redonne le groupe de Galilée. On doit dont chercher à savoir laquelle des deux approximations (en β ou en β^0) pssède un sens physique. Pour autant que l'on se tienne dans le cadre de la Mécanique, on n'aura pas la possibilité de départager ces deux hypothèses, ceci étant dû au fait que les deux Mécaniques (Relativiste et Newtonienne) diffèrent par des effets en β^2 et non en β. Si cependant on passe au domaine de l'optique, on y trouve des phénomènes physiques qui font intervenir des effets en $\beta = v/c$. C'est ce que traduisent les termes de l'ordre de β dans certaines équations, notamment dans celles de l'effet Döppler ou dans la formule d'Einstein pour l'abérration de la lumière. Or si l'on se borne aux seuls effets en β (en négligeant ceux d'un ordre supérieur), tous ces phénomènes peuvent être correctement décrits par la théorie newtonienne (*). C'est là un fait qui a été souligné par plusieurs auteurs, notamment par Lorentz [17] et von Laue [16].

(*) Ou, plus précisément, par l'ancienne Théorie des Electrons, laquelle suppose fondamentalement la mécanique classique newtonienne.

En tenant compte de ce qui précède, il semble donc licite de conclure que c'est l'approximation en β qni possède un sens physique et qui donne le raccord correct entre les théories relativistes et non relativistes.

Remarquons que ceci peut paraitre en contradiction avec la façon habituellement utilisée pour passer de l'énergie totale relativiste à l'énergie newtonienne $\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right.$ et $\left.\frac{1}{2} m_0 v^2, \text{ respectivement}\right)$. En effet, il semble naturel de penser que pour obtenir le raccord entre ces deux expressions l'on doive développer la première en série de puissances de β et y négliger tous les termes qui sont d'un ordre supérieur à $\beta^2 = v^2/c^2$. C'est à dire :

III. 6 $$m_0 c^2 (1-\beta^2)^{-1/2} = m_0 c^2 (1 + 1/2\,\beta^2 + 3/8\,\beta^2 + \cdots) \cong$$

$$\cong m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 + m_0 c^2 .$$

L'énergie newtonienne n'étant définie qu'à une constante près, on dit alors que l'existence de la constante $m_0 c^2$ n'est pas un empêchement pour retrouver l'expression voulue, $\frac{1}{2} m_0 v^2$. Mais on remarque que III. 6 n'est à vrai dire, qu'une fausse approximation en β^2. Pour avoir une approximation correcte en β^2 il faudrait retenir le terme en β^2 dans le développement final de $m_0 c^2 (1-\beta^2)^{-1/2}$, et pas dans celui de $(1-\beta^2)^{-1/2}$. C'est à dire que l'approximation en β^2 de l'énergie relativiste est la suivante,

$$m_0 c^2 (1-\beta^2)^{-1/2} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots\right) \cong$$

$$\cong \underbrace{m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{Terme en } \beta^0} + \underbrace{\frac{3}{8} m_0 v^2 \beta^2}_{\text{Terme en } \beta^2} .$$

Or cette expression n'est pas celle que la mécanique newtonienne donne pour l'énergie et ceci amène à penser que le passage des théories relativistes aux théories non relativistes se fait en retenant des termes qui sont, au plus, de l'ordre de β. D'ailleurs, et pour nous confirmer dans cette voie, il suffirait d'examiner quelques équations de transformation en Relativité. Il est bien connu, en effet, que les formules relativistes qui relient les valeurs des

grandeurs physiques (mécaniques et autres) attachées à un système au repos avec ces mêmes grandeurs dans un référentiel où le système est animé d'une vitesse $v = \beta c$, font intervenir les facteurs $(1-\beta^2)^{1/2}$ ou $(1-\beta^2)^{-1/2}$. Ainsi, pour un observateur immobile, une barre ayant la longueur l_0 au repos possède la longueur $l_0\sqrt{1-\beta^2}$ lorsqu'elle se trouve animée d'une vitesse $v = \beta c$, c'est à dire que $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$. Des relations analogues existent pour la quantité de chaleur Q_0 fournie au système, sa température propre T_0 [18], la période τ_0 d'une horloge, la masse m_0 d'une particule, etc:

$$Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2},\quad T = T_0\sqrt{1-\beta^2},\quad \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \text{etc.}$$

En développant en séries de puissances de β les seconds membres de ces formules,

$$l = l_0(1-\beta^2)^{1/2} = l_0 - \frac{l_0}{2}\beta^2 - \frac{l_0}{8}\beta^4 - \cdots$$

$$\tau = \tau_0(1-\beta^2)^{-1/2} = \tau_0 + \frac{\tau_0}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\tau_0\beta^4 + \cdots \quad \text{etc,}$$

on voit derechef qu'une approximation en β^2 ne nous conduit pas aux prévisions de la théorie newtonienne, selon laquelle une barre en mouvement ne raccourcit pas, une horloge en mouvement ne ralentit pas, etc. Il faudra donc prendre $\beta^2 \cong 0$ pour obtenir le passage correct à la théorie non relativiste, c'est à dire, pour avoir $l = l_0$, $\tau = \tau_0$, $m = m_0$, etc.

A partir des conclusions précédantes, on tire l'expression bien connue de l'approximation non relativiste de l'impulson $\vec{p}$. Par définition, on a

III. 7 $$\vec{p} = m_0\vec{v}(1-\beta^2)^{-1/2} = m_0\vec{v} + \frac{1}{2}m_0\beta^2\vec{v} + \frac{3}{8}m_0\beta^4\vec{v} + \cdots$$

et si l'on prend l'approximation en β ($\beta^n \cong 0\,;\, n \geqq 2$) (*), on obtient

$$\vec{p} = m_0\vec{v}.$$

(*) Cette approximation coincide d'ailleurs avec celle en β^0 puisqu'il n'y a pas de terme en $\frac{v}{c}$ dans III. 7.

Examinons finalement la relation relativiste

III. 8 $$\frac{E_r^2}{c^2} = \vec{p}_r^2 + m_0^2 c^2,$$

où E_r représente l'énergie totale. Nous avons, en désignant par E_n l'énergie non relativiste,

$$\vec{p}_r^2 = \frac{E_r^2}{c^2} - m_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 (1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots) - m_0^2 c^2 =$$

$$= 2 m_0 \left(\frac{1}{2} m_0 v^2\right) + \frac{4}{c^2}\left(\frac{1}{2} m_0 v^2\right)^2 + \frac{8}{m_0 c^4}\left(\frac{1}{2} m_0 v^2\right)^3 + \cdots$$

$$= 2 m_0 E_n + \frac{4}{c^2} E_n^2 + \frac{8}{m_0 c^4} E_n^3 + \cdots.$$

Si l'on procède à l'approximation en β, c'est à dire, si l'on prend $\beta^n \cong 0$ $(n \geqq 2)$, on est alors conduit à

$$E_n = \frac{\vec{p}_n^2}{2 m_0},$$

relation bien connue de la mécanique newtonienne.

§ 2. L'approximation non relativiste en Mécanique Ondulatoire. L'équation de Klein-Gordon et l'équation de Schrödinger.

Dans les paragraphes qui suivent on étudie l'approximation non relativiste des équations d'évolution de la Mécanique Ondulatoire, c'est à dire, le passage de l'équation de Klein-Gordon à celle de Schrödinger, et le passage des équations de Dirac aux équations de Pauli.

Auparavant, nous devons souligner le fait que l'on emploiera dans tout ce qui suit la correspondance II. 2, valable aussi

bien dans le cas relativiste que dans le cas non relativiste (*),

$$\text{III. 10} \qquad \text{grandeurs physiques} \begin{cases} E \longleftrightarrow E_{op} = -i\hbar\,\partial_t \\ \vec{p} \longleftrightarrow \vec{p}_{op} = i\hbar\,\vec{\nabla} \end{cases} \text{opérateurs.}$$

Pour schématiser le procédé d'approximation non relativiste d'une équation d'évolution de la Mécanique Ondulatoire, on remarquera qu'une telle équation fait intervenir, appliquée à une fonction d'état ψ (qui peut avoir plusieurs composantes), un opérateur f, fonction de $\partial_t\,\partial_x\,\partial_y\,\partial_z$,

$$\text{III. 11} \qquad f(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)\,\psi = 0\,.$$

Ceci revient à dire, en tenant compte de III. 10, que f est l'opérateur correspondant à la grandeur physique qui s'obtient de f en remplaçant ∂_t par $\frac{i}{\hbar}E$ et $\vec{\nabla}$ par $-\frac{i}{\hbar}\vec{p}$. Par conséquent, on peut écrire

$$\left[f\left(\frac{i}{\hbar}E,\ \frac{-i}{\hbar}p_x,\ \frac{-i}{\hbar}p_y,\ \frac{-i}{\hbar}p_z\right)\right]_{op}\psi = 0\,,$$

où f désigne maintenant une fonction des grandeurs relativistes E et $\vec{p}$, et c'est avec l'équation d'évolution écrite sous cette forme que l'on entreprend l'approximation non relativiste. Pour cela, on remplace E et $\vec{p}$ par leurs développements en puissances de β et dans la forme finale du développement on retient seulemente les puissances de β jusqu'à un certain ordre. On a vu plus haut que cet ordre doit être celui de β, les $\beta^n\,(n \geqslant 2)$ devant être négligés. On est ainsi conduit à une certaine fonction f' de E_n et $\vec{p}_n$, différente de f (E_n et $\vec{p}_n$ désignent les grandeurs énergie et impulsion non relativiste),

$$[f'(E_n,\ p_{xn},\ p_{yn},\ p_{zn})]_{op}\,\psi = 0\,.$$

(*) La grandeur E qui est en correspondance avec l'opérateur $-i\hbar\,\partial_t$ est l'énergie totale, c'est à dire, si la particule est libre, $\frac{1}{2}m_0 v^2$ (cas non relativiste) ou $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (cas relativiste).

En employant à nouveau la correspondance III. 10 on obtient l'equation d'évolution non relativiste qui est l'approximation de l'équation relativiste III. 11:

$$f'(-i\hbar\partial_t,\ i\hbar\partial_x,\ i\hbar\partial_y,\ i\hbar\partial_z)\,\psi = 0\,.$$

En particularisant le schéma antérieur, étudions maintenant l'équation relativiste de Klein-Gordon. On pourrait envisager le cas général d'une particule chargée se déplaçant dans un champ électromagnétique; néanmoins, il suffit d'étudier le cas plus simple de la particule en absence de champ, car les deux études sont identiques en ce qui concerne les aspects qui nous intéressent et le cas générale ne ferait qu'alourdir le formalisme sans aucune utilité (*). L'équation de Klein-Gordon s'écrit ainsi

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0 \qquad (\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2),$$

ψ étant une fonction d'onde scalaire, soit encore, par III. 10,

$$[E^2/c^2 - \vec{p}^2 - m_0^2 c^2]_{op}\,\psi = 0\,.$$

On voit ainsi que dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, le calcul de l'approximation non relativiste se ramène à celui de la relation relativiste $E_r^2/c^2 = \vec{p}_r^2 + m_0^2 c^2$, examiné en III. 8 et III. 9. On obtient alors, pour une approximation en β,

$$\left[E_n - \frac{\vec{p}_n^2}{2\,m_0}\right]_{op}\psi = 0\,,$$

c'est à dire, par III. 10, l'équation de Schrödinger

III. 12 $$\left[\frac{i\hbar}{2\,m_0}\Delta + \partial_t\right]\psi = 0\,.$$

(*) Tel ne sera évidemment plus le cas lors du passage des équations de Dirac aux équations de Pauli, qui seul a de l'intérêt si l'on considère la particule comme étant chargée et se déplaçant dans un champ électromagnétique.

Une conséquence bien connue de l'équation de Schrödinger est l'établissement de la relation de continuité

III. 13 $$\partial_t \rho_S + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_S = 0,$$

avec les définitions de la densité et du flux de probabilité

III. 14 $$\rho_S = \psi^* \psi$$

III. 15 $$\vec{j}_S = \frac{i\hbar}{2m_0}(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*).$$

Quant à l'équation de Klein-Gordon, elle permet aussi d'établir une relation de continuité III. 13, les définitions de ρ et $\vec{j}$ étant maintenant

III. 16 $$\rho_{KG} = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2}(\psi \partial_t \psi^* - \psi^* \partial_t \psi)$$

III. 17 $$\vec{j}_{KG} = \frac{i\hbar}{2m_0}(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*).$$

Pour ce qui est du passage des grandeurs relativistes III. 16 et III. 17 aux grandeurs correspondantes III. 14 et III. 15 définies dans la théorie non relativiste, il se fait très aisément. Les deux définitions de $\vec{j}$ coincident, d'ailleurs, et quant à ρ_{KG} il s'écrit

$$\rho_{KG} = \frac{1}{2m_0 c^2}[\psi^*(-i\hbar \partial_t \psi) + \psi(-i\hbar \partial_t \psi)^*],$$

c'est à dire, en vertu de III. 10,

$$\rho_{KG} = \frac{1}{2}\left[\psi^* \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)_{op} \psi + \psi \left(\left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)_{op} \psi\right)^*\right].$$

Or l'approximation en β de $\dfrac{E}{m_0 c^2}$ donne

$$\frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1}{m_0 c^2}\left(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots \cong 1,$$

de sorte que l'on a $\left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)_{op} \simeq I$ et, par conséquent,

$$\rho_{KG} \simeq \frac{1}{2}(\psi^* \psi + \psi \psi^*) = \psi^* \psi = \rho_S .$$

Nous achèverons cette étude du raccord entre la théorie de Klein-Gordon et celle de Schrödinger en calculant l'approximation non relativiste du lagrangien de Klein-Gordon. Ce lagrangien a la forme

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{\hbar^2}{2 m_0}\left[\vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi - \frac{1}{c^2}\partial_t \psi^* \cdot \partial_t \psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\psi^* \psi\right],$$

soit encore, par III. 10,

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2 m_0}\left[(\vec{p}\psi)^* \cdot \vec{p}\psi - \left(\frac{E\psi}{c}\right)^* \cdot \frac{E\psi}{c} + m_0^2 c^2 \psi^* \psi\right].$$

Or à l'approximation en β nous avons $\frac{E_r}{c} \simeq \frac{E_n + m_0 c^2}{c}$, de sorte que $\mathcal{L}_{KG}$ devient

$$\mathcal{L}_{KG} \simeq \frac{1}{2 m_0}\left[(\vec{p}\psi)^* \cdot (\vec{p}\psi) - \left(\frac{E_n \psi}{c}\right)^* \left(\frac{E_n \psi}{c}\right) - m_0 (E_n \psi)^* \psi - \right.$$
$$\left. - m_0 \psi^* (E_n \psi)\right]$$
$$\simeq \frac{1}{2 m_0}[(\vec{p}\psi)^* \cdot (\vec{p}\psi) - m_0((E_n \psi)^* \psi + \psi^* (E_n \psi))],$$

$\left(\frac{E_n \psi}{c}\right)^* \frac{E_n \psi}{c}$ étant de l'ordre de β^2 par rapport aux autres termes de $\mathcal{L}_{KG}$: Compte tenu de III. 10 on a alors

$$\mathcal{L}_{KG} \simeq \frac{\hbar^2}{2 m_0}\vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi + \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) = \mathcal{L}_S ,$$

l'expression obtenue étant celle du lagrangien de Schrödinger.

§ 3. Les équations de Dirac et les équations de Pauli.

L'approximation non relativiste des équations de Dirac rentre aussi dans le schéma général décrit au paragraphe précédent, ψ étant maintenant une fonction à quatre composantes de variance spinorielle et f faisant intervenir, en plus des opérateurs $-ih\partial_t$ et $ih\vec{\nabla}$, les quatre matrices 4×4 α_μ. En considérant le cas général d'une particule de charge q se déplaçant au sein d'un champ électromagnétiqne de potentiels $\vec{A}$ et V, les équations de Dirac s'écrivent

$$\text{III. 18} \qquad \left[\frac{1}{c}\partial_t - \frac{iq}{hc}V - \left(\vec{\nabla} + \frac{iq}{hc}\vec{A}\right)\cdot\vec{\alpha} - \frac{im_0 c}{h}\alpha_4\right]\psi = 0,$$

c'est à dire, en vertu de III. 10,

$$\text{III. 19} \qquad \left[\frac{1}{c}(E - qV) + \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\alpha} - m_0 c\,\alpha_4\right]_{op}\psi = 0.$$

On prendra les matrices α_μ telles qu'elles ont été définies en I. 19 (*),

$$\text{III. 20} \qquad \alpha_k = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{bmatrix} \quad (k = 1,2,3) \qquad \alpha_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

de sorte que l'on est conduit à écrire III. 19 sous la forme

$$\text{III. 21} \qquad \begin{cases} a) & \left[\frac{1}{c}(E - qV) - m_0 c\right]_{op}\chi_1 = \left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]_{op}\chi_2 \\ b) & \left[\frac{1}{c}(E - qV) + m_0 c\right]_{op}\chi_2 = \left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]_{op}\chi_1, \end{cases}$$

(*) $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$ sont les trois matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que nous désignerons souvent d'une façon abrégée par $\vec{\sigma}$.

avec

III. 22 $$\chi_1 \equiv \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \qquad \chi_2 \equiv \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \qquad \text{et donc} \quad \psi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}.$$

Les équations III. 21 *b* permettent d'obtenir χ_2 en fonction de χ_1, et l'introduction de cette expression en III. 21 *a* conduit à

III. 23

a) $$\left\{\frac{E-qV}{c} - m_0 c - \left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma} - \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\frac{E-qV}{c} + m_0 c\right)^{-1}\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma} - \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\right)\right\}_{op} \chi_1 = 0$$

b) $$\chi_2 = \left\{\left[\frac{1}{c}(E - qV) + m_0 c\right]^{-1}\left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]\right\}_{op} \chi_1 .$$

On a ainsi substitué au système III. 19 de 4 équations différentielles du premier ordre, un système différentiel d'ordre infini formé par les deux équations III. 23 *a*. En effet, la forme III. 23 des équations de Dirac montre que la théorie peut se faire — du moins en principe — en employant seulement deux des quatre composantes de ψ. Ces composantes sont données par l'intégration de III. 23 *a*, les deux autres s'en obtenant au moyen de III. 23 *b*. On verra par la suite que III. 23 *b* exprime que les deux composantes $\begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \chi_2$ sont de l'ordre de β par rapport à $\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \chi_1$.

En procédant maintenant à l'approximation des équations III. 23, le calcul donne

III. 24
$$\begin{aligned} & m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{-1/2} - qV - m_0 c^2 = \\ & = \left(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 v^2 \beta^2 + \cdots\right) - qV - m_0 c^2 \\ & \cong \frac{1}{2} m_0 v^2 - qV = E_n - qV, \end{aligned}$$

car l'approximation doit se faire en β, comme il a été discuté plus haut. En plus, on a

III. 25
$$\begin{aligned} & c\left[\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{qV}{c} + m_0 c\right]^{-1} = \\ & = (2 m_0)^{-1}\left[1 - \frac{qV}{2 m_0 c^2} + \left(\frac{1}{4}\beta^2 + \frac{3}{16}\beta^4 + \cdots\right)\right]^{-1} = \\ & = (2 m_0)^{-1} - \frac{E_n - qV}{4 m_0^2 c^2} + \cdots \cong \frac{1}{2 m_0}, \end{aligned}$$

et la substitution de III. 24 et III. 25 en III. 23 conduit aux équations approchées en β:

$$\left[E_n - qV - \frac{1}{2m_0}\left(\left(\vec{p}_n - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right)^2\right]_{op}\chi_1 = 0$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2m_0 c}\left[\left(\vec{p}_n - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]_{op}\chi_1 .$$

Or un calcul simple donne

III. 26
$$\left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]^2_{op} \equiv \left[\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]^2 =$$

$$= \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2_{op} + \frac{\hbar q}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{H}, \quad (\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}).$$

de sorte que l'on est conduit à poser

III. 27
$$\begin{cases} a) \quad \left[E_n - qV - \dfrac{1}{2m_0}\left(\vec{p}_n - \dfrac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - \dfrac{\hbar q}{2m_0 c}\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\right]_{op}\chi_1 = 0 \\ b) \quad \chi_2 = \dfrac{1}{2m_0 c}\left[\left(\vec{p}_n - \dfrac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]_{op}\chi_1 , \end{cases}$$

l'équation III. 27 *b* exprimant clairement que χ_2 est de l'ordre de β par rapport à χ_1. En prenant les opérateurs correspondants de E_n et p_n (III. 10), on obtient la forme finale des équations,

III. 28
$$\begin{cases} a) \quad \left[\dfrac{1}{2m_0}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \dfrac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + qV + \dfrac{\hbar q}{2m_0 c}\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\right]\chi_1 = \\ \qquad\qquad = -i\hbar\,\partial_t\chi_1 \\ b) \quad \chi_2 = \dfrac{1}{2m_0 c}\left[\left(i\hbar\vec{\nabla} - \dfrac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]\chi_1 , \end{cases}$$

où III. 28 *a* est l'équation bien connue de Pauli.

Les équations III. 28 *b* qui donnent l'évolution de χ_2 au moyen de χ_1 sont généralement négligées dans la plupart des exposés qui s'occupent de l'étude non relativiste des équations

de Dirac. En tenant compte de la discussion du § 1 il semble, au contraire, qu'il y a lieu de les garder car elles définissent une entité mathématique de l'ordre de β. Nous allons d'ailleurs voir l'importance de III. 28 *b* pour obtenir correctement le raccord entre le formalisme de la théorie de Dirac et celui de la théorie de Pauli.

Passons ainsi à l'étude comparée de la densité de probabilité ρ et du flux de probabilité $\vec{j}$. Comme il est bien connu, on peut toujours, en partant soit des équations III. 18 de Dirac soit de celles de Pauli, III. 28 *a*, établir une relation de continuité

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

avec les définitions:

dans la théorie de Pauli:

III. 29 $$\rho_P = \chi_1^* \chi_1$$

III. 30 $$\vec{j}_P = \frac{i\hbar}{2m_0}(\chi_1^* \vec{\nabla} \chi_1 - \chi_1 \vec{\nabla} \chi_1^*) - \frac{q}{m_0 c} \chi_1^* \chi_1 \vec{A}$$

$$\left(\chi_1 = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}\right);$$

dans la théorie de Dirac:

III. 31 $$\rho_D = \psi^* \psi$$

III. 32 $$\vec{j}_D = -c \psi^* \vec{\alpha} \psi$$

$$\left(\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}\right).$$

Avant de poursuivre, on doit souligner le fait que les définitions de ρ et $\vec{j}$ ne sont pas, pour ainsi dire, une conséquence directe des équations d'évolution. Nous voulons dire par là que ce qui découle directement des équations d'évolution de la Mécanique Ondulatoire (Schrödinger, Klein-Gordon, Pauli, Dirac, etc.)

est uniquement une relation de continuité, c'est à dire, une équation de la forme

III. 33 $$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\psi, \psi^*, \cdots) + \partial_t g(\psi, \psi^*, \cdots) = 0.$$

Ce n'est qu'en partant de celle-ci que l'on postule ensuite les expressions pour la densité de probabilité et le flux de probabilité:

$$\rho \equiv g(\psi, \psi^*, \cdots)$$
$$\vec{j} \equiv \vec{f}(\psi, \psi^*, \cdots).$$

Or il est clair que l'adoption de ces expressions pour ρ et $\vec{j}$ ne va pas sans un certain arbitraire, quoique cette liberté dans le choix n'ait pas de conséquence physique. Effectivement, et en dehors du fait que au lieu de g et $\vec{f}$ on pourrait tout aussi bien prendre cg et $c\vec{f}$ (c étant une constante arbitraire), rien ne nous empêcherait de prendre pour la définition du flux de probabilité $\vec{j}$, au lieu de $\vec{f}$, le vecteur $\vec{f}+\vec{v}$, $\vec{v}$ étant un vecteur de divergence nulle. En effet, on retombe toujours sur la même équation III. 33, laquelle est bien assurée en vertu même des équations d'évolution de la Mécanique Ondulatoire.

Ceci dit, étudions le raccord entre III. 29, III. 30 et III. 31, III. 32. Pour obtenir le passage de ρ_D à ρ_P, posons

III. 34 $$\rho_P = \psi^* \psi = \chi_1^* \chi_1 + \chi_2^* \chi_2,$$

et rappelons que, comme il a été dit plus haut, χ_2 est de l'ordre de β. Le terme $\chi_2^* \chi_2 = \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4$ est donc de l'ordre de β^2 par rapport à $\chi_1^* \chi_1 = \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2$ et en le négligeant dans III. 34 on retrouve l'expression de ρ donnée en théorie de Pauli:

$$\rho_D = \chi_1^* \chi_1 + \chi_2^* \chi_2 \cong \chi_1^* \chi_1 = \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 = \rho_P.$$

Passons maintenant à l'étude comparée de III. 30 et III. 32. En tenant compte de la forme III. 20 des matrices α_μ, on doit écrire

$$\vec{j}_D = -c[\chi_1^* \chi_2^*] \begin{bmatrix} -0 & -\vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = c(\chi_1^* \vec{\sigma} \chi_2 + \chi_2^* \vec{\sigma} \chi_1),$$

c'est à dire, en vertu de l'hermiticité des matrices $\vec{\sigma}$ $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,

$$\vec{j}_D = c\,\chi_1^*\,\vec{\sigma}\,\chi_2 + \text{conj.}$$

Si nous introduisons dans cette formule l'équation III. 28 *b* qui donne l'expression de χ_2 en fonction de χ_1, $\vec{j}_D$ prend la forme approchée en β

$$\text{III. 35} \quad \vec{j}_D \cong \frac{i\hbar}{2m_0}\chi_1^*\,\vec{\sigma}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma})\,\chi_1 - \frac{q}{2m_0 c}\chi_1^*\,\vec{\sigma}\,(\vec{A}\cdot\vec{\sigma})\,\chi_1 + \text{conj}.$$

Compte tenu des propriétés de commutation des matrices σ_k $(k = 1, 2, 3)$, la première composante du vecteur

$$-\frac{q}{2m_0 c}\chi_1^*\,\vec{\sigma}\,(\vec{A}\cdot\vec{\sigma})\,\chi_1 + \text{conj}$$

peut s'écrire

$$-\frac{q}{2m_0 c}\chi_1^*\,\sigma_1\,(A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3)\,\chi_1 + \text{conj} =$$

$$= -\frac{q}{2m_0 c}\chi_1^*\,(A_1 + iA_2\sigma_3 - iA_3\sigma_2)\,\chi_1 + \text{conj} =$$

$$= -\frac{q}{2m_0 c}(\chi_1^*\chi_1 A_1 + iA_2\chi_1^*\sigma_3\chi_1 - iA_3\chi_1^*\sigma_2\chi_1 +$$

$$+ \chi_1^*\chi_1 A_1 - iA_2\chi_1\sigma_3^*\chi_1^* + iA_3\chi_1\sigma_2^*\chi_1^*),$$

et les σ_k étant hermitiques, cette expression vient encore

$$-\frac{q}{2m_0 c}(\chi_1^*\chi_1 A_1 + \chi_1^*\chi A_1) = -\frac{q}{m_0 c}\chi_1^*\chi_1 A_1.$$

Pour les deux autres composantes le résultat est identique, de sorte que l'on peut poser

$$\text{III. 36} \quad -\frac{q}{2m_0 c}\chi_1^*\vec{\sigma}(\vec{A}\cdot\vec{\sigma})\chi_1 + \text{conj} = -\frac{q}{m_0 c}\chi_1^*\chi_1\vec{A}.$$

Considérons maintenant le vecteur $\frac{i\hbar}{2m_0}\chi_1^*\,\vec{\sigma}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma})\,\chi_1 + \text{conj}$,

ou plutôt sa première composante, l'étude des deux autres étant analogue. Nous avons

$$\frac{i\hbar}{2m_0}\chi_1^*\,\sigma_1\,(\partial_1\sigma_1+\partial_2\sigma_2+\partial_3\sigma_3)\,\psi_1+\text{conj}=$$

$$=\frac{i\hbar}{2m_0}[\chi_1^*\,\partial_1\chi_1+i\,\chi_1^*\,(\partial_2\sigma_3-\partial_3\sigma_2)\,\chi_1]+\text{conj}=$$

$$=\frac{i\hbar}{2m_0}[\chi_1^*\,\nabla_1\chi_1+i\,\chi_1^*\,(\vec{\nabla}\wedge\vec{\sigma})_1\,\psi_1]+\text{conj},$$

en désignant par $\text{rot}\,\vec{\sigma}=\vec{\nabla}\wedge\vec{\sigma}$ l'opérateur matriciel à trois composantes

III. 37
$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\sigma}\begin{cases}\partial_2\sigma_3-\partial_3\sigma_2\\ \partial_3\sigma_1-\partial_1\sigma_3\\ \partial_1\sigma_2-\partial_2\sigma_1.\end{cases}$$

On peut donc poser

III. 38
$$\frac{i\hbar}{2m_0}\chi_1^*\,\vec{\sigma}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma})\,\chi_1+\text{conj}=\frac{i\hbar}{2m_0}(\chi_1^*\,\vec{\nabla}\,\chi_1-\chi_1\,\vec{\nabla}\,\chi_1^*)-$$
$$-\frac{\hbar}{2m_0}(\chi_1^*\,\text{rot}\,\vec{\sigma}\,\chi_1+\text{conj}),$$

et en substituant III. 36 et III. 38 dans III. 35, on obtient l'expression finale de l'approximation en β de $\vec{j}_D$,

III. 39
$$\vec{j}_D\cong\frac{i\hbar}{2m_0}(\chi_1^*\,\vec{\nabla}\,\chi_1-\chi_1\,\vec{\nabla}\,\chi_1^*)-\frac{q}{2m_0c}\chi_1^*\,\chi_1\,\vec{A}-$$
$$-\frac{\hbar}{2m_0}[\chi_1^*\,(\vec{\nabla}\wedge\vec{\sigma})\,\chi_1+\text{conj}].$$

Si maintenant on compare III. 39 à l'expression III. 30, on voit que l'approximation en β de $\vec{j}_D$ ne conduit pas à la définition du flux $\vec{j}_P$ donnée en théorie de Pauli, mais qu'elle en diffère par un terme

III. 40
$$\vec{v}=-\frac{\hbar}{2m_0}\chi_1^*\,(\vec{\nabla}\wedge\vec{\sigma})\,\chi_1+\text{conj}.$$

Pourtant, si l'on se rappelle ce qui a été dit plus haut concernant la définition de $\vec{j}$, on peut affirmer que le raccord entre $\vec{j}_D$ et $\vec{j}_P$ sera correct pour autant que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Or c'est bien ce qui arrive, car nous avons

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [\chi_1^* \operatorname{rot} \vec{\sigma}\, \chi_1 + \text{conj}] = {} & \partial_1 [\chi_1^* (\partial_2 \sigma_3 - \partial_3 \sigma_2) \chi_1 + \chi_1 (\partial_2 \sigma_3 - \partial_3 \sigma_2)\, {}^*\chi_1^*] \\ & + \partial_2 [\chi_1^* (\partial_3 \sigma_1 - \partial_1 \sigma_3) \chi_1 + \chi_1 (\partial_3 \sigma_1 - \partial_1 \sigma_3)\, {}^*\chi_1^*] \\ & + \partial_3 [\chi_1^* (\partial_1 \sigma_2 - \partial_2 \sigma_1) \chi_1 + \chi_1 (\partial_1 \sigma_2 - \partial_2 \sigma_1)\, {}^*\chi_1^*]\end{aligned}$$

ce qui, compte tenu de l'hermiticité de $\vec{\sigma}$, peut s'écrire aussi

$$\begin{aligned}& \partial_1 \chi^* \sigma_3 \partial_2 \chi + \chi^* \sigma_3 \partial_1 \partial_2 \chi - \partial_1 \chi^* \sigma_2 \partial_3 \chi - \chi^* \sigma_2 \partial_1 \partial_3 \chi + \partial_1 \partial_2 \chi^* \sigma_3 \chi + \\ & + \partial_2 \chi^* \sigma_3 \partial_1 \chi - \partial_1 \partial_3 \chi^* \sigma_2 \chi - \partial_3 \chi^* \sigma_2 \partial_1 \chi + \partial_2 \chi^* \sigma_1 \partial_3 \chi + \\ & + \chi^* \sigma_1 \partial_2 \partial_3 \chi - \partial_2 \chi^* \sigma_3 \partial_1 \chi - \chi^* \sigma_3 \partial_1 \partial_2 \chi + \partial_2 \partial_3 \chi^* \sigma_1 \chi + \\ & + \partial_3 \chi^* \sigma_1 \partial_2 \chi - \partial_1 \partial_2 \chi^* \sigma_3 \chi - \partial_1 \chi^* \sigma_3 \partial_2 \chi + \partial_3 \chi^* \sigma_2 \partial_1 \chi + \\ & + \chi^* \sigma_2 \partial_1 \partial_3 \chi - \partial_3 \chi^* \sigma_1 \partial_2 \chi - \chi^* \sigma_1 \partial_2 \partial_3 \chi + \partial_1 \partial_3 \chi^* \sigma_2 \chi + \\ & + \partial_1 \chi^* \sigma_2 \partial_3 \chi - \partial_2 \partial_3 \chi^* \sigma_1 \chi - \partial_2 \chi^* \sigma_1 \partial_3 \chi = 0\end{aligned}$$

c. q. f. d.

Passons maintenant à l'étude non relativiste du lagrangien de Dirac. Comme il a été dit en II § 2, ce lagrangien a la forme

$$\mathcal{L}_D = \frac{c}{2} \psi^* \left[\left(-\frac{i h}{c} \partial_t - \frac{q}{c} V \right) + \left(i h \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\alpha} - m_0 c \alpha_4 \right] \psi + \text{conj},$$

c'est à dire, par III. 10,

$$\mathcal{L}_D = \frac{c}{2} \psi^* \left[\frac{E_r - qV}{c} + \left(\vec{p}_r - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\alpha} - m_0 c \alpha_4 \right] \psi + \text{conj}.$$

A l'approximation non relativiste nous avons $E_r \cong E_n + m_0 c^2$, de sorte que l'on peut écrire

$$\mathcal{L}_D \cong \frac{c}{2} \left\{ \psi^* \frac{E_n}{c} \psi - \frac{q}{c} V \psi^* \psi + m_0 c \psi^* \psi + \psi^* \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\alpha} \psi - \right.$$

$$\left. - m_0 c \psi^* \alpha_4 \psi \right\} + \text{conj}.$$

En vertu de III. 20 et III. 22, cette expression devient encore

$$\mathcal{L}_D \cong \frac{c}{2}\left\{\chi_1^* \frac{E_n}{c}\chi_1 - \frac{q}{c} V \chi_1^* \chi_1 + 2 m_0 c \chi_2^* \chi_2 - \chi_1^* \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi_2 - \chi_2^* \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\chi_1^*\vec{\sigma}\chi_2 + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\chi_2^*\vec{\sigma}\chi_1 + \chi_2^*\frac{E_n}{c}\chi_2 - \frac{q}{c}V\chi_2^*\chi_2\right\} + \text{conj}.$$

Or, χ_2 étant de l'ordre de β par rapport à χ_1, on doit dans $\mathcal{L}_D$ négliger les deux derniers termes qui sont de l'ordre de β^2. En tenant compte de III. 10, on arrive ainsi à l'approximation en β de $\mathcal{L}_D$,

III. 41 $$\mathcal{L}_D \cong \mathcal{L}_P \equiv \frac{c}{2}\left\{-\frac{i\hbar}{c}\chi_1^*\partial_t\chi_1 + 2 m_0 c \chi_2^*\chi_2 - i\hbar\chi_1^*\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\chi_2 - \right.$$

$$\left. - i\hbar\chi_2^*\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\chi_1 - \frac{q}{c}V\chi_1^*\chi_1 + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot(\chi_1^*\vec{\sigma}\chi_2 + \chi_2^*\vec{\sigma}\chi_1)\right\} + \text{conj}.$$

Si l'on se rappelle maintenant la forme du lagrangien habituellement utilisé en théorie de Pauli,

III. 42 $$\mathcal{L}_P' = \frac{\hbar^2}{2 m_0}\vec{\nabla}\chi_1^*\cdot\vec{\nabla}\chi_1 + \frac{i\hbar}{2}(\chi_1^*\partial_t\chi_1 - \chi_1\partial_t\chi_1^*) +$$

$$+ \frac{\hbar q}{2 m_0 c}\chi_1^*\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\chi_1 + \frac{i\hbar q}{2 m_0 c}\vec{A}\cdot(-\chi_1^*\vec{\nabla}\chi_1 + \chi_1\vec{\nabla}\chi^*) +$$

$$+ \left(qV + \frac{q^2}{2 m_0 c^2}\vec{A}^2\right)\chi_1^*\chi_1,$$

on voit que les deux expressions sont différentes. D'ailleurs, $\mathcal{L}_P$ étant fonction de $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$, il donne lieu à quatre équations de Lagrange, tandis que $\mathcal{L}_P'$, fonction des seules variables $\psi_1\psi_2$, conduit à obtenir deux équations de Lagrange, lesquelles sont précisément les équations de Pauli III. 28*a*. On peut néanmoins voir que les équations de Lagrange découlant de $\mathcal{L}_P$ sont équivalentes aux équations de Pauli, si bien que le raccord entre les deux formalismes lagrangiens est correct. En effet, le calcul donne:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_P}{\partial(\partial_k\chi_1^*)} = \frac{c}{2}i\hbar\sigma_k\chi_2 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_P}{\partial(\partial_t\chi_1^*)} = \frac{c}{2}\frac{i\hbar}{c}\chi_1$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_P}{\partial\chi^*} = \frac{c}{2}\left(-\frac{i\hbar}{c}\partial_t\chi_1 - i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi_2 - \frac{2q}{c}V\chi_1 + \frac{2q}{c}\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\chi_2\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_k \chi_2^*)} = \frac{c}{2} i\hbar \sigma_k \chi_1 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_t \chi_2^*)} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \chi_2^*} = \frac{c}{2}\left(4 m_0 c \chi_2 - i\hbar \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi_1 + 2\frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\chi_1\right),$$

de sorte que les équations de Lagrange découlant de $\mathcal{L}_P$ s'écrivent

III. 43 *a*) $$i\hbar\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\chi_2 - \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\chi_2 = -\frac{i\hbar}{c}\partial_t\chi_1 - \frac{qV}{c}\chi_1$$

b) $$\chi_2 = \frac{i\hbar}{2 m_0 c}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\chi_1 - \frac{q}{2 m_0 c^2}\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\chi_1 .$$

En introduisant III. 43 *b* dans III. 43 *a* on obtient

$$-\frac{\hbar^2}{2 m_0}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma})^2\chi_1 - \frac{i\hbar q}{2 m_0 c}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma})(\vec{A}\cdot\vec{\sigma})\chi_1 - \frac{i\hbar q}{2 m_0 c}(\vec{A}\cdot\vec{\sigma})(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma})\chi_1 +$$

$$+\frac{q^2}{2 m_0 c^2}(\vec{A}\cdot\vec{\sigma})^2\chi_1 = -i\hbar\partial_t\chi_1 - qV\chi_1 ,$$

soit encore, par III. 10,

$$\frac{1}{2 m_0}\left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]^2\chi_1 = -i\hbar\partial_t\chi_1 - qV\chi_1 .$$

En vertu de III. 26, cette égalité s'écrit aussi

$$\frac{1}{2 m_0}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\chi_1 + \frac{\hbar q}{2 m_0 c}\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\chi_1 = -i\hbar\partial_t\chi_1 - qV h_1 ,$$

ce qui est précisément l'équation de Pauli.

Avant de finir ce paragraphe, nous voulons encore souligner une propriété du lagrangien $\mathcal{L}_P$, savoir, que par suite des équations de Lagrange III. 43 on a $\mathcal{L}_P \equiv 0$, à l'instar de ce qui arrive pour le lagrangien de Dirac (Signalons que tel n'est pas le cas de $\mathcal{L}'_P$). Pour le voir, il suffit d'introduire III. 43 *b* dans $\mathcal{L}_P$ (III. 41) ce qui donne, avec $\vec{\pi} \equiv \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)_{op}$,

$$\mathcal{L}_P = \frac{c}{2}\left\{\chi_1^* \frac{E}{c}\chi_1 + \frac{1}{2m_0 c}(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}\chi_1)^*(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}\chi_1) - \chi_1^*(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2m_0 c}\chi_1 - \right.$$

$$-\left(\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2m_0 c}\chi_1\right)^*\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi_1 - \frac{qV}{c}\chi_1^*\chi_1 + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\left[\chi_1^*\vec{\sigma}\left(\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2m_0 c}\chi_1\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2m_0 c}\chi_1\right)\vec{\sigma}\chi_1\right]\right\} + \text{conj} =$$

$$= \frac{c}{2}\chi_1^*\left\{\frac{E}{c}\chi_1 - \left(\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2m_0 c}\right)^2\chi_1 - \frac{qV}{c}\chi_1\right\} + \text{conj} = 0\,.$$

CHAPITRE IV

L'approximation non relativiste de la theorie généralisée de la particule de spin maximum 1

§ 1. Calcul de l'approximation non relativiste des équations spinorielles généralisées.

Dans le présent paragraphe nous allons calculer l'approximation non relativiste des équations spinorielles de la particule de spin maximum 1 et charge q se déplaçant dans un champ éxtérieur défini par les potentiels électromagnétiques $\vec{A}$ et V (équations II. 17) [19]. L'approximation en β discutée au chapitre antérieur demeure ici valable de même que l'expression de l'approximation non relativiste de certains opérateur que nous y avons étudiés.

Commençons par rappeler les équations généralisées II. 17 lesquelles, en introduisant les opérateurs

IV. 1 $$\varepsilon_{op} \equiv (E - q\,V)_{op} = -i\hbar\,\partial_t - q\,V$$

IV. 2 $$\vec{\pi}_{op} \equiv \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)_{op} = i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\,,$$

prennent la forme

IV. 3 $$\left[\frac{\varepsilon}{c}\frac{a_4 + b_4}{2} + \sum_{k=1}^{3}\pi_k\frac{a_4\,b_k + a_k\,b_4}{2} - m_0\,c\,a_4\,b_4\right]\psi = 0\,.$$

En outre nous garderons toujours la définition I. 19 des α_μ, à partir dequels on construit les matrices 16×16 a_μ et b_μ (I. 5). Une fois a_μ et b_μ introduits dans IV. 3 on obtient la forme explicite de ces équations, qui est la suivante

$$2\left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\psi_{11} - \pi_z(\psi_{13} + \psi_{31}) + (-\pi_x + i\pi_y)(\psi_{14} + \psi_{41}) = 0$$

$$2\left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\psi_{12} + \pi_z(\psi_{14} - \psi_{32}) - \pi_x(\psi_{13} + \psi_{42}) + i\pi_y(\psi_{42} - \psi_{13}) = 0$$

$$2\left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\psi_{21} + \pi_z(\psi_{41} - \psi_{23}) - \pi_x(\psi_{24} + \psi_{31}) + i\pi_y(\pi_{24} - \pi_{31}) = 0$$

$$2\left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\psi_{22} + \pi_z(\psi_{24} + \psi_{42}) + (-\pi_x - i\pi_y)(\psi_{23} + \psi_{32}) = 0$$

$$2\left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\psi_{33} + \pi_z(\psi_{13} + \psi_{31}) + (\pi_x - i\pi_y)(\psi_{23} + \psi_{32}) = 0$$

$$2\left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\psi_{34} + \pi_z(\psi_{14} - \psi_{32}) + \pi_x(\psi_{24} + \psi_{31}) - i\pi_y(\psi_{24} - \psi_{31}) = 0$$

$$2\left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\psi_{43} + \pi_z(\psi_{41} - \psi_{23}) + \pi_x(\psi_{42} + \psi_{13}) + i\pi_y(\psi_{13} - \psi_{42}) = 0$$

$$2\left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\psi_{44} - \pi_z(\psi_{24} + \psi_{42}) + (\pi_x + i\pi_y)(\psi_{14} + \psi_{41}) = 0$$

$$2 m_0 c\,\psi_{13} + \pi_z(\psi_{33} - \psi_{11}) + (\pi_x - i\pi_y)(\psi_{43} - \psi_{12}) = 0$$

$$2 m_0 c\,\psi_{14} + \pi_z(\psi_{12} + \psi_{34}) + \pi_x(\psi_{44} - \psi_{11}) - i\pi_y(\psi_{44} + \psi_{11}) = 0$$

$$2 m_0 c\,\psi_{23} - \pi_z(\psi_{43} + \psi_{21}) + \pi_x(\psi_{33} - \psi_{22}) + i\pi_y(\psi_{22} + \psi_{33}) = 0$$

$$2 m_0 c\,\psi_{24} + \pi_z(\psi_{22} - \psi_{44}) + (\pi_x + i\pi_y)(\psi_{34} - \psi_{21}) = 0$$

$$2 m_0 c\,\psi_{31} + \pi_z(\psi_{33} - \psi_{11}) + (\pi_x - i\pi_y)(\psi_{34} - \psi_{21}) = 0$$

$$2 m_0 c\,\psi_{32} - \pi_z(\psi_{12} + \psi_{34}) + \pi_x(\psi_{33} - \psi_{22}) + i\pi_y(\psi_{22} + \psi_{33}) = 0$$

$$2 m_0 c\,\psi_{41} + \pi_z(\psi_{21} + \psi_{43}) + \pi_x(\psi_{44} - \psi_{11}) - i\pi_y(\psi_{11} + \psi_{44}) = 0$$

$$2 m_0 c\,\psi_{42} + \pi_z(\psi_{22} - \psi_{44}) + (\pi_x + i\pi_y)(\psi_{43} - \psi_{12}) = 0\,.$$

Nous présentons ici la forme explicite de IV. 3 parce qu'à partir des équations antérieures on vérifie aisément que IV. 3 peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\text{IV. 4} \quad \begin{cases} a) & \left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\chi_1 + \frac{1}{2}(-\theta_2\chi_2 - \theta_1\chi_3) = 0 \\ b) & \left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\chi_4 + \frac{1}{2}(\theta_1\chi_2 + \theta_2\chi_3) = 0 \\ c) & m_0 c\,\chi_2 + \frac{1}{2}(-\theta_2\chi_1 + \theta_1\chi_4) = 0 \\ d) & m_0 c\,\chi_3 + \frac{1}{2}(-\theta_1\chi_1 + \theta_2\chi_4) = 0, \end{cases}$$

où $\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4$ désignent les matrices colonnes

$$\text{IV. 5} \quad \chi_1 = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{bmatrix} \psi_{13} \\ \psi_{14} \\ \psi_{23} \\ \psi_{24} \end{bmatrix}, \quad \chi_3 = \begin{bmatrix} \psi_{31} \\ \psi_{32} \\ \psi_{41} \\ \psi_{42} \end{bmatrix}, \quad \chi_4 = \begin{bmatrix} \psi_{33} \\ \psi_{34} \\ \psi_{43} \\ \psi_{44} \end{bmatrix},$$

tandis que θ_1 et θ_2 représentent les deux matrices

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} \pi_z & 0 & \pi_x - i\pi_y & 0 \\ 0 & \pi_z & 0 & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_z & 0 & -\pi_z & 0 \\ 0 & \pi_x + i\pi_z & 0 & -\pi_z \end{bmatrix},$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y & 0 & 0 \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ 0 & 0 & \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{bmatrix}$$

c'est à dire, en vertu de I. 2,

$$\text{IV. 6} \quad \theta_1 = \begin{bmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{bmatrix} \times I, \quad \theta_2 = I \times \begin{bmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{bmatrix}$$

La forme IV. 4 des équations spinorielles de la particule de spin maximum 1 et charge q s'avère être la plus adéquate comme point de départ de notre calcul. Ainsi, et pour commencer, les

équations IV. 4*c* et IV. 4*d* déterminent χ_2 et χ_3 en fonction de χ_1 et χ_4,

$$\chi_2 = \frac{1}{2 m_0 c}(\theta_2 \chi_1 - \theta_1 \chi_4)$$

$$\chi_3 = \frac{1}{2 m_0 c}(\theta_1 \chi_1 - \theta_2 \chi_4),$$

et par conséquent,

$$-\theta_2 \chi_2 - \theta_1 \chi_3 = -(2 m_0 c)^{-1}[(\theta_1^2 + \theta_2^2)\chi_1 - (\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1)\chi_4]$$

$$\theta_1 \chi_2 + \theta_2 \chi_3 = \quad (2 m_0 c)^{-1}[(\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1)\chi_1 - (\theta_1^2 + \theta_2^2)\chi_4].$$

En introduisant ces expressions dans IV. 4*a* et IV. 4*b*, on obtient

IV. 7

$$a)\left[\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c - \frac{1}{4 m_0 c}(\theta_1^2 + \theta_2^2)\right]\chi_1 = -\frac{1}{4 m_0 c}(\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1)\chi_4$$

$$b)\left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0 c + \frac{1}{4 m_0 c}(\theta_1^2 + \theta_2^2)\right]\chi_4 = \quad \frac{1}{4 m_0 c}(\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1)\chi_1.$$

Grâce à IV. 7*b* on peut exprimer χ_4 en fonction de χ_1, ce qui donne

$$\chi_4 = (4 m_0 c)^{-1}\left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0 c + \frac{1}{4 m_0 c}(\theta_1^2 + \theta_2^2)\right]^{-1}(\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1)\chi_1,$$

et par la substitution de cette expression dans IV. 7*a* on est finalement conduit au système

IV. 8

$$a)\left\{\varepsilon - m_0 c^2 - \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4 m_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1}{16 m_0^2 c}\left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0 c + \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4 m_0 c}\right]^{-1} \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1)\right\}\chi_1 = 0$$

$$b)\ \chi_4 = \left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0 c + \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4 m_0 c}\right]^{-1} \frac{\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1}{4 m_0 c}\chi_1$$

$$c)\ \chi_2 = (2 m_0 c)^{-1}(-\theta_1 \chi_4 + \theta_2 \chi_1)$$

$$d)\ \chi_3 = (2 m_0 c)^{-1}(-\theta_2 \chi_4 + \theta_1 \chi_1).$$

Les équations obtenues sont équivalentes aux équations relativistes initiales IV. 3. Elles montrent, en particulier, que l'étude des équations de la particule de spin maximum 1 peut être ramenée — du moins en principe — à celle d'un ensemble de quatre équations différentielles d'ordre infini, les équations IV. 8 *a*. Les équations IV. 8 *b c d* ne font alors qu'exprimer χ_2, χ_3 et χ_4 en fonction de χ_1, donné par l'intégration de IV. 8 *a*.

C'est sur la forme IV. 8 des équations que nous allons calculer l'approximation non relativiste. D'une façon identique à ce qui fut fait en III. 24, on peut voir que l'opérateur $\frac{\varepsilon_r}{c} - m_0 c$ devient, à l'approximation non relativiste,

$$\text{IV. 9} \qquad \frac{\varepsilon_r}{c} - m_0 c \cong \frac{1}{c}(E_n - qV) = \frac{\varepsilon_n}{c}.$$

En plus, on a aussi

$$\left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0 c + \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4 m_0 c}\right]^{-1} =$$

$$= (2 m_0 c)^{-1}\left[1 - \frac{E_n - qV}{2 m_0 c^2} - \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{8 m_0^2 c^2} + \cdots\right],$$

expression qui devient, à l'approximation en β,

$$\text{IV. 10} \qquad \left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0 c + \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4 m_0 c}\right]^{-1} \cong \frac{1}{2 m_0 c}.$$

En effet, si on tient compte des définitions IV. 6 de θ_1 et θ_2, fonctions de $\vec{p}$, le terme $(8 m_0^2 c^2)^{-1}(\theta_1^2 + \theta_2^2)$ est de l'ordre de $\beta^2 = \vec{p}^2 / m_0^2 c^2$ et doit donc être négligé. Nous verrons d'ailleurs, par la suite, la forme explicite de $\theta_1^2 + \theta_2^2$.

Si donc on introduit IV. 10, IV. 9 dans IV. 8, on arrive au système d'équations

$$\text{IV. 11} \qquad a) \quad \left[\varepsilon - \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4 m_0} + \frac{(\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1)^2}{32 m_0^3 c^2}\right]\chi_1 = 0$$

$$b) \quad \chi_4 = \frac{\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1}{8 m_0^2 c^2}\chi_1$$

$$c) \qquad \chi_2 = \frac{\theta_2 \chi_1 - \theta_1 \chi_4}{2 m_0 c}$$

IV. 11

$$d) \qquad \chi_3 = \frac{\theta_1 \chi_1 - \theta_2 \chi_4}{2 m_0 c} .$$

Retournons maintenant à la définition IV. 6 des matrices θ_1 et θ_2. Si on emploie les trois matrices de Pauli,

IV. 12 $$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

on voit que l'on peut poser

$$\begin{bmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{bmatrix} = \pi_x \sigma_1 + \pi_y \sigma_2 + \pi_z \sigma_3 = \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}.$$

En conséquence, on a

$$\theta_1 = (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I, \qquad \theta_2 = I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}),$$

l'opérateur $\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1$ s'écrivant alors

$$\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1 = [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I][I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})] + [I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})][(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I] =$$

$$= [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})] + [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})] =$$

$$= 2\left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) \cdot \vec{\sigma}\right] \times \left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) \cdot \vec{\sigma}\right].$$

En vertu de cette égalité, l'équation IV. 11b exprime alors que χ_4 est de l'ordre de $\beta^2 = \vec{p}^2 / m_0^2 c^2$ par rapport à χ_1, et doit donc être négligé:

$$\chi_4 \cong 0 .$$

En outre, ceci nous conduit à simplifier les équations IV. 11 *c d* qui deviennent

$$\chi_2 = \frac{1}{2 m_0 c} \theta_2 \chi_1$$

$$\chi_3 = \frac{1}{2 m_0 c} \theta_1 \chi_1 ,$$

ces formules exprimant clairement que χ_2 et χ_3 sont de l'ordre de $\beta = p/m_0 c$ par rapport à χ_1.

En passant maintenant à l'équation IV. 11 *a* on voit, en vertu de ce qui précède, que le terme $(32 m_0^3 c^2)^{-1} (\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1)^2$ doit être négligé, son ordre de grandeur étant celui de $\beta^2 = p^2/m_0^2 c^2$. Quant à l'opérateur $\theta_1^2 + \theta_2^2$ on peut l'écrire comme suit,

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I] [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I] + [I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})] [I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})]$$

$$= [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})^2 \times I] + [I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})^2]$$

$$= \left[\left(\vec{\pi}^2 + \frac{\hbar q}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{H} \right) \times I \right] + \left[I \times \left(\vec{\pi}^2 + \frac{\hbar q}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{H} \right) \right],$$

$\vec{H} = \text{rot}\, \vec{A}$ étant le champ magnétique. On est ainsi conduit à

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = 2 \vec{\pi}^2 + \frac{\hbar q}{c} [(\vec{\sigma} \times I) + (I \times \vec{\sigma})] \cdot \vec{H} .$$

Bref, l'approximation en β des équations IV. 11 s'écrit

IV. 13

$$a) \quad \left\{ \varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0} - \frac{\hbar q}{2 m_0 c} \left[\frac{(\vec{\sigma} \times I) + (I \times \vec{\sigma})}{2} \right] \cdot \vec{H} \right\}_{op} \chi_1 = 0$$

$$b) \quad \chi_2 = \frac{1}{2 m_0 c} \theta_2 \chi_1 = (2 m_0 c)^{-1} (I \times \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \chi_1$$

$$c) \quad \chi_3 = \frac{1}{2 m_0 c} \theta_1 \chi_1 = (2 m_0 c)^{-1} (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \times I) \chi_1$$

$$d) \quad \chi_4 \cong 0$$

soit encore, en introduisant la forme explicite des opérateurs ε, $\vec{\pi}$, θ_1 et θ_2 donnée respectivement par IV. 1, IV. 2 et IV. 6,

IV.14

$$a)\quad \left[i\hbar\,\partial_t + qV + \frac{1}{2m_0}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{\hbar q}{2m_0 c}\,\frac{(\vec{\sigma}\times I) + (I\times\vec{\sigma})}{2}\cdot\vec{H}\right]\begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\\ \psi_{21}\\ \psi_{22}\end{bmatrix} = 0$$

$$b)\quad \begin{bmatrix}\psi_{13}\\ \psi_{14}\\ \psi_{23}\\ \psi_{24}\end{bmatrix} = (2m_0 c)^{-1}\left(I\times\begin{bmatrix} i\hbar\,\partial_z - \frac{q}{c}A_z & i\hbar(\partial_x - i\partial_y) - \frac{q}{c}(A_x - iA_y)\\ i\hbar(\partial_x + i\partial_y) - \frac{q}{c}(A_x + iA_y) & -i\hbar\,\partial_z + \frac{q}{c}A_z\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\\ \psi_{21}\\ \psi_{22}\end{bmatrix}$$

$$c)\quad \begin{bmatrix}\psi_{31}\\ \psi_{32}\\ \psi_{41}\\ \psi_{42}\end{bmatrix} = (2m_0 c)^{-1}\left(\begin{bmatrix} i\hbar\,\partial_z - \frac{q}{c}A_z & i\hbar(\partial_x - i\partial_y) - \frac{q}{c}(A_x - iA_y)\\ i\hbar(\partial_x + i\partial_y) - \frac{q}{c}(A_x + iA_y) & -i\hbar\,\partial_z + \frac{q}{c}A_z\end{bmatrix}\times I\right)\begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\\ \psi_{21}\\ \psi_{22}\end{bmatrix}$$

$$d)\quad \psi_{33} = \psi_{34} = \psi_{43} = \psi_{44} \cong 0\,.$$

Ce système spinoriel représente l'approximation non relativiste des équations IV. 3 de la particule de spin maximum 1 et charge q se déplaçant dans un champ extérieur défini par les potentiels électromagnétiques $\vec{A}$ et V. L'évolution au cours du temps de l'état de la particule est régie simplement par l'équation IV. 14 *a* dont l'intégration nous donne $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$, les équations IV. 14 *b c* ne faisant qu'exprimer $\psi_{13}\,\psi_{14}\,\psi_{23}\,\psi_{24}\,\psi_{31}\,\psi_{32}\,\psi_{41}$ et ψ_{42} en fonction de $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$. Ces composantes $\psi_{13}\,\psi_{14}\,\psi_{23}\cdots\psi_{42}$ sont d'ailleurs de l'ordre de β par rapport à $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$ (*). Quant à IV. 14 *d*, elle exprime que $\psi_{33}\,\psi_{34}\,\psi_{43}\,\psi_{44}$ sont de l'ordre de β^2.

L'étude non relativiste de l'évolution dans le temps de l'état de la particule de spin maximum 1 se ramène donc à celui de la seule équation IV. 14 *a* laquelle possède des liens de ressemblance bien frappants avec l'équation de Pauli (voir Chapitre III § 6),

IV. 15

$$\left[i\hbar\,\partial_t + q\,V + \frac{1}{2\,m_0}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{\hbar\,q}{2\,m_0\,c}\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\right]\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = 0\,.$$

On peut effectivement dire que IV. 14 *a* s'obtient formellement de IV. 15 en remplaçant dans cette équation la fonction d'onde à deux composantes par une function d'onde à $2\times 2 = 4$ composantes et en y substituant les matrices $\vec{\sigma}$ et $\sigma_4 \equiv I$ par $\dfrac{(\vec{\sigma}\times I) + (I\times\vec{\sigma})}{2}$ et I, respectivement. D'une façon abrégée, ceci revient à dire que les quatre matrices $\Theta = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ sont remplacées par

IV. 16 $$\frac{(\Theta\times I)(I\times\sigma_4) + (I\times\Theta)(\sigma_4\times I)}{2}\,.$$

Rappelons-nous maintenant les deux points fondamentaux de la méthode de la fusion de M. Broglie, permettant d'obtenir les équations relativistes de la particule de spin maximum 1

(*) Au chapitre antérieur nous avions déjà souligné l'importance des équations du genre de IV. 14 *b c*, sans lesquelles il n'est pas possible d'établir le raccord correct entre le formalisme suscité par IV. 3 et celui qui découle de IV. 14 *a*. Par la suite nous examinerons de plus près cette question.

à partir des équations de Dirac. On peut dire que pour y parvenir il suffit de prendre dans les équations de Dirac au lieu d'une fonction d'onde à 4 composantes, une fonction d'onde à $4 \times 4 = 16$ composantes, et d'y remplacer les matrices $\Theta = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, I$ par

$$\text{IV. 17} \qquad \frac{(\Theta \times I)(I \times \alpha_4) + (I \times \Theta)(\alpha_4 \times I)}{2}.$$

(En vertu de I. 5, ceci équivaut à dire que les matrices $\vec{\alpha}$, α_4 et I viennent remplaçées par $\frac{\vec{a}\, b_4 + \vec{b}\, a_4}{2}$, $a_4 b_4$ et $\frac{a_4 + b_4}{2}$, respectivement).

On voit de par la comparaison de IV. 16 et IV. 17 que le parallélisme du procédé dans les deux cas est tout à fait satisfaisant. On peut ainsi conclure que la méthode de fusion de M. de Broglie demeure aussi valable au niveau non relativiste, en ce sens que la même démarche formelle permet de fusionner deux corpuscules de Pauli et de parvenir aux équations non relativistes de la particule de spin maximum 1.

§ 2. Le formalisme non relativiste.

Pour obtenir une équation de continuité en partant des équations non relativistes de la particule de spin maximum 1, nous multiplions IV. 14 *a* à gauche par $\chi_1^* = [\psi_{11}^* \psi_{12}^* \psi_{21}^* \psi_{22}^*]$ et retranchons de l'équation obtenue son équation conjuguée. Après quoi un calcul simple nous conduit à une relation de la forme $\partial_t \rho_n + \operatorname{div} j_n = 0$, avec

$$\text{IV. 18} \qquad \rho_n = \chi_1^* \chi_1$$

$$\text{IV. 19} \qquad \vec{j}_n = \frac{i\hbar}{2 m_0} (\chi_1^* \vec{\nabla} \chi_1 - \chi_1 \vec{\nabla} \chi_1^*) - \frac{q}{2 m_0 c} \chi_1^* \chi_1 \vec{A}.$$

Nous admettons que IV. 18 et IV. 19 sont, respectivement, les expressions non relativistes de la densité de probabilité et du vecteur flux de probabilité de la particule de spin maximum 1 et charge q.

On peut d'ailleurs retrouver ces mêmes expressions en calculant directement l'approximation non relativiste sur les définitions relativistes II. 18 et II. 19, procédé où interviennent essentiellement les équations IV. 14 *b c*. En effet, en partant de ϱ_r donné par II. 18 et compte tenu de I. 5, I. 19 et IV. 14 *d*, nous avons (*):

$$\varrho_r = \psi_{11}^* \psi_{11} + \psi_{12}^* \psi_{12} + \psi_{21}^* \psi_{21} + \psi_{22}^* \psi_{22} - \psi_{33}^* \psi_{33} - \psi_{34}^* \psi_{34} - \psi_{43}^* \psi_{43} - \psi_{44}^* \psi_{44}$$

$$\cong \psi_{11}^* \psi_{11} + \psi_{12}^* \psi_{12} + \psi_{21}^* \psi_{21} + \psi_{22}^* \psi_{22} = \chi_1^* \chi_1 = \varrho_n ,$$

et l'on retrouve ainsi l'expression non relativiste IV. 18 de la densité de probabilité.

Prenons maintenant la définition relativiste II. 19 du vecteur flux de probabilité, ou plutôt la première composante de ce vecteur, l'étude des deux autres étant analogue. Si l'on construit la matrice $a_1 b_4 + a_4 b_1$ à partir de la forme I. 19 adoptée pour les α_μ et si l'on tient compte de IV. 14 *d*, le calcul conduit à poser

$$\frac{2}{c} j_{1r} \cong \psi_{11}^* (\psi_{14} + \psi_{41}) + \psi_{12}^* (\psi_{13} + \psi_{42}) + \psi_{21}^* (\psi_{24} + \psi_{31}) +$$

$$+ \psi_{22}^* (\psi_{23} + \psi_{32}) + \text{conj}$$

$$= [\psi_{11}^* \psi_{12}^* \psi_{21}^* \psi_{22}^*] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{13} \\ \psi_{14} \\ \psi_{23} \\ \psi_{24} \end{bmatrix} +$$

$$+ [\psi_{11}^* \psi_{12}^* \psi_{21}^* \psi_{22}^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{31} \\ \psi_{32} \\ \psi_{41} \\ \psi_{42} \end{bmatrix} + \text{conj} ,$$

c'est à dire, en vertu de IV. 5 et IV. 12,

$$\frac{2}{c} j_{1r} \cong \chi_1^* (I \times \sigma_1) \chi_2 + \chi_1^* (\sigma_1 \times I) \chi_3 + \text{conj} .$$

(*) Les indices r et n se réfèrent aux expressions relativistes et non relativistes, respectivement.

Introduisons ici les expressions non relativistes IV. 13 *b c* de χ_2 et χ_3. On a alors:

$$4\,m_0\,j_{1_r} \cong \chi_1^*\,(I \times \sigma_1)(I \times \vec{\pi}\cdot\vec{\sigma})\,\chi_1 + \chi_1^*\,(\sigma_1 \times I)(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma} \times I)\,\chi_1 + \text{conj}$$

$$= 2\,\chi_1^* \left\{ \frac{(I \times \sigma_1\,(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma})) + (\sigma_1\,(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}) \times I)}{2} \right\} \chi_1 + \text{conj}\,,$$

et, étant donné IV. 2 et IV. 12, un bref calcul conduit à écrire

$$4\,m_0\,j_{1_r} \cong 2\,i\,\hbar\,(\psi_{11}^*\,\partial_1\,\psi_{11} + \psi_{12}^*\,\partial_1\,\psi_{12} + \psi_{21}^*\,\partial_1\,\psi_{21} + \psi_{22}^*\,\partial_1\,\psi_{22} - \text{conj}) +$$

$$- \frac{4\,q}{c}\,A_1\,(\psi_{11}^*\,\psi_{11} + \psi_{12}^*\,\psi_{12} + \psi_{21}^*\,\psi_{21} + \psi_{22}^*\,\psi_{22}) -$$

$$- \hbar\,\{\psi_{11}^*\,[2\,\partial_2\,\psi_{11} + i\,\partial_3\,(\psi_{12} + \psi_{21})] + i\,\psi_{12}^*\,\partial_3\,(-\psi_{11} + \psi_{22}) +$$

$$+ i\,\psi_{21}^*\,\partial_3\,(-\psi_{11} + \psi_{22}) + \psi_{22}^*\,[-i\,\partial_3\,(\psi_{12} + \psi_{21}) - 2\,\partial_2\,\psi_{22}] + \text{conj}\}\,.$$

Or on vérifie aisément que la dernière parenthèse de cette expression est égale à

$$[\psi_{11}^*\,\psi_{12}^*\,\psi_{21}^*\,\psi_{22}^*] \begin{bmatrix} 2\,\partial_2 & i\,\partial_3 & i\,\partial_3 & 0 \\ -i\,\partial_3 & 0 & 0 & i\,\partial_3 \\ -i\,\partial_3 & 0 & 0 & i\,\partial_3 \\ 0 & -i\,\partial_3 & -i\,\partial_3 & -2\,\partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} + \text{conj} = 0$$

$$= \chi_1^* \left\{ \left(I \times \begin{bmatrix} \partial_2 & i\,\partial_3 \\ -i\,\partial_3 & -\partial_2 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} \partial_2 & i\,\partial_3 \\ -i\,\partial_3 & -\partial_2 \end{bmatrix} \times I \right) \right\} \chi_1 + \text{conj}$$

$$= \chi_1^*\,[(I \times (\partial_2\,\sigma_3 - \partial_3\,\sigma_2)) + ((\partial_2\,\sigma_3 - \partial_3\,\sigma_2) \times I)]\,\chi_1 + \text{conj}.$$

La définition III. 37 de l'opérateur $\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}$ et le fait qne l'étude des deux autres composantes de $\vec{j}_r$ est identique, amènent alors à poser

$$4\,m_0\,j_r \cong (2\,i\,\hbar\,\chi_1^*\,\vec{\nabla}\,\chi_1 + \text{conj}) - \frac{4\,q}{c}\,\vec{A}\,\chi_1^*\,\chi_1 -$$

$$- \hbar\,\{\chi_1^*\,[(I \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma})) + ((\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}) \times I)]\,\chi_1 + \text{conj}\}\,,$$

ce qui nous conduit à la forme finale de l'approximation non relativiste de $\vec{j}_r$,

$$\vec{j}_r \simeq \frac{i\hbar}{2m_0}(\chi_1^* \vec{\nabla}\chi_1 - \chi_1 \vec{\nabla}\chi_1^*) - \frac{q}{m_0 c}\vec{A}\chi_1^*\chi_1 + \vec{u},$$

avec

$$\text{IV. 20} \qquad \vec{u} = -\frac{\hbar}{2m_0}\chi_1^* \frac{(\mathrm{I} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma})) + ((\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}) \times \mathrm{I})}{2}\chi_1 + \text{conj.}$$

On voit allors que l'expression IV. 19 de $\vec{j}_n$ ne coincide pas avec l'approximation non relativiste de $\vec{j}_r$, les deux expressions différant d'un vecteur $\vec{u}$, donné par IV. 20. Or nous avions déjà souligné un fait analogue en étudiant au Chapitre III § 3 l'approximation non relativiste de la théorie de Dirac, et il est intéressant de comparer ici les deux vecteurs (III. 40 et IV. 20) qui, dans chaque cas, sont à l'origine de cette anomalie. On voit clairement que $\vec{u}$ s'obtient formellement de III. 40 en substituant les matrices $\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}$ par $\frac{(\mathrm{I} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma})) + ((\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}) \times \mathrm{I})}{2}$, ce qui semble confirmer à nouveau le procédé de fusion auquel nous avons souvent fait référence dans ce travail.

En renvoyant alors à la discussion de la fin du Chapitre III on peut dire que le raccord entre $\vec{j}_r$ et $\vec{j}_n$ sera correct si $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Or c'est bien ce qui arrive et qui peut être vérifié directement à partir de l'expression IV. 20 de $\vec{u}$. Nous omettrons ce calcul qui est sans difficulté.

Passons ensuite à l'étude non relativiste du lagrangien II. 16 de la particule de spin maximum 1 lequel, en vertu de IV. 1 et IV. 2 s'écrit

$$\text{IV. 21} \qquad \mathcal{L} = \frac{c}{2}\psi^* \left[\frac{\varepsilon}{c} \frac{a_4 + b_4}{2} + \vec{\pi} \cdot \frac{a_4 \vec{b} + \vec{a} b_4}{2} - m_0 c\, a_4 b_4 \right] \psi + \text{conj.}$$

On peut vérifier qu'il est possible de donner à cette expression la forme

$$\text{IV. 22} \quad \mathcal{L} = \frac{c}{2}\left\{\chi_1^*\left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\chi_1 + \frac{1}{2}\chi_1^*(-\theta_2\chi_2 - \theta_1\chi_3) + \right.$$

$$+ \chi_4^*\left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right)\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_4^*(\theta_1\chi_2 + \theta_2\chi_3) + m_0 c\,\chi_2^*\chi_2 +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\chi_2^*(-\theta_2\chi_1 + \theta_1\chi_4) + m_0 c\,\chi_3^*\chi_3 + \frac{1}{2}\chi_3^*(-\theta_1\chi_1 + \theta_2\chi_4)\right\} + \text{conj},$$

le passage de IV. 21 à IV. 22 étant identique à celui de IV. 3 à IV. 4. Or à l'approximation non relativiste on a $\frac{\varepsilon_r}{c} - m_0 c \cong \frac{\varepsilon_n}{c}$ et $-\frac{\varepsilon_r}{c} - m_0 c \cong -\frac{\varepsilon_n}{c} - 2 m_0 c$ de sorte que $\mathcal{L}$ devient

$$\mathcal{L} = \frac{c}{2}\left\{\chi_1^*\frac{\varepsilon}{c}\chi_1 + \frac{1}{2}\chi_1^*(-\theta_2\chi_2 - \theta_1\chi_3) + m_0 c\,(\chi_3^*\chi_3 + \chi_2^*\chi_2) - \right.$$

$$- \frac{1}{2}(\chi_2^*\theta_2\chi_1 + \chi_3^*\theta_1\chi_1) + \frac{1}{2}(\chi_2^*\theta_1\chi_4 + \chi_3^*\theta_2\chi_4) -$$

$$\left. - \chi_4^*\frac{\varepsilon}{c}\chi_4 - 2 m_0 c\,\chi_4^*\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_4^*(\theta_1\chi_2 + \theta_2\chi_3)\right\} + \text{conj}.$$

Dans cette expression on ne doit garder que les seuls termes en β^0 et β^1, c'est à dire que les quatre derniers termes dans la parenthèse doivent être négligés, leur ordre de grandeur étant celui de β^2. La forme approchée de $\mathcal{L}$ est donc

$$\mathcal{L} \cong \chi_1^*\frac{\varepsilon}{2}\chi_1 + \frac{m_0 c^2}{2}(\chi_2^*\chi_2 + \chi_3^*\chi_3) -$$

$$- \frac{c}{4}(\chi_1^*\theta_2\chi_2 + \chi_1^*\theta_1\chi_3 + \chi_2^*\theta_2\chi_1 + \chi_3^*\theta_1\chi_1) + \text{conj},$$

soit encore, par IV. 1, IV. 2 et IV. 6,

$$\text{IV. 23} \quad \mathcal{L} \cong \mathcal{L}_n \equiv -\frac{i\hbar}{2}\chi_1^*\partial_t\chi_1 - \frac{q}{2}V\chi_1^*\chi_1 + \frac{m_0 c^2}{2}(\chi_2^*\chi_2 + \chi_3^*\chi_3) -$$

$$- \frac{i\hbar c}{4}[\chi_1^*(I \times \vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_2 + \chi_1^*(\vec{\sigma} \times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_3 +$$

$$+ \chi_2^*(I \times \vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_1 + \chi_3^*(\vec{\sigma} \times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_1] +$$

$$+\frac{q}{4}\vec{A}\cdot[\chi_1^*(I\times\vec{\sigma})\chi_2+\chi_1^*(\vec{\sigma}\times I)\chi_3+$$

$$+\chi_2^*(I\times\vec{\sigma})\chi_1+\chi_3^*(\sigma\times I)\chi_1]+\text{conj.}$$

Telle est l'approximation non relativiste du lagrangien de la particule de spin maximum 1, et l'on peut vérifier que les équations de Lagrange qui en decoulent sont bien les équations IV. 14. En effet, on a

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_k\chi_1^*)}=\frac{i\hbar c}{4}(I\times\sigma_k)\chi_2+\frac{i\hbar c}{4}(\sigma_k\times I)\chi_3 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_t\chi_1^*)}=\frac{i\hbar}{2}\chi_1$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial\chi_1^*}=-\frac{i\hbar}{2}\partial_t\chi_1-qV\chi_1-\frac{i\hbar c}{4}(I\times\vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_2-$$

$$-\frac{i\hbar c}{4}(\vec{\sigma}\times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_3+\frac{q}{2}\vec{A}\cdot[(I\times\vec{\sigma})\chi_2+(\vec{\sigma}\times I)\chi_3]$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_k\chi_2^*)}=\frac{i\hbar c}{4}(I\times\sigma_k)\chi_1 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_t\chi_2^*)}=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial\chi_2^*}=m_0c^2\chi_2-\frac{i\hbar c}{4}(I\times\vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_1+\frac{q}{2}\vec{A}\cdot(I\times\vec{\sigma})\chi_1$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_k\chi_3^*)}=\frac{i\hbar c}{4}(\sigma_k\times I)\chi_1 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_t\chi_3^*)}=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial\chi_3^*}=m_0c^2\chi_3-\frac{i\hbar c}{4}(\vec{\sigma}\times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_1+\frac{q}{2}\vec{A}\cdot(\vec{\sigma}\times I)\chi_1,$$

de sorte que les équations de Lagrange prennent la forme

$$a)\quad \frac{i\hbar c}{2}(I\times\vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_2+\frac{i\hbar c}{2}(\vec{\sigma}\times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_3=-i\hbar\partial_t\chi_1-$$

$$-qV\chi_1+\frac{q}{2}\vec{A}\cdot[(I\times\vec{\sigma})\chi_2+(\vec{\sigma}\times I)\chi_3]$$

IV. 24

$$b)\quad \chi_2=\frac{i\hbar}{2m_0c}(I\times\vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_1-\frac{q}{2m_0c^2}\vec{A}\cdot(I\times\vec{\sigma})\chi_1$$

$$c)\quad \chi_3=\frac{i\hbar}{2m_0c}(\vec{\sigma}\times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_1-\frac{q}{2m_0c^2}\vec{A}\cdot(\vec{\sigma}\times I)\chi_1.$$

On retrouve ainsi les équations IV. 14 *b c*, et par la substitution de IV. 24 *b c* dans IV. 24 *a* on obtient

$$\frac{1}{4m_0}\left(I\times\vec{\sigma}\cdot\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\right)^2\chi_1+$$

$$+\frac{1}{4m_0}\left(\vec{\sigma}\cdot\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\times I\right)^2\chi_1=-i\hbar\,\partial_t\chi_1-qV\chi_1,$$

c'est à dire, par I. 3 et III. 26,

$$\left[\frac{1}{2m_0}\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2+\frac{\hbar q}{2m_0c}\frac{(I\times\vec{\sigma})+(\vec{\sigma}\times I)}{2}\cdot\vec{H}\right]\chi_1=$$

$$=-i\hbar\,\partial_t\chi_1-qV\chi_1,$$

ce qui est bien l'équation IV. 14 *a*. On a ainsi démontré que le système IV. 14 peut se déduire du lagrangien $\mathcal{L}_n$ défini en IV. 23 et obtenu par l'approximation en β de $\mathcal{L}$. En plus, et par l'introduction des équations de Lagrange IV. 24 *b c* dans IV. 23 on vérifie aisément que $\mathcal{L}_n\equiv 0$.

Nous signalons encore que la seule équation IV. 14 *a* peut aussi être obtenue à partir d'un autre lagrangien qui n'est fonction que de quatre variables.

$$\mathcal{L}_n'=\frac{\hbar^2}{2m_0}\vec{\nabla}\chi_1^*\cdot\vec{\nabla}\chi_1+\frac{i\hbar}{2}(\chi_1^*\,\partial_t\chi_1-\chi_1\,\partial_t\chi_1^*)+$$

$$+\frac{\hbar q}{2m_0c}\chi_1^*\frac{(\vec{\sigma}\times I)+(I\times\vec{\sigma})}{2}\chi_1+$$

$$+\frac{i\hbar q}{2m_0c}\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\chi_1^*\cdot\chi_1-\chi_1^*\cdot\vec{\nabla}\chi_1)+\left(qV+\frac{q^2}{2m_0c^2}\vec{A}^2\right)\chi_1^*\chi_1.$$

On trouve ici une nouvelle confirmation de la méthode de fusion, ce lagrangien pouvant s'obtenir formellement de $\mathcal{L}_P$ (III. 42) en substituant $\vec{\sigma}$ par $\frac{(\vec{\sigma}\times I)+(I\times\vec{\sigma})}{2}$ et en faisant intervenir, au lieu d'une fonction d'onde à 2 composantes, une fonction d'onde à $2\times 2=4$ composantes.

§ 3. La forme vectorielle des équations.

Les équations IV. 14 donnent la description non relativiste de la particule de spin maximum 1, c'est à dire qu'elles traduisent le comportement d'une particnle susceptible de prendre l'une des deux valeurs du spin, 0 ou 1. Ce fait sera nettement mis en évidence une fois que l'on parviendra à mettre IV. 14 sous sa forme vectorielle équivalente, cette étude faisant l'objet du présent paragraphe.

Nous commencerons par écrire explicitement IV. 14 *a* en utilisant les matrices $\vec{\sigma}$ définies en IV. 12 ce qui donne

$$\frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)_{op} \psi_{11} + (H_x - i H_y)(\psi_{12} + \psi_{21}) + 2 H_z \psi_{11} = 0$$

$$\frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)_{op} \psi_{12} + H_x(\psi_{11} + \psi_{22}) + i H_y(\psi_{11} - \psi_{22}) = 0$$

$$\frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)_{op} \psi_{21} + H_x(\psi_{11} + \psi_{22}) + i H_y(\psi_{11} - \psi_{22}) = 0$$

$$\frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)_{op} \psi_{22} + (H_x + i H_y)(\psi_{12} + \psi_{21}) - 2 H_z \psi_{22} = 0,$$

soit encore

$$\frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)_{op} \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} + H_x \begin{bmatrix} \psi_{12} + \psi_{21} & \psi_{11} + \psi_{22} \\ \psi_{11} + \psi_{22} & \psi_{12} + \psi_{21} \end{bmatrix} +$$

$$+ i H_y \begin{bmatrix} -\psi_{12} - \psi_{21} & \psi_{11} - \psi_{22} \\ \psi_{11} - \psi_{22} & \psi_{12} + \psi_{21} \end{bmatrix} + H_z \begin{bmatrix} 2\psi_{11} & 0 \\ 0 & -2\psi_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

En introduisant la matrice 2×2 $\overline{\Psi} \equiv \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}$, et en tenant compte de IV. 12, on voit aisément que les équations précédentes peuvent se mettre sous la forme

$$\text{IV. 25} \qquad \frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)_{op} \overline{\Psi} + \sum_{k=1}^{3} H_k(\sigma_k \overline{\Psi} + \overline{\Psi} \sigma_k^T) = 0.$$

Or on vérifie que les matrices $\vec{\sigma}$ (IV 12) sont telles que $\sigma_k^T \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_k$ $(k = 1, 2, 3)$ et par conséquent, si l'on multiplie IV. 25 par σ_2 à droite, on obtient

$$\text{IV. 26} \qquad \frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)_{op} \overline{\Psi}\,\sigma_2 + \sum_{k=1}^{3} H_k (\sigma_k \overline{\Psi}\,\sigma_2 - \overline{\Psi}\,\sigma_2 \sigma_k) = 0 .$$

Rappelons-nous maintenant que le système de quatre matrices formé par l'identité I et les trois $\vec{\sigma}$ est un système complet pour l'ensemble des matrices 2×2, c'est à dire que toute matrice 2×2 peut être écrite comme combinaison linéaire de I, σ_1, σ_2, σ_3. En particulier, on peut poser pour $\overline{\Psi}\,\sigma_2$:

$$\text{IV. 27} \qquad \overline{\Psi}\,\sigma_2 = \begin{bmatrix} i\psi_{12} & -i\psi_{11} \\ i\psi_{22} & -i\psi_{12} \end{bmatrix} =$$

$$= \Omega_0 I + \Omega_1 \sigma_1 + \Omega_2 \sigma_2 + \Omega_3 \sigma_3 = \Omega_0 I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma} .$$

En introduisant alors cette expression de $\overline{\Psi}\,\sigma_2$ dans les équations IV. 26 il vient, en vertu des propriétés de commutations des σ_k (*),

$$0 = \frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)_{op} (\Omega_0 I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}) + \sum_k H_k [\sigma_k (\Omega_0 I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}) -$$

$$- (\Omega_0 I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}) \sigma_k] =$$

$$= \frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)(\Omega_0 I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}) +$$

$$+ 2 i [\sigma_1 (H_2 \Omega_3 - H_3 \Omega_2) + \sigma_2 (H_3 \Omega_1 - H_1 \Omega_3) + \sigma_3 (H_1 \Omega_2 - H_2 \Omega_1)] =$$

$$= \frac{4 m_0 c}{\hbar q} I \left\{\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)\Omega_0\right\} +$$

$$+ \sigma_1 \left\{\frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)\Omega_1 + 2 i (H_2 \Omega_3 - H_3 \Omega_2)\right\} +$$

(*) $\sigma_k^2 = I$, $\sigma_k \sigma_l = -\sigma_l \sigma_k$ $(k, l = 1, 2, 3)$; $\sigma_k \sigma_l = i \sigma_m$ (klm en permutation circulaire de 123).

$$+\sigma_2\left\{\frac{4m_0c}{\hbar q}\left(\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2m_0}\right)\Omega_2+2i(H_3\Omega_1-H_1\Omega_3)\right\}+$$

$$+\sigma_3\left\{\frac{4m_0c}{\hbar q}\left(\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2m_0}\right)\Omega_3+2i(H_1\Omega_2-H_2\Omega_1)\right\}.$$

Puisque les matrices I, σ_1, σ_2, σ_3 sont linéairements indépendentes, leurs coefficients sont nuls, et il en résulte les quatre équations

$$a)\quad \left[\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2m_0}\right]_{op}\Omega_0=0$$

IV.28

$$b)\quad \left[\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2m_0}\right]_{op}\vec{\Omega}+\frac{i\hbar q}{2m_0c}\vec{H}\wedge\vec{\Omega}=0.$$

La seconde de ces équations peut se mettre sous une forme plus suggestive en remarquant que $i\vec{H}\wedge\vec{\Omega}$ s'écrit aussi

IV.29
$$i\vec{H}\wedge\vec{\Omega}=\begin{vmatrix}0 & -iH_z & iH_y\\ iH_z & 0 & -iH_x\\ -iH_y & iH_x & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{vmatrix}=$$

$$=(H_1J_1+H_2J_2+H_3J_3)\vec{\Omega}=(\vec{H}\cdot\vec{J})\vec{\Omega},$$

les $\vec{J}$ $(J_1J_2J_3)$ étant les trois matrices

$$J_1=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{vmatrix}\qquad J_2=\begin{vmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{vmatrix}\qquad J_3=\begin{vmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Les relations IV.28 viennent alors

$$a)\quad \left[\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2m_0}\right]_{op}\Omega_0=0$$

IV.30

$$b)\quad \left[\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2m_0}+\frac{\hbar q}{2m_0c}\vec{J}\cdot\vec{H}\right]_{op}\vec{\Omega}=0,$$

ce qui est la forme vectorielle des équations IV. 14 *a*. Ajoutons que si l'on veut dans la dernière équation — qui est une équation vectorielle de Pauli — mettre en évidence les valeurs $\hbar$, 0 et $-\hbar$ de la composante du spin selon OZ, il suffit de la multiplier à gauche par la matrice unitaire $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix}$.

Alors, en définissant

$$\sqrt{2}\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{bmatrix}=-i\begin{bmatrix}\psi_0\\ \frac{\psi_{12}+\psi_{21}}{\sqrt{2}}\\ \psi_{22}\end{bmatrix},$$

l'équation IV. 30 *b* prend la forme

$$\left\{\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2m_0}+\frac{\hbar q}{2m_0 c}\vec{J}'\cdot\vec{H}\right\}\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\end{bmatrix}=0$$

où les $\vec{J}'$ ($\vec{J}'=U\vec{J}U^{-1}$) sont les trois matrices bien connues

$$J_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad J_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{bmatrix}$$

$$J_3'=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

En passant ensuite aux équations IV. 13 *b c* on vérifie, compte tenu de I. 2, qu'elles peuvent s'écrire sous la forme

IV. 31 $$\begin{bmatrix}\psi_{13}&\psi_{23}\\ \psi_{14}&\psi_{24}\end{bmatrix}=\frac{1}{2m_0 c}(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma})_{op}\begin{bmatrix}\psi_{11}&\psi_{12}\\ \psi_{21}&\psi_{22}\end{bmatrix}^T$$

IV. 32 $$\begin{bmatrix}\psi_{31}&\psi_{32}\\ \psi_{41}&\psi_{42}\end{bmatrix}=\frac{1}{2m_0 c}(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma})_{op}\begin{bmatrix}\psi_{11}&\psi_{12}\\ \psi_{21}&\psi_{22}\end{bmatrix}.$$

Or comme il a été dit plus haut, toute matrice 2×2 peut être écrite comme une combinaison linéaire des quatre matrices

I, $\vec{\sigma}$; c'est à dire que l'on peut poser, avec certains coefficients Δ_k et θ_k $(k=1,2,3,0)$,

IV. 33
$$\begin{bmatrix} \psi_{13} & \psi_{23} \\ \psi_{14} & \psi_{24} \end{bmatrix} \sigma_2 = \begin{bmatrix} i\psi_{23} & -i\psi_{13} \\ i\psi_{24} & -i\psi_{14} \end{bmatrix} =$$
$$= \Delta_0 I + \Delta_1 \sigma_1 + \Delta_2 \sigma_2 + \Delta_3 \sigma_3 = \Delta_0 I + \vec{\Delta} \cdot \vec{\sigma}$$

IV. 34
$$\begin{bmatrix} \psi_{31} & \psi_{32} \\ \psi_{41} & \psi_{42} \end{bmatrix} \sigma_2 = \begin{bmatrix} i\psi_{32} & -i\psi_{31} \\ i\psi_{42} & -i\psi_{41} \end{bmatrix} =$$
$$= \theta_0 I + \theta_1 \sigma_1 + \theta_2 \sigma_2 + \theta_3 \sigma_3 = \theta_0 I + \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}.$$

Or des formules IV. 27 on tire

IV. 25
$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}^T \sigma_2 = \begin{bmatrix} i\psi_{21} & -i\psi_{11} \\ i\psi_{22} & -i\psi_{12} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -\Omega_0 + \Omega_3 & \Omega_1 - i\Omega_2 \\ \Omega_1 + i\Omega_2 & -\Omega_0 - \Omega_3 \end{bmatrix} = -\Omega_0 + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}.$$

Multiplions alors IV. 31 et IV. 32 par σ_2 à droite et introduisons dans les équations ainsi obtenues les expressions de IV. 23, IV. 34, IV. 35 et IV. 37, pour arriver aux relations

IV. 36
$$\Delta_0 \mathrm{I} + \sum_1^3 \Delta_k \sigma_k = (2 m_0 c)^{-1} \sum_1^3 \pi_k \sigma_k (-\Omega_0 \mathrm{I} + \Omega_1 \sigma_1 + \Omega_2 \sigma_2 + \Omega_3 \sigma_3)$$

IV. 37
$$\theta_0 \mathrm{I} + \sum_1^3 \theta_k \sigma_k = (2 m_0 c)^{-1} \sum_1^3 \pi_k \sigma_k (\Omega_0 \mathrm{I} + \Omega_1 \sigma_1 + \Omega_2 \sigma_2 + \Omega_3 \sigma_3).$$

En vertu des propriétés de multiplication des σ_k, on peut donner à IV. 36 la forme suivante,

$$\Delta_0 \mathrm{I} + \sum_1^3 \Delta_k \sigma_k = (2 m_0 c)^{-1} \{ -\pi_1 \Omega_0 \sigma_1 + \pi_1 \Omega_1 \mathrm{I} + i \pi_1 \Omega_2 \sigma_3 - i \pi_1 \Omega_3 \sigma_2 -$$
$$- \pi_2 \Omega_0 \sigma_2 - i \pi_2 \Omega_1 \sigma_3 + \pi_2 \Omega_2 \mathrm{I} + i \pi_2 \Omega_3 \sigma_1 -$$
$$- \pi_3 \Omega_0 \sigma_3 + i \pi_3 \Omega_1 \sigma_2 - i \pi_3 \Omega_2 \sigma_1 + \pi_3 \Omega_3 \mathrm{I} \} =$$
$$= (2 m_0 c)^{-1} \left\{ \mathrm{I} (\pi_1 \Omega_1 + \pi_2 \Omega_2 + \pi_3 \Omega_3) + \sum_k^3 \sigma_k (-\pi_k \Omega_0 + i (\vec{\pi} \wedge \vec{\Omega})_k) \right\},$$

et quant à l'équation IV. 37 elle devient, après un calcul identique,

$$\theta_0 \mathrm{I} + \sum_1^3 \theta_k \sigma_k = (2 m_0 c)^{-1} \Big\{ \mathrm{I} (\pi_1 \Omega_1 + \pi_2 \Omega_2 + \pi_3 \Omega_3) +$$

$$+ \sum_k^3 \sigma_k (\pi_k \Omega_0 + i (\vec{\pi} \wedge \vec{\Omega})_k) \Big\}.$$

L'indépendence des quatre matrices $\mathrm{I}, \vec{\sigma}$, nous conduit, dans les équations précédentes, à annuller les coefficients de chacune de ces matrices et par là-même à obtenir les relations

$$\Delta_0 = (2 m_0 c)^{-1} \vec{\pi} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\vec{\Delta} = (2 m_0 c)^{-1} (-\vec{\pi} \Omega_0 + i \vec{\pi} \wedge \vec{\Omega})$$

$$\theta_0 = (2 m_0 c)^{-1} \vec{\pi} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\vec{\theta} = (2 m_0 c)^{-1} (\vec{\pi} \Omega_0 + i \vec{\pi} \wedge \vec{\Omega}),$$

c'est à dire, en ajoutant et retranchant,

IV. 38
$$\theta_0 - \Delta_0 = 0$$
$$\vec{\theta} - \vec{\Delta} = (m_0 c)^{-1} \vec{\pi} \Omega_0$$

IV. 39
$$\theta_0 + \Delta_0 = (m_0 c)^{-1} \vec{\pi} \cdot \vec{\Omega}$$
$$\vec{\theta} + \vec{\Delta} = i (m_0 c)^{-1} \vec{\pi} \wedge \vec{\Omega}.$$

La forme vectorielle des équations spinorielles IV. 14 est donc donnée par l'ensemble des équations IV. 30, IV. 38, IV 39 et si l'on y fait apparaitre explicitement les opérateurs ε_{op} et $\vec{\pi}_{op}$, définis en IV. 1 et IV. 2, ces équations s'écrivent

IV. 40

a) $$\left[i \hbar \partial_t + q V + \frac{1}{2 m_0} \left(i \hbar \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \right] \Omega_0 = 0$$

b) $$\theta_0 - \Delta_0 = 0$$

c) $$\vec{\theta} - \vec{\Delta} = (m_0 c)^{-1} \left(i \hbar \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \Omega_0$$

$$a)\quad \left[i\hbar\,\partial_t + qV + \frac{1}{2m_0}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{\hbar q}{2m_0 c}\vec{J}\cdot\vec{H}\right]\vec{\Omega} = 0$$

IV.41 $$b)\quad \theta_0 + \Delta_0 = (m_0 c)^{-1}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\Omega}$$

$$c)\quad \vec{\theta} + \vec{\Delta} = i(m_0 c)^{-1}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\wedge\vec{\Omega}.$$

Telle est la forme vectorielle des équations non relativistes de la particule de spin maximum 1 et charge q se déplaçant dans un champ électromagnétique de potentiels $\vec{A}$ et V. A l'instar de ce qui arrivait déjà dans le cas relativiste, les équations décrivant chaque type de particule (celle de spin 0 et celle de spin 1) apparaissent séparées, les scalaires Ω_0 et $\theta_0 - \Delta_0$ et le vecteur $\vec{\theta} - \vec{\Delta}$ se rapportant à la particule de spin 0, les vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{\theta} + \vec{\Delta}$ et le scalaire $\theta_0 + \Delta_0$ étant associés à la particule de spin 1.

L'évolution dans le temps de l'état de la particule de spin 0 vient naturellement sous la forme d'une équation de Schrödinger (IV 40*a*), tandis que la description dans le temps de la particule de spin 1 est traduite par l'équation IV. 41*a*, qui est une équation de Pauli vectorielle. Des grandeurs de champ Ω_0 et $\vec{\Omega}$ données par IV. 40*a* et IV. 41*a* on déduit les expressions pour $\vec{\theta} - \vec{\Delta}$, $\theta_0 + \Delta_0$ et $\vec{\theta} + \vec{\Delta}$ au moyen de IV. 40*c* et IV. 41*bc*.

L'indépendance des deux cas possibles de spin (celui du spin 0 et celui du spin 1) étant complète, on peut étudier séparément chaque cas en considérant que l'autre cas n'est pas réalisé dans la nature. Ainsi, s'il n'est question que de la particule de spin 0, on doit considérer que la particule de spin 1 n'existe pas et, en conséquence, prendre comme nulles les grandeurs de champ qui la décrivent, c'est à dire, $\vec{\Omega} = 0$ (et par la même, $\theta_0 + \Delta_0 = 0$ et $\vec{\theta} + \vec{\Delta} = 0$). Inversement, si l'on veut étudier la particule de spin 1 on doit poser $\Omega_0 = 0$ (on a alors aussi $\theta_0 - \Delta_0 = \vec{\theta} - \vec{\Delta} = 0$).

Ces remarques seront utiles pour démontrer un résultat dont nous avons déjà fait usage sans l'avoir toutefois prouvé, à savoir que les grandeurs Ω_0, θ_0, Δ_0, $\vec{\Omega}$, $\vec{\theta}$ et $\vec{\Delta}$ possèdent effectivement les propriétés de variance ci-dessus indiquées. Pour ce faire, envisageons d'abord le cas de la particule de spin 1 (et, par conséquent, prenons $\Omega_0 = 0$) et écrivons explicitement les équations inverses de IV. 27:

IV. 42
$$\Omega_0 = i/2\,(\psi_{12} - \psi_{21}) \qquad \Omega_2 = i/2\,(-i\,\psi_{11} - i\,\psi_{22})$$
$$\Omega_1 = i/2\,(-\psi_{11} + \psi_{22}) \qquad \Omega_3 = i/2\,(\psi_{12} + \psi_{21}).$$

$\Omega_0 = 0$ implique alors $\psi_{12} = \psi_{21}$ et le spineur de rang 2 $\psi_{ik}\,(i, k = 1, 2)$ devient symétrique. Or, dans ces conditions, on démontre en théorie des spineurs [20] que les équations IV. 42 définissent $\Omega_1\,\Omega_2\,\Omega_3$ comme étant les composantes d'un vecteur de l'espace tri-dimensionnel.

D'autre part, et en considérant le cas de la particule de spin 0 (et donc en prenant $\vec{\Omega} = 0$), les mêmes formules IV. 42 permettent de vérifier par un raisonnement analogue que Ω_0 est effectivement un scalaire.

Avant de finir ce paragraphe, nous allons utiliser le formalisme vectoriel que l'on vient de développer pour présenter l'expression de la densité de probabilité ρ_n et du flux de probabilite $\vec{j}_n$ en fonction des grandeurs Ω_0 et $\vec{\Omega}$. Or les formules IV. 27 peuvent encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} 0 & -1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Omega_0 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{vmatrix};$$

$$|\,\psi_{11}^*\,\psi_{12}^*\,\psi_{21}^*\,\psi_{22}^*\,| = i\,|\,\Omega_0^*\,\Omega_1^*\,\Omega_2^*\,\Omega_3^*\,| \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

et, par conséquent, l'expression IV. 18 de ρ_n vient

$$\rho_n = \chi_1^*\,\chi_1 = |\,\Omega_0^*\,\Omega_1^*\,\Omega_2^*\,\Omega_3^*\,| \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Omega_0 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\,(\Omega_0^*\,\Omega_0 + \Omega^* \cdot \Omega).$$

D'une façon analogue et en partant de la définition IV. 19 de $\vec{j}_n$, on obtient

$$\vec{j}_n = \frac{i\hbar}{m_0}\left(\Omega_0^*\,\vec{\nabla}\,\Omega_0 + \sum_1^3 \Omega_k^*\,\vec{\nabla}\,\Omega_k - \text{conj}\right) - \frac{q}{m_0 c}\,(\Omega_0^*\,\Omega_0 + \vec{\Omega}^* \cdot \vec{\Omega})\,\vec{A}.$$

CHAPITRE V

La théorie du photon à l'approximation non relativiste

§ 1. Les équations de la particule de spin maximum 1 (sans charge).

L'étude développée dans les Chapitres II, III et IV concerne le cas général d'une particule de charge q et spin 0 ou 1, se déplaçant au sein d'un champ électromagnétique. Dans le présent chapitre on va cependant restreindre la généralité des résultats précédamment obtenus. Le but principal étant d'arriver à l'approximation non relativiste des équations maxwelliennes I. 30, nous allons commencer par considérer la particule non chargée de spin maximum 1 pour nous pencher ensuite sur un cas particulier important du corpuscule de spin 1, le photon (Sur la valeur du spin du photon, voir [21]).

Les équations non relativistes de la particule de spin maximum 1 non chargée s'obtiennent de IV. 14 en posant $q = 0$, ce qui donne

$$\text{V. 1} \qquad a) \quad \left[i\hbar\,\partial_t - \frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta \right] \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$b) \quad \begin{bmatrix} \psi_{13} & \psi_{23} \\ \psi_{14} & \psi_{24} \end{bmatrix} = \frac{i\hbar}{2m_0 c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}^T$$

$$c) \quad \begin{bmatrix} \psi_{31} & \psi_{32} \\ \psi_{41} & \psi_{42} \end{bmatrix} = \frac{i\hbar}{2m_0 c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix};$$

(rappelons que la variance de $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$ est celle d'un spineur

de rang 2); quant à la forme vectorielle de ces équations elle vient, par IV. 40 et IV. 41 (*),

$$\theta_0 - \Delta_0 = 0$$

$$\vec{\theta} - \vec{\Delta} = \frac{i\hbar}{m_0 c} \vec{\nabla} \Omega_0$$

V. 2 $$\left[i\hbar \partial_t - \frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \right] \Omega_0 = 0 .$$

$$\Delta_0 + \theta_0 = \frac{i\hbar}{m_0 c} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\vec{\theta} + \vec{\Delta} = - \frac{\hbar}{m_0 c} \vec{\nabla} \wedge \vec{\Omega}$$

$$\left[i\hbar \partial_t - \frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \right] \vec{\Omega} = 0 .$$

Ces équations donnent donc la description non relativiste (spinorielle ou vectorielle) d'une particule sans charge, de masse m_0 et spin maximum 1 et, en particulier, elles peuvent traduire le comportement du photon lorsque celui-ci se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ suffisamment faible pour que l'on puisse prendre $\vec{v}^2/c^2 \simeq 0$. Ce fait appelle deux remarques:

La première concerne la masse du photon lequel, selon les idées qui ont conduit M. de Broglie à sa Mécanique Ondulatoire du Photon, est supposé posséder une masse propre m_0 très petite mais qui n'est jamais rigoureusement nulle. En effet, cette Mécanique Ondulatoire du Photon étant une application particulière de la méthode générale de la fusion, il y est indispensable d'admettre que les masses des corpuscules qui fusionnent ne sont pas nulles, faut de quoi on ne saurait partir des équations de Dirac comme décrivant adéquatement ces corpuscules et «a fortiori», on ne pourrait obtenir les équations fusionnées comme il a été dit au Chapitre I. Ajoutons que l'une des conséquences de

(*) Comme il a été démontré en IV, § 3, $\vec{\Omega}$ et Ω_0 sont, respectivement, un vecteur et un scalaire de l'espace tridimensionnel. Par conséquent, θ_0 et Δ_0 sont des scalaires, $\vec{\theta}$ et $\vec{\Delta}$ étant, pour leur part, des vecteurs de l'espace à 3 dimensions.

supposer que $m_0 \neq 0$ est que les équations habituelles de l'électromagnétisme doivent être remplacées par les équations de Maxwell-de Broglie I. 30 lesquelles, si l'on y néglige certains termes très petits en m_0^2 qui y apparaissent, se réduisent exactement aux équations de Maxwell. Il est intéréssant de souligner que cette exigeance de masse propre non nulle demeure toujours indispensable au niveau non relativiste car il a été démontré au Chapitre IV que les équations de la particule de spin maximum 1 s'obtiennent par la fusion des équations de deux corpuscules de Pauli. Ici non plus, on ne saurait employer ces équations (et par là-même en obtenir les équations fusionnées) si les corpuscules étaient considérés comme possédant une masse propre rigoureusement nulle.

La remarque suivante concerne les faibles vitesses du photon. Soulignons, avant tout, qu'il y a un sens à chercher l'approximation non relativiste des équations de Maxwell ou plutôt, des équations maxwelliennes I. 30 qui doivent les remplacer au niveau quantique. En effet, s'il est bien acquis que le photon libre se déplace dans le vide avec la vitesse c il c'en reste pas moins que dans certaines circonstances sa vitesse $\vec{v}$ se trouve être bien en-deçà de cette valeur, pouvant parfois être très petite (et donc $\vec{v}^2/c^2 \cong 0$) ou même nulle. Sans entrer dans les détails, nous allons ici rappeler brièvement deux phénomènes physiques qui semblent confirmer ces affirmations.

Le premier est celui de la propagation de la lumière dans les guides. On sait que pour n'importe quel type de guide, la vitesse de groupe(*) des ondes se propageant dans son intérieur est égale à

$$c \mid \vec{k} \mid (\vec{k}^2 + \alpha^2)^{-1/2},$$

$\vec{k}$ étant le vecteur de propagation et α une constante caractérisant chaque type de propagation possible dans le guide. Ce résultat est d'ailleurs une conséquence de la seule théorie de Maxwell habituelle, sans aucune intervention de la Mécanique Ondulatoire du Photon. On voit donc que la vitesse du photon est inférieure à c, pouvant devenir très petite pour des valeurs

(*) C'est à dire, la vitesse de propagation de l'énergie, que l'on peut identifier à la vitesse du photon dans le guide.

très élevées de α, et même nulle dans le voisinage des fréquences de coupure [22].

La deuxième expérience que nous voulons rappeler est celle dite du miroir de Wigner [23]. Cette expérience a mis en évidence l'existence de franges d'interférence dans la région de l'espace où un rayon incidant sur un miroir se superpose à son rayon réfléchi. Or, si l'on admet la localisation, il semble bien que la Mécanique Ondulatoire conduise à conclure que dans une frange d'interférence de Wigner les photons se déplacent parallèlement à la surface du miroir avec une vitesse $c \operatorname{sen} \theta$, θ étant l'angle d'incidence de la lumière. Cette valeur est donc inférieure à c, pouvant même être très petite pour des rayons incidents (et réfléchis) près de la normale au miroir.

§ 2. La signification physique des grandeurs Ω_0, $\vec{\Omega}$, θ_0, $\vec{\theta}$, Δ_0 et $\vec{\Delta}$.

Nous abordons maintenant le problème de trouver la signification physique des grandeurs Ω_0, θ_0, Δ_0, $\vec{\Omega}$, $\vec{\theta}$ et $\vec{\Delta}$. Revenons pour cela à l'étude relativiste des équations de la particule de spin maximum 1 (sans charge) exposée au Chapitre I, et considérons les définitions des grandeurs relativistes de champ à partir des composantes ψ_{ik} de la fonction d'onde. Nous avions, pour les grandeurs maxwelliennes,

$$\text{V. 3} \qquad \begin{aligned} H_x &= K k_0 \varphi_{23} & E_x &= i K k_0 \varphi_{14} & A_x &= -i K \varphi_1 \\ H_y &= K k_0 \varphi_{31} & E_y &= i K k_0 \varphi_{24} & A_y &= -i K \varphi_2 \\ H_z &= K k_0 \varphi_{12} & E_z &= i K k_0 \varphi_{34} & A_z &= -i K \varphi_3 \\ V &= -K \varphi_4 & & (K = \hbar/\sqrt{2 m_0};\ k_0 = m_0 c/\hbar), & & \end{aligned}$$

et pour les grandeurs non maxwelliennes,

$$\text{V. 4} \qquad \begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= \varphi_0 & \sigma_1 &= -i \varphi_{234} \\ \mathrm{I}_2 &= -i \varphi_{1234} & \sigma_2 &= i \varphi_{134} \\ \sigma_4 &= \varphi_{123} & \sigma_3 &= -i \varphi_{124}, \end{aligned}$$

les seize φ_a ($a = 0, 1, 2, \cdots, 134, 234, 1234$) étant des fonctions des ψ_{ik} que l'on peut déterminer facilement. En effet, par I. 24, on a

$$\text{V. 5} \qquad \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix} \Gamma = \sum_a^{16} \varphi_a \gamma_a ,$$

et l'on peut vérifier, en tenant compte de I. 23, I. 19 que toutes les matrices γ_a ont leur trace nulle, à la seule exception de $\gamma_0 \equiv I$ dont la trace est égale à 4. En plus, l'ensemble des seize γ_a étant complet, le produit de deux quelconques γ_a est une matrice γ_a, et l'on a aussi, pour tout γ_a, $\gamma_a^2 = I$. Multiplions alors V. 5 à gauche par γ_a et prenons la trace de l'équation obtenue. En vertu de ce qui précède, on est alors conduit à

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_a \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix} \Gamma \right) = 4 \varphi_a .$$

On voit de par cette formule que chaque γ_a est égal à une combinaison linéaire simple de quatre ψ_{ik}, donnée par

$$\varphi_a = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}(\gamma_a \Psi \Gamma),$$

où $\Gamma = i \gamma_2 \gamma_4$ et Ψ désigne la matrice 4×4 des composantes ψ_{ik} (voir I. 17 et I. 20).

Avec les matrices α_μ définies en I. 19, construisons alors la matrice Γ et les seize γ_a (I. 20, I. 23), et introduisons-les dans la formule antérieure. Compte tenu de V. 3, V. 4, on est conduit au tableau suivant

V. 6

$$A_x = -\frac{K}{2}\frac{i}{2}(-\psi_{11}+\psi_{22}+\psi_{33}-\psi_{44}) \qquad \cong -\frac{K}{2}\frac{i}{2}(-\psi_{11}+\psi_{22})$$

$$A_y = -\frac{K}{2}\frac{i}{2}(-i\psi_{11}-i\psi_{22}+i\psi_{33}+i\psi_{44}) \cong -\frac{K}{2}\frac{i}{2}(-i\psi_{11}-i\psi_{22})$$

$$A_z = -\frac{K}{2}\frac{i}{2}(\psi_{12}+\psi_{21}-\psi_{34}-\psi_{43}) \qquad \cong -\frac{K}{2}\frac{i}{2}(\psi_{12}+\psi_{21})$$

$$E_x = \frac{i}{2}Kk_0\frac{i}{2}(-\psi_{11}+\psi_{22}-\psi_{33}+\psi_{44}) \qquad \cong \frac{i}{2}Kk_0\frac{i}{2}(-\psi_{11}+\psi_{22})$$

$$E_y = \frac{i}{2}Kk_0\frac{i}{2}(-i\psi_{11}-i\psi_{22}-i\psi_{33}-i\psi_{44}) \cong \frac{i}{2}Kk_0\frac{i}{2}(-i\psi_{11}-i\psi_{22})$$

$$E_z = \frac{i}{2}Kk_0\frac{i}{2}(\psi_{12}+\psi_{21}+\psi_{34}+\psi_{43}) \qquad \cong \frac{i}{2}Kk_0\frac{i}{2}(\psi_{12}+\psi_{21})$$

$$V = -\frac{K}{2}\frac{i}{2}(\psi_{32}-\psi_{41}+\psi_{23}-\psi_{14})$$

$$H_x = \frac{Kk_0}{2}i/2(-\psi_{31}+\psi_{42}-\psi_{13}+\psi_{24})$$

$$H_y = \frac{Kk_0}{2}i/2(-i\psi_{31}-i\psi_{42}-i\psi_{13}-i\psi_{24})$$

$$H_z = \frac{Kk_0}{2}i/2(\psi_{32}+\psi_{41}+\psi_{23}+\psi_{14})$$

$$I_2 = -\frac{i}{2}\frac{i}{2}(\psi_{12}-\psi_{21}+\psi_{34}-\psi_{43}) \qquad \cong -\frac{i}{2}\frac{i}{2}(\psi_{12}-\psi_{21})$$

$$\sigma_4 = \frac{i}{2}\frac{i}{2}(\psi_{12}-\psi_{21}-\psi_{34}+\psi_{43}) \qquad \cong \frac{i}{2}\frac{i}{2}(\psi_{12}-\psi_{21})$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{i}{2}(-\psi_{32}+\psi_{41}+\psi_{23}-\psi_{14})$$

$$\sigma_1 = -\frac{i}{2}\frac{i}{2}(\psi_{31}-\psi_{42}-\psi_{13}+\psi_{24})$$

$$\sigma_2 = -\frac{i}{2}\frac{i}{2}(i\psi_{31}+i\psi_{42}-i\psi_{13}-i\psi_{24})$$

$$\sigma_3 = -\frac{i}{2}\frac{i}{2}(-\psi_{32}-\psi_{41}+\psi_{23}+\psi_{14}).$$

Souvenons-nous maintenant de ce qui a été conclu plus haut sur l'ordre de grandeur relative des fonctions ψ_{ik} (voir notamment le Chapitre IV, § 1): avec le choix I. 19 des matrices α_μ, les composantes $\psi_{13}\,\psi_{14}\,\psi_{23}\,\psi_{24}\;\psi_{31}\,\psi_{32}\,\psi_{41}$ et ψ_{42} sont de l'ordre de $\beta = v/c$ par rapport à $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$, les fonctions $\psi_{33}\,\psi_{34}\,\psi_{43}\,\psi_{44}$ étant de l'ordre de β^2. C'est en vertu de ce fait qu'on a pris, dans le tableau précédent, $\psi_{33} = \psi_{34} = \psi_{43} = \psi_{44} \simeq 0$.

On voit ainsi que les vecteurs maxwelliens $\vec{A}$ et $\vec{E}$ et les grandeurs non maxwelliennes I_2 et σ_4 sont donnés par une combinaison linéaire de deux termes de l'ordre de β^0 ($\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$) et de deux termes de l'ordre de β^2. On peut dire aussi que — à une constante multiplicative près — $\vec{A}$ ne diffère de $\vec{E}$ (de même que I_2 ne diffère de σ_4) que par des termes de l'ordre de β^2 lesquels, à l'approximation non relativiste, doivent être négligés. Toutes les autres grandeurs (c'est à dire, le champ magnétique $\vec{H}$, le potentiel V et les grandeurs non maxwelliennes $\vec{\sigma}$ et I_1) sont données, aussi bien dans le cas relativiste qu'à l'approximation non relativiste, par une somme de quatre termes, tous de l'ordre de β.

Introduisons maintenant dans le tableau V. 6 les relations inverses des développements IV. 27, IV. 33, IV. 34,

$$\begin{array}{lll}
\Omega_0 = i/2\,(\psi_{12} - \psi_{21}) & \Delta_0 = i/2\,(\psi_{23} - \psi_{14}) & \theta_0 = i/2\,(\psi_{32} - \psi_{41}) \\
\Omega_1 = i/2\,(-\psi_{11} + \psi_{22}) & \Delta_1 = i/2\,(-\psi_{13} + \psi_{24}) & \theta_1 = i/2\,(-\psi_{31} + \psi_{42}) \\
\Omega_2 = i/2\,(-i\psi_{11} - i\psi_{22}) & \Delta_2 = i/2\,(-i\psi_{13} - i\psi_{24}) & \theta_2 = i/2\,(-i\psi_{31} - i\psi_{42}) \\
\Omega_3 = i/2\,(\psi_{12} + \psi_{21}) & \Delta_3 = i/2\,(\psi_{23} + \psi_{14}) & \theta_3 = i/2\,(\psi_{32} + \psi_{41}).
\end{array}$$

On voit alors que, à l'approximation non relativiste (symbolisée dans ce qui suit par l'indice n), les relations entre les grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes d'une part, et, d'autre part, les grandeurs Ω_0, θ_0, Δ_0, $\vec{\Omega}$, $\vec{\theta}$ et $\vec{\Delta}$ sont les suivantes,

$$\text{V. 7} \qquad \begin{array}{ll}
\vec{A}_n = -\dfrac{K}{2}\vec{\Omega} & V_n = -\dfrac{K}{2}(\Delta_0 + \theta_0) \\
\vec{E}_n = \dfrac{iKk_0}{2}\vec{\Omega} & \vec{H}_n = \dfrac{Kk_0}{2}(\vec{\Delta} + \vec{\theta}) \\
I_{2n} = -i/2\,\Omega_0 & I_{1n} = 1/2\,(\Delta_0 - \theta_0) \\
\sigma_{4n} = i/2\,\Omega_0 & \vec{\sigma}_n = -i/2\,(\vec{\Delta} - \vec{\theta}).
\end{array}$$

§ 3. Comparaison avec les équations relativistes.

Puisque les formules V. 7 donnent la signification physique des grandeurs Ω_0, θ_0, Δ_0, $\vec{\Omega}$, $\vec{\theta}$ et $\vec{\Delta}$, nous sommes à même de reprendre les équations vectorielles V. 2 et de les écrire en employant comme variables de champ l'approximation non relativiste des grandeurs $\vec{A}$, V, $\vec{E}$, $\vec{H}$, I_1, I_2, σ_4 et $\vec{\sigma}$. On obtient ainsi :

équations maxwelliennes

$$\left[-i\hbar\,\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right]\vec{A}_n = 0$$

V. 8

$$\operatorname{div}\vec{E}_n = -k_0^2 V_n$$

$$\vec{E}_n = -i k_0 \vec{A}_n$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}_n$$

équations non maxwelliennes

$$\left[-i\hbar\,\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right] I_{2n} = 0$$

V. 9

$$I_{1n} = 0$$

$$\sigma_{4n} = -I_{2n}$$

$$\operatorname{grad} I_{2n} = i k_0 \vec{\sigma}_n$$

On peut maintenant comparer ces équations vectorielles non relativistes avec les équations tensorielles relativistes I. 30, I. 31 d'où nous sommes partis et que nous rappelons ici (*) :

(*) Signalons que dans V. 10, V. 11 les équations écrites dans la colonne de droite sont une conséquence des équations présentées à gauche, celles-ci étant indépendantes. Ainsi, et en prenant les équations maxwelliennes, *e*) est une conséquence de *a*) et *b*), tandis que *c*) et *d*) impliquent *g*). L'équation *f*) découle évidemment de *d*). Des considérations analogues on lieu pour V. 11.

équations maxwelliennes

V. 10

$$a)\quad \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{H} + k_0^2 \vec{A} \qquad e)\quad \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c}\,\partial_t V = 0$$

$$b)\quad \operatorname{div} \vec{E} = -\,k_0^2 V \qquad f)\quad \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$c)\quad \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{A} \qquad g)\quad -\frac{1}{c}\,\partial_t \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{E}$$

$$d)\quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

équations non maxwelliennes

V. 11

$$m_0 I_1 = 0 \qquad \operatorname{grad} I_1 = 0$$

$$i k_0 \sigma_4 = -\frac{1}{c}\,\partial_t I_2 \qquad \partial_t I_1 = 0$$

$$\operatorname{grad} I_2 = i k_0 \vec{\sigma} \qquad \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{\sigma} + \operatorname{grad} \sigma_4 = 0$$

$$\frac{1}{c}\,\partial_t \sigma_4 + \operatorname{div} \vec{\sigma} = i k_0 I_2 \qquad \operatorname{rot} \vec{\sigma} = 0\,.$$

En ce qui concerne les équations maxwelliennes, la comparaison fait ressortir que les équations d'évolution pour $\vec{A}$ et $\vec{E}$ (c'est à dire, les équations où interviennent $\partial_t \vec{E}$ et $\partial_t \vec{A}$, $\frac{1}{c}\,\partial_t \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{H} + k_0^2 \vec{A}$ et $\frac{1}{c}\,\partial_t \vec{A} = -\vec{E} - \operatorname{grad} V$), ne sont plus valables à l'approximation non relativiste. Elles sont remplacées par des équations de Schrödinger vectorielles, les vecteures $\vec{E}$ et $\vec{A}$ devenant proportionnels. Par contre, les autres équations maxwelliennes indépendantes (qui sont des équations de condition, c'est à dire, sans dérivée ∂_t, $\operatorname{div} \vec{E} = -\,k_0^2 V$ et $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$ demeurent inchangées à l'approximation non relativiste. Par conséquent, celles des équations maxwelliennes relativistes qui découlent seulement des équations de condition restent valables à l'approximation non relativiste. Ainsi y retrouve-t-on bien la condition de divergence nulle pour $\vec{H}$, mais ni l'équation d'évolution pour $\vec{H}\left(-\frac{1}{c}\,\partial_t \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{E}\right)$ ni la condition de Lorentz $\left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c}\,\partial_t V = 0\right)$ ne sont alors valables.

Remarquons, en plus, que les potentiels $\vec{A}$ et V possèdent toujours une existence réelle. C'était d'ailleurs ce qui arrivait dans la théorie relativiste où $\vec{E}$ et $\vec{H}$ étaient donnés en fonction de $\vec{A}$ et V et, réciproquement, les valeurs de $\vec{A}$ et V étaient bien déterminées par celles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$. A l'approximation non relativiste on voit, cependant, que la connaissance de $\vec{A}$ suffit à déterminer les valeurs du champ électromagnétique et que, inversement, les seules valeurs de $\vec{E}$ suffisent pour fixer les potentiels $\vec{A}$ et V.

En passant aux équations non maxwelliennes, on voit que les équations d'évolution pour I_2 et σ_4 sont aussi remplacées par des équations de Schrödinger et par une relation de proportionnalité entre ces deux grandeurs. Les autres équations indépendantes non maxwelliennes demeurent cependant valables, de même que celles qui en découlent. C'est à dire que l'on a toujours $\operatorname{grad} I_1 = \partial_t I_1 = 0$ mais, en revanche, les équations $\operatorname{rot} \vec{\sigma} = 0$ et $\frac{1}{c} \partial_t \vec{\sigma} + \operatorname{grad} \sigma_4 = 0$ ne sont plus présentes dans l'approximation non relativiste.

Comme on le voit aisément, toutes les grandeurs non relativistes de champ $(\vec{A}_n, V_n, \vec{E}_n, \cdots, \sigma_{4n})$ évoluent dans le temps selon des équations de Schrödinger, ce qui est à rapprocher du fait que les mêmes grandeurs, considérées au niveau relativiste, obéissent dans leur évolution à des équations de Klein-Gordon.

Soulignons encore que, tout comme c'était le cas dans la théorie relativiste, seules les grandeurs de champ attachées à la particule de spin 1 (ou, plus précisement, au photon) possèdent une signification physique bien nette: ce sont des grandeurs électromagnétiques de champ (Rappeler à ce sujet les remarques faites au Chappitre I § 3). Pour ce qui est de la particule de spin 0 les mêmes difficultés se réflètent ici, en ce sens que les grandeurs de champ qui lui sont attachées n'ont pas une signification très claire de même, d'ailleurs, que les équations qui sont censées la décrire. Tout ce qu'on peut dire à ce sujet c'est que, pour autant que la description relativiste d'une telle particule soit bien donnée par les équations V. 11, les équations V. 9 la décrivent tout aussi correctement dans le cas des petites vitesses.

§ 4. Les ondes planes monochromatiques.

Dans ce paragraphe on étudie les solutions du type onde plane monochromatique des équations non relativistes de la particule de spin maximum 1. Les résultats obtenus seront à comparer avec les solutions du même genre des équations relativistes.

En admettant, pour simplifier, que le sens de la propagation de l'onde plane coincide avec le sens positif de l'axe OZ, on est amené à prendre des solutions de la forme

$$\psi_{ik} = c_{ik} P = c_{ik} \exp \frac{i}{\hbar} (E t - z p)$$

$(i, k = 1, 2)$, où c_{ik} est une constante arbitraire et $p = |\vec{p}| = p_z$. Les équations spinorielles V. $1 b c$ viennent alors

$$\psi_{13} = \frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{11} = \frac{p}{2 m_0 c} c_{11} P$$

$$\psi_{23} = \frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{21} = \frac{p}{2 m_0 c} c_{21} P$$

$$\psi_{14} = -\frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{12} = -\frac{p}{2 m_0 c} c_{12} P$$

$$\psi_{24} = -\frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{22} = -\frac{p}{2 m_0 c} c_{22} P$$

$$\psi_{31} = \frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{11} = \frac{p}{2 m_0 c} c_{11} P$$

$$\psi_{32} = \frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{12} = \frac{p}{2 m_0 c} c_{12} P$$

$$\psi_{41} = -\frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{21} = -\frac{p}{2 m_0 c} c_{21} P$$

$$\psi_{42} = -\frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{22} = -\frac{p}{2 m_0 c} c_{22} P.$$

En partant de ces formules on peut déterminer l'expression non relativiste des grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes des ondes planes monochromatiques, et ceci en employant les

relations du tableau V. 6. On trouve ainsi, pour les grandeurs non maxwelliennes,

$$\sigma_4 = -\frac{1}{4}(c_{12} - c_{21})\,P \qquad \sigma_x = 0$$

$$I_2 = \frac{1}{4}(c_{12} - c_{21})\,P \qquad \sigma_y = 0$$

$$I_1 = 0 \qquad \sigma_z = -\frac{p}{4 m_0 c}(c_{12} - c_{21})\,P;$$

et pour les grandeurs maxwelliennes,

$$A_x = -i\frac{K}{4}(-c_{11} + c_{22})\,P \qquad E_x = -\frac{K k_0}{4}(-c_{11} + c_{22})\,P$$

$$A_y = -i\frac{K}{4}(-ic_{11} - ic_{22})\,P \qquad E_y = -\frac{K k_0}{4}(-ic_{11} - ic_{22})\,P$$

$$A_z = -i\frac{K}{4}(c_{12} + c_{21})\,P \qquad E_z = -\frac{K k_0}{4}(c_{12} + c_{21})\,P$$

$$H_x = -i\frac{K k_0}{4 m_0 c}p\,(c_{11} + c_{22})\,P$$

$$H_y = \frac{K k_0}{4 m_0 c}p\,(c_{11} - c_{22})\,P \qquad V = -iK\frac{p}{4 m_0 c}(c_{12} + c_{21})\,P.$$

$$H_z = 0$$

En passant, on peut vérifier sur ces expressions que l'on a toujours $\vec{H} \cdot \vec{E} = 0$ ce qui revient à dire que même à l'approximation non relativiste les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ demeurent orthogonaux; on voit de même que le vecteur $\vec{H}$ est dans le plan normal à la direction de propagation. En plus, on tire des expressions précédentes que

$$A_x + iA_y = -\frac{iK}{2}c_{22}\,P \qquad E_x + iE_y = -\frac{K k_0}{2}c_{22}\,P$$

$$A_x - iA_y = \frac{iK}{2}c_{11}\,P \qquad E_x - iE_y = \frac{K k_0}{2}c_{11}\,P$$

$$H_x + i\,H_y = -\frac{i\,K}{2}\,\frac{p}{m_0\,c}\,k_0\,c_{22}\,P$$

$$H_x - i\,H_y = -\frac{i\,K}{2}\,\frac{p}{m_0\,c}\,k_0\,c_{11}\,P.$$

En définissant maintenant les nouvelles constantes indépendantes

$$c_1 \equiv \quad \frac{i\,K}{2}\,c_{11}$$

$$c_2 \equiv -\frac{i\,K}{2}\,c_{22}$$

$$c_3 \equiv -\frac{i\,K}{4}\,(c_{12} + c_{21})$$

$$c_4 \equiv \quad \frac{1}{4}\,(c_{12} - c_{21}),$$

on trouve que la solution générale du type onde plane monochromatique est la superposition des quatre solutions indépendantes suivantes

1.° $\quad A_x + i\,A_y = c_2\,P \qquad E_x + i\,E_y = -\,i\,k_0\,c_2\,P$

$A_x - i\,A_y = 0 \qquad E_x - i\,E_y = 0$

$$H_x + i\,H_y = \frac{k_0}{m_0\,c}\,p\,c_2\,P$$

$$H_x - i\,H_y = 0,$$

(et toutes les autres grandeurs sont nulles)

2.° $\quad A_x + i\,A_y = 0 \qquad E_x + i\,E_y = 0$

$A_x - i\,A_y = c_1\,P \qquad E_x - i\,E_y = -\,i\,k_0\,c_1\,P$

$$H_x + i\,H_y = 0$$

$$H_x - i\,H_y = -\frac{k_0}{m_0\,c}\,p\,c_1\,P,$$

(toutes les autres grandeurs étant nulles)

3.° $A_z = c_3 P \qquad E_z = -i k_0 c_3 P \qquad V = \frac{p}{m_0 c} c_3 P$
(idem)

4.° $I_2 = c_4 P \qquad \sigma_1 = -c_4 P \qquad \sigma_3 = -\frac{p}{m_0 c} c_4 P.$
(idem).

Ces résultats sont à mettre en parallèle avec ceux de l'étude des solutions du type onde plane monochromatique des équations relativistes [7]. A l'approximation non relativiste on retrouve donc une onde plane polarisée circulairement à gauche (la première solution indépendante), une autre onde polarisée circulairement à droite (la deuxième solution), une onde longitudinale (la troisième) et une onde non maxwellienne (la quatrième solution). On peut d'ailleurs vérifier que ces résultats non relativistes peuvent s'obtenir formellement en partant des expressions relativistes correspondantes données en [7] et en y procédant à la seule substitution de $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ par m_0 (ou, plus précisément, de $k = \frac{c}{\hbar} \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ par $k_0 = \frac{c}{\hbar} \cdot m_0$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. DE BROGLIE, *Comptes Rendus,* **198,** 135-138 (1934).
———, *Comptes Rendus,* **199,** 445-448 (1934).
———, *Comptes Rendus,* **199,** 1165-1168 (1934).
———, *Comptes Rendus,* **200,** 361-363 (1935).
———, *Comptes Rendus,* **203,** 473-477 (1936).
———, *Comptes Rendus,* **208,** 1967-1700 (1939).

[2] M. A. TONNELAT, *Comptes Rendus,* **208,** 790-793 (1939).
———, *Comptes Rendus,* **207,** 1180-1182 (1938).

[3] GÉHÉNIAU, *Comptes Rendus,* **204,** 665-668 (1937).
———, *Comptes Rendus,* **206,** 663-665 (1938).
———, *Comptes Rendus,* **208,** 497-499 (1939).

[4] G. PÉTIAU, *Comptes Rendus,* **200,** 1829-1832 (1935).
———, *Comptes Rendus,* **206,** 991-993 (1938).
———, *Comptes Rendus,* **208,** 167-169 et 969-971 (1939).
J. de Physique et le Radium, **10,** 413-419 (1939).

[5] L. DE BROGLIE, *Comptes Rendus,* **209,** 265-268 (1939).
G. PETIAU, *Comptes Rendus,* **208,** 1709-1711 (1939).
J. de Phys. et le Radium, **10,** 487-494 (1939).

[6] L. DE BROGLIE, Une nouvelle théorie de la lumière, Hermann, 1940, vol. I.

[7] ———, Théorie générale des particules à spin, Gauthier-Villars, 1954.

[8] ———, Mécanique Ondulatoire du Photon et Théorie Quantique des Champs, Gauthier-Villars, 1957.

[9] H. BOERSCH, HAMISCH, GROHMANN, et WHOLLEBEN, *Z. Physik,* **165,** 79, (1961).

[10] D. BOHM et Y. AHARONOV, *Phys, Rev.,* **115,** 485 (1959).

[11] L. DE BROGLIE, Ondes électromagnétiques et photons, Gauthier-Villars, 1968.

[12] J. VASSALO PEREIRA, «On the Generalisation of the Theory of the spin Maximum 1 Particle to the case of a charged Particle Moving in an Electromagnetic Field», *Int. Journ. of Theor. Physics,* 1971, (sous presse).

[13] A. PROCA, *J. de Phys. et le Radium,* **7,** 347 (1936).

[14] O. COSTA DE BEAUREGARD, *Thèse,* 1943.

[15] C. IMBERT, *Comptes Rendus,* **267,** 1401-1403: C. DE BEAUREGARD et C. IMBERT, *Comptes Rendus,* **268,** 216-218 (1969).

[16] M. VON LAUE, *Ann. Phys.Lpz,* **23,** 989 (1907).

[17] H. A. LORENTZ, *Encykl. math. Wiss.* V. 13, § 21, 103 (1914 — Leipzig).

[18] L. DE BROGLIE, La thermodynamique de la particule isolée, Gauthier--Villars, 1964.

[19] J. VASSALO PEREIRA, «Non Relativistic Approximation of the Theory of the Particle of Spin Maximum 1», *Int. Journal of Theor. Physics,* 1971 (à paraître).

[20] ROMAN, Elementary Particles, North Holland, Amsterdam, 1960.

[21] R. BETH, *Phys. Rev.,* **50,** 115 (1936).

[22] L. DE BROGLIE, Problèmes de propagation guidée des ondes électromagnétiques, Gauthier-Villars, 1951.

[23] L. BRILLOUIN, Les statistiques quantiques et leurs applications, Presses de France, 1930, Vol. I.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 205

CHAPITRE I

Rappel de la théorie de la particule de spin maximum 1

1 — La méthode de la fusion et la forme spinorielle des équations fondamentales. 209
2 — La forme tensorielle des équations fondamentales 213
3 — Les équations maxwelliennes et non maxwelliennes. . . . 217

CHAPITRE II

Généralisation de la théorie au cas des particules chargées

1 — Sur l'incompatibilité du système obtenu par la généralisation formelle de 1. 6 221
2 — Les équations spinorielles de la particule de charge q et spin maximum 1 226
3 — Le quadrivecteur densité-flux de courant et le tenseur densité d'énergie-impulsion 230
4 — Les équations tensorielles de la particule de spin maximum 1 et de charge q 233
5 — Le formalisme lagrangien exprimé en grandeurs tensorielles. . 237
6 — Comparaison avec les équations de Proca 240

CHAPITRE III

Les passage des théories relativistes aux théories non relativistes correspondantes

1 — Le groupe de Lorentz et le groupe de Galilée 243
2 — L'approximation non relativiste en Mécanique Ondulatoire. L'équation de Klein-Gordon et l'équation de Schrödinger 248
3 — Les équations de Dirac et les équations de Pauli 253

CHAPITRE IV

L'approximation non relativiste de la théorie généralisée de la particule de spin maximum 1

1 — Calcul de l'approximation non relativiste des équations spinorielles généralisées 265
2 — Le formalisme non relativiste 274
3 — La forme vectorielle des équations 281

CHAPITRE V

La théorie du photon à l'approximation non relativiste

1 — Les équations de la particule de spin maximum 1 (sans charge) . 289
2 — La signification physique des grandeurs Ω_0, $\vec{\Omega}$, ℓ_0, $\vec{\ell}$, Δ_0 et $\vec{\Delta}$. 292
3 — Comparaison avec les équations relativistes. 296
4 — Les ondes planes monochromatiques 299

Bibliographie 303

ERRATA

Page	Ligne	Au lieu de	Lire
205	— 4	probabitité	courant
209	— 1	$n \times n$	$n^2 \times n^2$
210	+ 5	$n \times n$	$n^2 \times n^2$
211	16	de vient	devient
216	+ 7	coefficientes	coefficients
216	+ 9	rappeler φ_0	rappeler: φ_0
216	— 8	définition set	définitions et
219	(nota)	appuyent	appuient
233	12	a symétrique	asymétrique
233	— 5	I. 9 e I. 10 e I. 11	I. 9, I. 10 et I. 11
237	— 4	un fonction	une fonction
237	— 1	unc fonction	une fonction
240	— 6	seulesé quations	seules équations
241	II. 45	$(P_\mu P_\nu - P_\nu \varphi_\mu)^*$	$(P_\mu \varphi_\nu - P_\nu \varphi_\mu)^*$
242	8	symmétrique	symétrique
242	— 11	lequelle	lequel
245	— 14	pssède	possède
259	3	ψ_1	χ_1
261	— 11	$\vec{A}^2$	$\vec{A}^{\,2}$

LISTE DES PUBLICATIONS REÇUES ACTUELLEMENT EN ENCHANGE AVEC PORTUGALIAE PHYSICA

ALEMANHA — *Physikertagung (Physikalisch-Technische Bundesanstalt)*
— *Physikertagung - Plenarvortrage (Physikalisch - Technische Bundesanstalt)*
— *Physikertagung-Voradbrucke der Fachberichte (Physikalisch--Technische Bundesanstal)*
— *Sitzungberichte der Sachsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*
— *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*

ARGENTINA — *Anales de la Sociedad Cientifica Argentina*
— *Mathematicae Notae (Boletin del Instituto de Matematica «Beppo Levi»)*
— *Revista de la Union Matematica Argentina*

AUSTRÁLIA — *Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales*

BÉLGICA — *Annuaire de l'Académie Royale de Belgique*
— *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Bélgique*
— *Mededelingen uit het Natuurkundig Laboratorium der Universiteit te Gent*
— *Recueil de Travaux de Laboratoire de Physique de l'Université de Louvain*
— *Scientific Report (Centre d'Etude de l'Energie Nucleaire)*

BRASIL — *Boletim do Gabinete Português de Leitura de Porto Alegre*
— *Noticia (Centro Latino Americano de Fisica)*

BULGÁRIA — *Annuaire de l'Université de Sofia*

CANADÁ — *Canadian Journal of Physics*

E. U. A. — *Bulletin of the Scripps Institution of Oceanography (University of California*
— *Bulletin of the Seismographic (University of Califoruia)*
— *Journal of the Franklin Institute*
— *Report of the publications and Theses (Mass. Institute of Technology)*
— *Research in Materials (Mass. Institute of Technology)*
— *Solid-State and Molecular Theory Group (Mass. Institute of Technology)*
— *The General Radio Experimenter*

EQUADOR — *Anales de la Universidad Central del Ecuador*

ESPANHA — *Revista de Geofísica (Instituto Nacional de Geofísica)*

FINLANDIA — *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*
— *Commentationes Physico-Mathematicae (Societas Scientiarum Fennica)*

FRANÇA — *Annales de Physique*
— *Bulletin de la Société Scientifique de Bretagne*
— *Cours de l'École Polytechnique*

HOLANDA — *Communications from the Kamerlingh Onnes Laboratory of the University of Leiden*

HUNGRIA — *Atomki Közlemények (Inst. of Nuclear Research of the Hung. Acad. of Sciences)*

ÍNDIA — *Proceedings of the Indian Academy af Sciences*

INGLATERRA — *Asta (The Assoc. of Short Circuit Testing Authorities - Inc)*
— *Comments on Solid State Physics*
— *Contributions from the Cambridge Observatories*
— *Educations in Science (Ass. for Science Education)*
— *Electrical Review*
— *Electricol Times*
— *Journal of Science & Technology*
— *Notes on Applied Science (National Physical Laboratory*
— *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*
— *Report (National Physical Laboratory)*
— *Revue de la Société English Electric*
— *Thin Films*
— *The School Science Review (Ass. for Science Education)*

IRLANDA — *Procedings of the Royal Irish Academy*
— *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society*

ITÁLIA — *Annali dell'Istituto Superiore di Sanità*
— *Congressi, Convegni e Simposi Scientifici (Consiglio Nazionale delle Richerche)*
— *La Ricerca Scientifica (Consiglio Nazionale delle Richerce)*
— *La Scienza del Pensare (UTEP)*
— *Quaderni de «La Ricerca Scientifica»*
— *Raporti dei Laboratori di Fisica dell'Istituto Superiore di Sanità*
— *Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università de Cagliari*

JUGOSLÁVIA — *Fizika (Editorial Office)*
— *Glasnik Matenaticko - Fizicki i Astuonomski*
— *Publikacije Elektrotehnickog Fakulteta Univerziteta u Beogradu*
— *Radovi Zavoda za Fiziku*
— *Reports — (Nuklearni Institut Jozef Stefan)*

NORUEGA — *Arkiv for det Fysiske Seminar i Trondheim (Institutt for Teoretisk Fysikk)*

POLÓNIA	— *Acta Physica Polonica*
	— *Prace Komisji Nauk Techniczych* (*Académie Polonaise des Sciences*)
PORTUGAL	— *Agronomia Lusitana*
	— *Arquivo do Instituto Gulbenkian de Ciência*
	— *Cursos e Seminários do Instituto Gulbenkian de Ciência*
	— *Estudos de Programação e Análise Numérica do Instituto Gulbenkian de Ciência*
	— *Gazeta de Física*
	— *Gazeta de Matemática*
	— *Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra*
	— *Revista Portuguesa de Química*
ROMÉNIA	— *Buletinul* (*Institutului Politehnic din Iasi*)
RÚSSIA	— *Referativnyi Zhurnal Fizika* (*Institut de l'Information Scientifique de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.*)
SUÉCIA	— *Arkiv för Fysik*
SUÍÇA	— *Information Bulletin* (*International Union of Pure and Applied Chemistry*)
TURQUIA	— *Bulletin of the Turkish Physical Society*
	— *Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara*
	Fen Fakültesi Mecmuasi (İstanbul Üniversitesi)

PORTUGALIAE PHYSICA

Instructions pour les auteurs

PORTUGALIAE PHYSICA est la seule publication périodique portugaise consacrée exclusivement à la divulgation des recherches dans le domaine des Sciences Physiques. Les travaux pourront être présentés sous forme d'articles ou de brèves communications. Des articles de mise au point seront encore publiés, par invitation. Les travaux à publier devront être rédigés soit en Français, soit en Anglais, et avoir un résumé dans les deux langues. Ils seront dactylographiés à deux espacements sur une seule face du papier, l'original étant envoyé à la rédaction accompagné d'une copie.

Les figures et les tableaux devront être présentés sur des feuilles séparées. Les dessins devront être soigneusement faits à l'encre de Chine et avoir au moins le double des dimensions définitives. Les photographies seront faites sur du papier blanc brillant.

Les références bibliographiques seront indiquées dans le texte par un numéro entre parenthèses, en exposant, et groupées à la fin de l'article par l'ordre de citation. Les références à des articles dans des publications périodiques devront préciser les noms des auteurs, le titre abrégé de la revue selon le code international d'abréviation de titres de périodiques, le numéro du volume, le numéro de la première page de l'article en référence et l'année de publication. En ce qui concerne les livres, il faut indiquer les auteurs, le titre de l'ouvrage, le lieu d'impression, l'éditeur, l'année de l'édition et la page.

Les auteurs devront vérifier soigneusement le texte et les figures de leurs travaux car la rédaction ne peut pas accepter des altérations ou additions au texte original.

L'auteur d'un article ou communication recevra gratuitement 50 tirages à part. Ce nombre est réduit à 25 par auteur lorsque le même article aura l'intervention de plusieurs auteurs.

Toute correspondance doit être addressée à

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
Lisboa-2 (PORTUGAL)

PORTUGALIAE PHYSICA

Instructions to the authors

PORTUGALIAE PHYSICA is the only Portuguese review exclusively dedicated to the publication of research papers concerning the Physical Sciences. The papers may be presented under the form of articles or research notes. Review articles will also be published, by invitation.

The papers to be published may be written in French or in English with abstracts in both languages. They should be typed with two spaces, on one side of the page only, and the original and one copy must be submitted.

The figures and tables must be presented in separate sheets. Drawings should be carefully done in Indian ink and be at least double the definitive size. Photographs must be executed in white, glossy paper.

Bibliographical references should be indicated in the text by a number between brackets, in exponent, and grouped at the end of the article in the order they are mentioned. References to articles published in periodical publications should include the names of the authors, the abbreviated title of the publication according to the international code of abbreviation of the titles of periodicals, the issue number, the number of the first page of the article mentioned, and the year of publication. As for books, the authors, title of the work, place of the edition, editor, year of the edition, and page should be indicated.

The authors should carefully check their text and figures before submitting them, as the editor cannot accept any changes or additions to the original text.

The author of an article or research note is entitled to 50 free reprints. This number is reduced to 25 per author whenever more than one author intervene in a paper.

All mail to be addressed to

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
Lisboa-2 (PORTUGAL)

Composto e impresso na Tip. Matemática, Lda. — R. Diário de Notícias, 134-1.º-Esq. — Lisboa

Toute la correspondance concernant la rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Prix de l'abonnement:	250 escudos (US $8.50) par volume
Prix des volumes déjà parus:	300 escudos (US $10)
Prix du fascicule:	75 escudos (US $2.50)

Les membres de la «Sociedade Portuguesa de Química e Física» ont une réduction de 50 % sur les prix indiqués.

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Scientifiques et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu detaillé de tous les ouvrages soumis à la rédaction en deux exemplaires.

All mail concerning PORTUGALIAE PHYSICA to be addressed to:

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Subscription rates:	250 escudos (US $8.50) per volume
Price of past volumes:	300 escudos (US $10)
Price of copy:	75 escudos (US $2.50)

Members of the «Sociedade Portuguesa de Química e Física» may obtain *Portugaliae Physica* at a reduced price (50 %).

Universities, Physics Laboratories, Academies, Scientific Societies and Physics Publications are invited to receive this review in exchange for their publications.

PORTUGALIAE PHYSICA will give a detailed report of any book if two copies have been submitted