CDU 53 (469) (05)

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 7
1971-1972

INSTITUTO DE ALTA CULTURA
CENTROS DE ESTUDOS DE FÍSICA DAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS

PORTUGALIAE PHYSICA

Fundadores: A. Cyrillo Soares, M. Telles Antunes, A. Marques da Silva, M. Valadares.

VOLUME 7 1971-72

VOLUMES PUBLICADOS:

Vol. 1 — 1943-45 — 326 pp.
Vol. 2 — 1946-47 — 256 pp.
Vol. 3 — 1949-54 — 173 pp.
Vol. 4 — 1965-66 — 304 pp.
Vol. 5 — 1967-70 — 194 pp.
Vol. 6 — 1970-71 — 316 pp.
Vol. 7 — 1971-72 — 210 pp.

Redacção: Laboratório de Física da Faculdade de Ciências — Lisboa-2 (PORTUGAL)

Comissão de redacção:

J. Moreira de Araújo — Carlos Braga — Carlos Cacho — A. Pires de Carvalho — M. Abreu Faro — J. Gomes Ferreira — F. Bragança Gil — Manuel Laranjeira. Amaro Monteiro — J. Pinto Peixoto — J. da Providência — Lídia Salgueiro — J. de Almeida Santos — José Sarmento — António da Silveira — J. Veiga Simão.

ÍNDICES

MATÉRIAS

MATIÈRES-MATTERS

VOLUME 7

Fasc. 1/2 (1971)

On dynamics of elementary particles derived from relativistic quark models, by J. DIAS DE DEUS 3- 85

Fasc. 3/4 (1972)

Contribution à l'étude de l'anisotropie des materiaux ferromagnétiques, par LUÍS V. BRITO FRAZÃO 87-204

Liste des publications reçues actuellement en échange avec Portugaliae Physica 205

Instructions pour les auteurs 209

AUTORES

AUTEURS — AUTHORS

DEUS, J. Dias — *On dynamics of elementary particles derived from relativistic quark models* 3

FRAZÃO, Luís V. Brito — *Contribution à l'étude de l'anisotropie des materiaux ferromagnétiques* 87

Toute la correspondance concernant la rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Prix de l'abonnement:	250 escudos (US $8.50) par volume
Prix des volumes déjà parus:	300 escudos (US $10)
Prix du fascicule:	75 escudos (US $2.50)

Les membres de la «Sociedade Portuguesa de Química e Física» ont une réduction de 50 % sur les prix indiqués.

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Scientifiques et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu detaillé de tous les ouvrages soumis à la rédaction en deux exemplaires.

All mail concerning PORTUGALIAE PHYSICA to be addressed to:

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Subscription rates:	250 escudos (US $8.50) per volume
Price of past volumes:	300 escudos (US $10)
Price of copy:	75 escudos (US $2.50)

Members of the «Sociedade Portuguesa de Química e Física» may obtain *Portugaliae Physica* at a reduced price (50 %).

Universities, Physics Laboratories, Academies, Scientific Societies and Physics Publications are invited to receive this review in exchange for their publications.

PORTUGALIAE PHYSICA will give a detailed report of any book if two copies have been submitted

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 7
FASCÍCULO 1-2
1971

INSTITUTO DE ALTA CULTURA
CENTROS DE ESTUDOS DE FÍSICA DAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS

PORTUGALIAE PHYSICA

Fundadores: A. Cyrillo Soares, M. Telles Antunes, A. Marques da Silva, M. Valadares.

VOLUME 7 1971 FASCÍCULO 1-2

VOLUMES PUBLICADOS:

Vol. 1 — 1943-45 — 326 pp.

Vol. 2 — 1946-47 — 256 pp.

Vol. 3 — 1949-54 — 173 pp.

Vol. 4 — 1965-66 — 304 pp.

Vol. 5 — 1967-70 — 194 pp.

Vol. 6 — 1970-71 — 316 pp.

Redacção: Laboratório de Física da Faculdade de Ciências — Lisboa-2 (PORTUGAL)

Comissão de redacção:

J. Moreira de Araújo — Carlos Braga — Carlos Cacho — A. Pires de Carvalho — M. Abreu Faro — J. Gomes Ferreira — F. Bragança Gil — Manuel Laranjeira. Amaro Monteiro — J. Pinto Peixoto — J. da Providência — Lídia Salgueiro — J. de Almeida Santos — José Sarmento — António da Silveira — J. Veiga Simão.

INDICE

(Table des matières)

On dynamics of elementary particles derived from relativistic quark models, by J. Dias de Deus. 3

DEUS, J. Dias

On dynamics of elementary particles derived from relativistic quark models.

Portgal. Phys. — 7 (1-2): 3-85, 1971

The interactions of hadrons are described from the point of view of quarks.

Weak, electromagnetic and strong coupling constants are evaluated with a relativistic quark model using the BETHE-SALPETER formalism. Uniquely defined S U (3) mass breaking factors are derived from the quark dynamics inside the mesons.

A dualized approach to the classic quark model connecting the low and high energy predictions is proposed and a simple model for the four body amplitude satisfying duality and the additive quark model is applied in the determination of meson-baryon low energy parameters. Analogous calculations are also shown for the hypothetical quark-meson process.

Quark duality diagrams are used to constrain dual resonance amplitudes. One of these constraints takes the form of a superconvergent relation to be saturated in local mass regions. These relations are studied for various processes both in the forward and backward direction.

CDU 53 (469) (05)

PORTUGALIAE PHYSICA

112

VOLUME 7
FASCÍCULO 1-2
1971

ON DYNAMICS OF ELEMENTARY PARTICLES DERIVED FROM RELATIVISTIC QUARK MODELS

J. Dias de Deus

CONTENTS

	Page
ABSTRACT	5
CHAPTER 1 — *QUARKS AND QUARK MODELS*	7
CHAPTER 2 — *THE BETHE-SALPETER APPROACH TO RELATIVISTIC QUARK MODELS*	13
1. *Introduction*	13
2. *The Bethe-Salpeter formalism and Llewellyn Smith Models*	15
3. *Models for QQV and QQP vertex functions*	20
4. *Three body coupling constants*	28
5. *Four body processes*	35
CHAPTER 3 — *DUALITY: QUARK MODEL AT HIGH AND LOW ENERGY*	39
1. *Introduction*	39
2. *Additivity and duality*	41
3. *Current Algebra Sum Rules*	46
4. *Low energy parameters*	50
CHAPTER 4 — *QUARK DIAGRAMS AND DUAL RESONANCE MODELS*	61
CHAPTER 5 — *A FEW CONCLUSIONS*	77
ACKNOWLEDGEMENTS	79
REFERENCES	81

ON DYNAMICS OF ELEMENTARY PARTICLES DERIVED FROM RELATIVISTIC QUARK MODELS (*)

J. DIAS DE DEUS
Department of Physics
University College London

ABSTRACT — The interactions of hadrons are described from the point of view of quarks.

Weak, electromagnetic and strong coupling constants are evaluated with a relativistic quark model using the BETHE-SALPETER formalism. Uniquely defined S U (3) mass breaking factors are derived from the quark dynamics inside the mesons.

A dualized approach to the classic quark model connecting the low and high energy predictions is proposed and a simple model for the four body amplitude satisfying duality and the additive quark model is applied in the determination of meson-baryon low energy parameters. Analogous calculations are also shown for the hypothetical quark-meson process.

Quark duality diagrams are used to constrain dual resonance amplitudes. One of these constraints takes the form of a superconvergent relation to be saturated in local mass regions. These relations are studied for various processes both in the forward and backward direction.

(*) A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of London.

Received 6 October 1971.

CHAPITRE 1

Quarks and quark models

Quarks were introduced in particle physics in 1964 by Gell-Mann [1] and Zweig [2] on the grounds of purely group theoretical arguments. With a basic SU(3) triplet one can generate the other SU(3) representations by direct products of the $\underline{3}$ (quark) and $\overline{3}$ (antiquark) representations. Baryons are generated from combinations

$$\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} = \underline{1} + \underline{8} + \underline{8} + \underline{10} \qquad \text{(I. 1)}$$

and mesons from the product

$$\underline{3} \times \overline{3} = \underline{1} + \underline{8} \qquad \text{(I. 2)}$$

More representations for baryons and mesons can be obtained by including extra $\underline{3} \times \overline{3}$ products. However the most striking quark model result is perhaps the spectacular dominance of the representations indicated in (I. 1) and (I. 2) over all the other possible ones.

The invention of quarks immediately raised the question of their existence. Much effort was invested in the search for quarks and contradictory claims — pro and against their existence — were recently made [3]. The question of existence of quarks is still open and the answer has to be left to the experimentalists.

Theoretically one can distinguish two lines of thought with which the quark model is approached: a «mathematical quarks» school, restraining quarks to the role of carriers of SU(3) quantum

numbers, and a «realistic quarks» school trying to give quarks the usual properties of physical particles. The difference between the two schools is easily seen making use of Lipkin's image of the two planes in strong interaction physics, the (I, Y, B) plane of internal symmetries and Mandelstam's (s, t, u) plane of space-time physics. The «mathematical quarks» school wants to leave quarks in the (I, B, Y) plane where they were born, while the «realistic quarks» school aims to bring them to the (s, t, u) plane. In this thesis we take the realistic quarks point of view.

An interesting and not unrelated question is the problem of hierarchy: what is the place of quarks in the hierarchy of elementary particles? Are quarks «aristocratic» particles or do we still have a «democratic» world in strong interactions? In the «mathematical quarks» school quarks are definitely aristocrats: they do not even materialize in the (s, t, u) plane as all the other particles. In the «realistic quarks» school if one simply regards quarks as the ultimate constitutive blocks of hadronic matter they certainly remain «aristocratic». However one is not necessarily led to that attitude: a quark can be, for instance, seen as «made up» of a meson and another quark, and, in general, one could think of an enlarged bootstrap scheme where quarks and hadrons would appear as a result of the presence of quark and hadronic forces. As far as strong interactions are concerned quarks can be treated in the same footing as the other particles and thus we favour a «democratic» solution à la Chew [4].

The realistic quark model was introduced by Morpurgo [5] and extensively developed by Dalitz [6]. The first problems the model had to discuss were related to the quark mass and the forces binding quarks inside hadrons. The suggested model of quarks with large mass and a flat bottomed potential, extracted from an intuitive picture of hadrons as compound particles, is still a basic starting point for realistic versions of quark model.

It should be noticed that in the mathematical quarks approach it makes sense to talk about the mass of the quark to the extent that this quantity has an SU(3) meaning. An isospin doublet--singlet quark mass difference, for instance, can be introduced to generate SU(3) mass formulae. A definition of an absolute quark mass is of course outside the scope of SU(3). In the realistic approach is frequently defined with an effective quark mass M^* (bound quark mass) and a free quark mass M. It is the latter

which corresponds to the usual definition of mass for physical particles and thus is the one we shall use. The relation between the two concepts of mass was discussed by Lipkin and Tavkhelidze [7] who showed that they might be made compatible for certain types of potentials if one thinks of the effective mass M^* as a quantity including M and the effect of the potential well, i. e.

$$M^* = M - V \tag{I. 3}$$

The effective mass concept is related to the interpretation of quarks as quasi particles in analogy with phonons, i. e., they only exist while constituents of hadrons [8]. Such models being still realistic avoid the difficulty of quarks not having been unmistakably found. For most of the purposes, because of (I. 3), the effective mass and the free mass approaches, are equivalent. There are however interesting differences in the two treatments. One occurs with electromagnetic interactions. In the quasiparticle treatment the quarks are considered as Dirac particles (zero anomalous magnetic moment). In the free quark treatment the magnetic moment must be dominantly anomalous. If quarks happen to exist this is in fact a prediction of this class of models. Another problem where the two treatments differ is in the comparison of high energy additivity predictions. Accepting that reactions should be compared at the same quark center of mass energy, when comparing cross-sections for the reactions $AB \to AB$ and $AB' \to AB'$ one should take values of laboratory momenta P_B and $P_{B'}$ such that,

$$P_{B'}/P_B = Z_{B'}/Z_B \tag{I. 4}$$

in the effective mass (and momentum) approach where $Z_B (Z_{B'})$ is the number of quarks in $B (B')$ [9], and

$$P_{B'}/P_B = m_{B'}/m_B \tag{I. 5}$$

in the free quark mass treatment where $m_B (m_{B'})$ is the mass of particle $B (B')$ [10]. Prescription (I. 4) holds in meson-baryon scattering ($p\pi \to p\pi$ compared to $pK \to pK$) but seems to be violated when comparing meson baryon to baryon baryon scattering ($p\pi \to p\pi$ compared to $pp \to pp$). The validity of either (I. 4) or (I. 5) or the failure of both will possibly in future be tested more easily in inclusive processes. If in the reaction $A+B \to C+X$

(X being «anything») the collision of A with B is effectively a collision of the quarks of A with the quarks of B the production cross-section of C must show forward-backward symmetry when plotted against the longitudinal momentum of C in the quark center of mass frame. The existing data is at relatively low energy and one should wait for much higher energy data. However some experiments favour already the existence of such frame and prescription (I. 4)[11]. If these results are confirmed and either (I. 4) or (I. 5) is proven to be correct that would become a remarkable success of the realistic quark model.

The nature of the potential responsible for the binding of quarks is a problem for which no answer was found. In the bootstrap perspective, the binding forces should have an origin in the usual particles rather than in some special mechanism. Phenomenological potentials have been used in nonrelativistic[12] (Schrödinger) and relativistic[13] (Bethe-Salpeter) dynamical equations, the most successful ones being of harmonic oscillator type. The various resonances of a given trajectory are described in terms of orbital quark excitations. This simple and intuitively appealing models are rather powerful particulariy in the classification of baryonic resonances[14].

It should be remarked that a priori the dynamics of three quarks in baryons could well be completely different from the dynamics of the two quarks inside mesons. In principle there is no reason to expect similar orbital excitations and trajectories with approximate universal slope, as seems to be the case. Thus it is of great interest to consider models for the structure of hadrons, in which the constraint of universality of the Regge trajectories is imposed from the beginning. Such models were inspired by duality and the Veneziano model[15]. In one of them, Susskind's model[16], the hadronic matter is described as a continuum (a string, a rubber band) and instead of quark orbital excitations we have now vibrations of this continuum. As the continuum is the same for all hadrons the spectrum of resonances is also universal (same slope of trajectories and same daughter structure). The quarks are not the fundamental dynamical objects but are simply relevant singularities embedded in the continuum, playing the role of boundary conditions. A quark could be in this model represented in the same was as any other particle, a continuum with just one singularity, having the same type of excitations (quark trajectory). These crude ideas applied to meson-

-meson and meson-barion scattering led in an elegant way to the Veneziano formula. Conceptually these models are rather atractive but attempts [17] to describe details of the resonance spectrum, namely baryon resonances, failed to recover the good results of the more conventional SU(6) quark model with orbital excitations.

Applied to hadron interactions the usual quark model [18] gives two kinds of predictions. At low energy it predicts coupling constants and widths of resonances. At high energy it predicts relations between cross-sections. Normally these predictions appear as if they were independent. However, having in mind the ideas of duality, it is natural to think of models giving simultaneously results in both low and high energy regions and being able to relate them. No satisfactory models of this type exist yet. In this thesis we use a relativistic (Bethe-Salpeter) approach to quark model to describe two body decays and coupling constants (Chapter II and Refs. [19] and [20]). This approach is our main tool in the low energy region. At high energy we rely on the usual additivity results. We then write simple models for the amplitudes containing these two pieces of information supplied by the quark model and show that such models satisfy duality (Chapter III and Ref. [21]). Dual resonance models [22] are the natural generalization of these attempts, but the existing dual relativistic models [23,24] are not unfortunately of much practical use. In this thesis we limit ourselves on deriving from the quark underlying structure constraints to the scattering amplitude to be satisfied in dual resonance models (Chapter IV and Ref. [25]).

CHAPTER II

The Bethe-Salpeter approach to relativistic quark models

1. Introduction.

The non-relativistic quark model has been a very successful model in predicting decay widths and coupling constants in hadron interactions [26, 27, 28]. However, when decays involving quark--antiquark annihilation are considered the model runs into trouble requiring the inclusion of SU(3) non-invariant space wave functions.

Discussing the problem of the structure of the meson wave functions from a relativistic point of view Llewellyn Smith [29] found that the wave functions that give good predictions in annihilation processes and preserve SU(3) are not the ones that correspond to the weak binding limit of the non-relativistic quark model. Thus the necessity of a relativistic treatment of quark model and of the use of wave functions with a relativistic structure.

The fact that one uses wave functions with a relativistic structure does not mean that the quarks have relativistic internal motion. In all calculations we always have the freedom of fixing the average values of the internal momenta. Regarding the realistic quark model the conclusion from our work is that its basic idea that quarks move with small space momenta within hadrons must be kept. This requires a deep flat bottomed potential with a long range force and massive quarks [5, 6] ($M \gtrsim 5\ GeV$).

In this chapter we discuss a Bethe-Salpeter [30] type of

approach to quark model. We make use of the Bethe-Salpeter formalism in two ways:

(*i*) Mesons and baryons (orbital $L = 0$ states) are considered as bound state poles in the Bethe-Salpeter $\overline{Q}Q$ (antiquark--quark) and QQQ (3 quark) amplitudes. Whenever P^2, P being the momentum in the $\overline{Q}Q$ or QQQ channel, is close to an on mass shell value the Bethe-Salpeter propagator is saturated by bound state contributions [31]. This leads to Vector Meson Dominance and pole dominance of the divergence of the weak axial vector current at quark level [19].

(*ii*) Interactions of hadrons are supposed to take place via basic quark interactions. The non relativistic quark model picture of one quark interacting in the presence of the others (spectators) is substituted by a quark triangle graph [32] related to the Bethe--Salpeter normalization equation [33].

Consistency between (*i*) and (*ii*) is demanded as a criterion to select convenient quark-quark-vector meson (QQV) and quark-quark-pseudoscalar meson (QQP) vertex functions. Such consistency leads to Llewellyn Smith's preferred relativistic model [29] (Model I).

The wave functions for mesons used here were suggested from the solutions of the $\overline{Q}Q$ Bethe-Salpeter equation with a separable potential. We assume that their form is more general than the separable potential itself. Thus we do not work strictly in the separable potential model, this simple model being occasionally used only for orders of magnitude estimates.

In the QQP and QQV vertex functions we include derivative and non derivative couplings. The referred consistency between (*i*) and (*ii*) determines effective SU(3) mass breaking factors in the various QQP and QQV coupling constants. Because of (*ii*) these mass breaking factors will affect hadron coupling constants to pseudoscalar and vector mesons. In general our results for coupling constants improve the SU(3) symmetry limit and the non relativistic quark model.

In Section 2 we briefly describe the Llewellyn Smith Bethe--Salpeter formalism applied to quarks. In Section 3, we discuss possible models and use the criterion of consistency between (*i*) and (*ii*) to select the correct one. In Section 4 three particle

coupling constants, including baryon couplings, are evaluated in our formalism. We end, Section 5, with a short discussion on the existing relativistic quark model approaches to the four legged processes as an introduction to chapter III.

2. The Bethe-Salpeter formalism and Llewellyn Smith Models.

To describe quark-antiquark processes we need the basic ingredients of the Bethe-Salpeter formalism for fermion-antifermion scattering. We are not interested in the full two-body propagator (given by the inhomogeneous equation) but only in the pole terms caused by the presence of bound state mesons (given by the homogeneous equation). In the notation we fellow Ref. [29].

If $\psi_\alpha(x_1)$ and $\bar{\psi}_\beta(x_2)$ are the quark and antiquark Heisenberg field operators the meson wave function in coordinate space is defined by

$$\chi_{\alpha\beta}(X,x) = <0 \mid T(\psi^1_\alpha(x_1)\bar{\psi}^2_\beta(x_2)) \mid B> \qquad \text{(II. 1)}$$

where $X=(x_1+x_2)/2$ is the four dimension center of mass vector and $x=x_1-x_2$ is the relative distance between particles 1 and 2. In momentum space we have

$$\chi_{\alpha\beta}(P,q) = \int e^{iP.X+iqP.x}\chi_{\alpha\beta}(X,x)\frac{d^4x}{(2\pi)^4} \qquad \text{(II. 2)}$$

where now P is the quark-antiquark overall momentum and q the relative momentum. The conjugate wave function is defined by imposing the Feynman boundary conditions. In the complex q_0 plane $\chi(P,q)$ shows structure along the real axis, a left hand cut from $-\sqrt{q^2+M^2}+\frac{P^0}{2}$ and a right hand one from $\sqrt{q^2+M^2}-\frac{P_0}{2}$. $\chi(P,q)$ and the conjugate wave function $\bar{\chi}(P,q)$ are defined as limits of an analytic function evaluated respectively above the right hand cut and below the left hand one. They are related by:

$$\bar{\chi}(P,q) = \gamma^0\chi^+(P,q)\gamma^0. \qquad \text{(II. 3)}$$

For convenience we shall later use the vertex function $\Gamma(P,q)$ related to $\chi(P,q)$ by:

$$\Gamma(P,q)=\left(\not q+\frac{\not P}{2}-M\right)\chi(P,q)\left(\not q-\frac{\not P}{2}-M\right). \qquad \text{(II. 4)}$$

For fermion-fermion scattering χ has 16 components and transforms as the outer product of a spinor and a conjugate spinor. We write it in a matrix form: four 4×4 matrices corresponding to the positive component-positive component $(++)$ term in the product of spinors, the $(+-)$, $(-+)$ and the $(--)$ terms. In the rest frame of the bound state meson one thus has:

$$\chi(m_B,\underset{\sim}{0};q)=\begin{pmatrix}\chi^{+-} & \chi^{++}\\ \chi^{--} & \chi^{-+}\end{pmatrix} \qquad \text{(II. 4)}$$

In the limit of free quark and antiquark the following relations between the components of χ hold:

$$\chi^{+-}\simeq\chi^{-+}\simeq\frac{\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{q}}{M}\chi^{++} \qquad \text{(II. 5)}$$

$$\chi^{--}\simeq\frac{q^2}{M^2}\chi^{++} \qquad \text{(II. 6)}$$

When the relative motion is negligible, e. g.,

$$q^2\simeq0 \qquad \text{(II. 7)}$$

from (II. 5) and (II. 6) only χ^{++} is important and in particular

$$\chi^{--}<<\chi^{++} \qquad \text{(II. 8)}$$

Equation (II. 7) is rather natural in the framework of quark model and has a strong intuitive appeal. However when combined with (II. 6) leads to (II. 8) and this last relation is in the origin of the troubles in annihilation processes. If one accepts the weak binding limit model, Equations (II. 5) and (II. 6), the Weisskopf-Van Royen paradox [28] and space wave functions with large SU(3) breaking cannot be avoided, unless one abandons the attractive limit $q^2\simeq0$. Thus the real paradox of the non relativistic model of having to give up the non relativistic approximation to the

internal quark motion to save its contradictions. Llewellyn Smith's analysis ([29]) showed clearly that the $q^2 \simeq 0$ approximation can be kept (it is in fact basic to derive SU(6)) because it only implies Equation (II. 8) and SU(3) breaking of the wave functions if Equation (II. 6) is valid. Certainly the weak binding limit is not a sensible approximation in quark model and Equation (II. 6) is not reliable.

Without making a priori approximations in $\chi(P, q)$ one can study its properties under symmetry operations and derive the general structure of the wave functions. This was done by Llewellyn Smith ([29]) and we only give here, as an example, the structure of the wave function for a pseudoscalar meson:

$$\chi = \gamma_5 (A + q \cdot P B \not{q} + C \not{P} + D (\not{q} \not{P} - \not{P} \not{q})) \qquad \text{(II. 9)}$$

where A, B, C and D are even functions of $(q \cdot P)$.

To extend the analysis of possible models for the wave functions we consider the homogeneous Bethe-Salpeter equation:

$$\left(\not{q} - \frac{\not{P}}{2} - M\right) \chi(P, q) \left(\not{q} + \frac{\not{P}}{2} - M\right) \qquad \text{(II. 10)}$$

$$= - \int \hat{V}(P, q, k) \chi(P, k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

where $\hat{V}$ is the potential operator. If $\chi(P, q)$ is a solution of (II. 10) it satisfies a normalization equation:

$$i \operatorname{Tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ (2\pi)^8 \bar{\chi}(P, q) \left[\frac{\partial}{\partial P_\mu} \left(\not{q} - \frac{\not{P}}{2} - M \right) \right] \chi(P, q) \left(\not{q} + \frac{\not{P}}{2} - M \right) \right.$$

$$+ (2\pi)^8 \bar{\chi}(P, q) \left(\not{q} - \frac{\not{P}}{2} - M \right) \chi(P, q) \left[\frac{\partial}{\partial P_\mu} \left(\not{q} + \frac{\not{P}}{2} - M \right) \right] \qquad \text{(II. 11)}$$

$$\left. + \int d^4 k \, \bar{\chi}(P, q) \frac{\partial \hat{V}(P, q, k)}{\partial P_\mu} \chi(P, q) \right\} = 2 P_\mu .$$

In his discussion of the wave functions Llewellyn Smith makes two important assumptions:

1) The potential $\hat{V}$ is SU(3) invariant, e. g., it is weakly dependent on the meson masses. This assumption allows one via the Bethe-Salpeter normalization equation to relate wave functions for different mesons.

2) A smooth extrapolation in the meson masses is valid. This means that in taking the limit $(m_B/M) \to 0$, natural in a world of massive quarks, the physics described by (II. 10) is not drastically changed.

With these two assumptions and using the space reflection symmetry properties of A, B, C and D (Equation (II. 9)) in (II. 11) Llewellin Smith formulates his Models. The characteristics of the Models are shown in Table II. 1.

TABLE II. 1

Model	Characteristics
I	$\chi^{++} \simeq \chi^{--}$ $(\chi^{++} - \chi^{--})/m_P = \text{const.}$
II	$\chi^{++} \simeq -\chi^{--}$ $\chi^{++} - \chi^{--} = \text{const.}$
III	$\chi^{++} >> \chi^{--}$ $\chi^{++}/\sqrt{m_P} = \text{const.}$

Model I is the one favoured by Llewellin Smith. It has the following interesting properties:

1) The wave functions are, up to corrections of order $(M_B/M)^2$, SU(3) invariant.

2) Making the approximation $(q/M)^2 << 1$ one obtains approximate SU(6) as in the non relativistic model.

3) As the dominant component of the wave function is meson mass independent it does not change drastically in the soft pion limit $P_\mu \to 0$ and thus this limit can be safely taken.

4) It requires in the limit $(m_B/M) \to 0$ the validity of the Goldstein equation [34] as an eigenvalue equation and this, on the other hand implies a potential less singular at the origin than the one particle exchange. This is a constraint found in all quark model calculations, non relativistic [35] and relativistic ones [36].

5) Applied to the evaluation of decays of mesons it provides the relations

$$f_\varphi^{-2} : f_\varphi^{-2} : f_\omega^{-2} = \frac{1}{m_\varphi^2} : \frac{\cos^2\theta}{3\,m_\varphi^2} : \frac{\sin^2\theta}{3\,m_\omega^2} \qquad \text{(II. 12)}$$

for the electromagnetic annihilation of vector mesons and

$$F_\pi = F_K \qquad \text{(II. 13))}$$

for the weak two body decays of pseudoscalar mesons. Both predictions are in fair agreement with experiment. Models II and III, the last one corresponds to the weak binding limit, give bad predictions. This point will be further discussed later.

In the next section we will study simple models embodying the properties of Llewellyn Smith general Models I, II and III.

The description of the mesons as bound states in the $Q\bar{Q}$ channel is not equivalent to saying that the mesons are completely determined in teir behaviour by their quark content. If however we are prepared to accept this we can largely extend the field of application of the Bethe-Salpeter approach. The idea then becomes to reduce all hadronic interactions to quark interactions. In general we will thus suppose that the interactions of hadrons take place through the quark currents and that the interactions of quarks are mediated by hadron fields.

In particular it was shown [31] that in the Bethe-Salpeter formalism applied to quarks vector meson dominance and the Goldberger-Treiman relation appear as a result of the saturation of the quark-antiquark propagator by meson bound state contributions. These are expected to dominate when the meson is near its mass shell. Thus from the point of view ot quarks the electromagnetic decay of vector mesons (or the weak axial vector two body pseudoscalar meson decay) will be described by the graph of Fig. 1 a [29]. Neglecting three-body interaction the three-meson vextex will be predominantly given by a triangle (renormalized) graph (Fig. 1 b), which may be justifiably evaluated as a Feynman integral [32]. But the four legged process of Fig. 1 c cannot be treated as a Feynman graph because there will be large contributions from poles in some channels. Only some kind of duality interpretation is adequate. Baryon interactions will similarly be decomposed into their quark constituents.

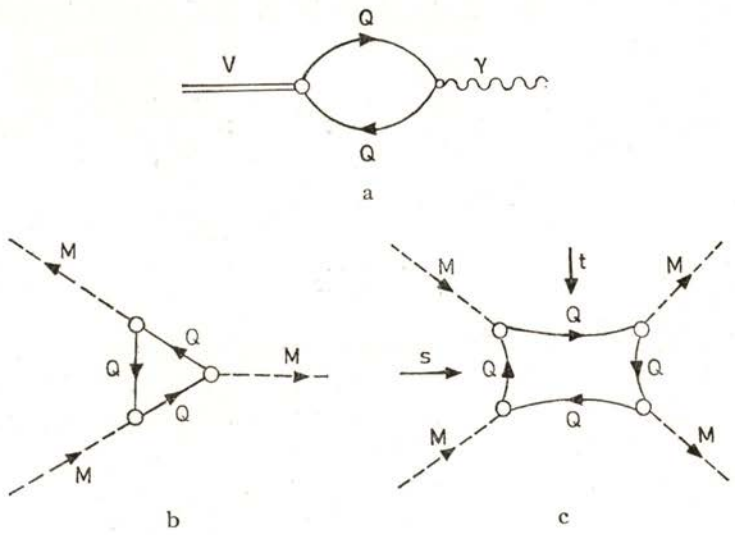


Fig. 1

3. Models for QQV and QQP vertex functions.

In this Section we introduce quark-quark-pseudoscalar meson (QQP) and quark-quark-vector meson (QQV) vertex functions which are simple realizations of Llewellyn Smith's Models I, II and III. They have the structure of solutions of the $Q\bar{Q}$ homogenous Bethe-Salpeter equation with a separable potential [29] and this simple model is occasionally used for orders of magnitude estimates. Both the QQP and QQV vertices include derivative and non-derivative couplings, pseudovector and pseudoscalar couplings for the QQP interaction and Dirac and Pauli-like couplings for QQV. We write the vertex functions as:

QQP:

$$\Gamma_P(P,\not{p}) = W(P,\not{p})\,\gamma^5\,G\left[\left(\frac{m_P}{2M}\right)^s R - \left(\frac{m_P}{2M}\right)^v \frac{\not{P}}{2M}\right] \qquad \text{(II. 14)}$$

QQV:

$$\Gamma^\mu_V(P,\not{p}) = W(P,\not{p})\,\varepsilon^\mu_\alpha\,F\left[\left(\frac{m_V}{2M}\right)^e \gamma_\alpha + iR'\left(\frac{m_V}{2M}\right)^m \sigma_{\alpha\nu}\frac{P^\nu}{m_V}\right] \qquad \text{(II. 15)}$$

where $m_P(m_V)$ is the meson mass and P its moments; $M, p \pm \frac{P}{2}$ are the quark mass and momenta; G, R, F and R' are Model dependent constants and s, v, e and m are parameters which characterize the Models; ε_α^μ is the vector meson polarization, $P_\alpha \varepsilon_\alpha^\mu = 0$ when $P^2 = m_V^2$ and $\varepsilon_\alpha^\mu \varepsilon_\beta^\nu = g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / m_V^2$; $W(P,p)$ is a form factor required for the convergence of some integrals and satisfies the quark on mass shell condition:

$$W(P,p) = 1 \quad \text{when} \quad \left(p + \frac{P}{2}\right)^2 = \left(p - \frac{P}{2}\right)^2 = M^2 .$$

The quantities G and R (F and R') can in principle be determined by solving the Bethe-Salpeter and normalization equations. Table II. 2 shows in the different Models the values of the parmeters s, v, e and m.

TABLE II. 2

Model	Vertex Function Parameters			
	QQP		QQV	
	s	v	e	m
I	0	0	1	0
II	1	—1	0	1
III	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

We now compute for the various models [29], the neutral vector meson electromagnetic coupling constants f_V, using the graph of (Fig. 1a), and similarly the pseudoscalar meson annihilation parameter F_P. The result, easily obtained with the vertex functions (II. 14) and (II. 15), can be written in the form:

$$\frac{1}{f_V} = \left[\sum g_i^V e_i \Big/ \left(\frac{m_V}{2M}\right)^k \right] \mathrm{I} \qquad \text{(II. 16)}$$

and

$$F_P = \left[2 M g_A \Big/ \left(\frac{m_P}{2M} \right)^l \right] I' \qquad \text{(II. 17)}$$

where g_A is the ratio of axial to vector coupling for quarks;

e_i is the charge of quark Q_i $(i = \mathscr{S}, \mathscr{U}, \lambda)$ in units of electron charge;

g_i^V is the Clebsh-Gordan coefficient giving the $Q_i \overline{Q}_i$ contribution to the vector meson V;

k, l are numbers depending on the chosen Model;

and I, I' are the loop integrals which in the approximation $\frac{m_P}{M}, \frac{m_V}{M} \ll 1$ are independent of the meson masses. The quark axial vector coupling renormalization constant and quark and nucleon Cabibbo angles have been absorbed in I'. The loop integrals I and I' have not necessarily the same values for the various Models.

In Table II. 3 are shown the parameters k and l in the different cases as well as the mass dependence of f_V and f_P. The experimental ratios of f_V's or F_P's for different vector or pseudoscalar mesons strongly favour Model I [29].

TABLE II. 3

Model	Annihilations			
	Pseudoscalar Mesons		Vector Mesons	
	Parameter l	m_P dependence of F_P	Parameter k	m_V dependence of f_V
I	0	const.	1	m_V
II	1	$1/m_P$	2	m_V^2
III	$\frac{1}{2}$	$1\ m_P^{1/2}$	3/2	$m_V^{3/2}$

Let us now take the electromagnetic interaction of quarks in the limit $P^2 \to 0$ and consider first the Dirac coupling. In that limit this coupling gives the quark electric charge. As $P^2 = 0$ is not far from the vector meson poles it is reasonable to assume that the quark electromagnetic current is dominated by vector mesons. Graphically and making use of Fig. 1a we have Fig. 2. The corresponding equations are, from (II. 15) and (II. 16):

$$\sum g_i^V e_i = F\left(\frac{m_V}{2M}\right)^e \frac{1}{f_V} \qquad \text{(II. 18-a)}$$

$$= \left(\sum g_i^V e_i\right)\left(\frac{m_V}{2M}\right)^{e-k} FI. \qquad \text{(II. 18-b)}$$

To avoid contradictions between the left and the right hand sides

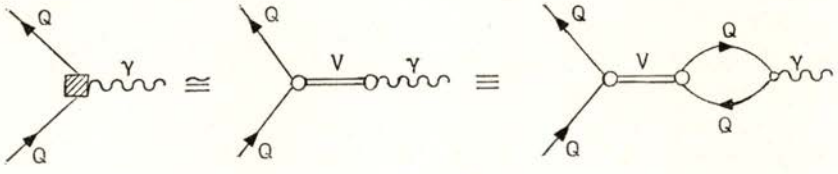


Fig. 2

of (II. 18-b) in the sense that no dependence on vector meson masses should occur in the right hand side we require

$$e = k \qquad \text{(II. 19)}$$

and this constraint is only satisfied by Model I. To satisfy Equation (II. 18-b) one still needs to ensure

$$FI = 1 \qquad \text{(II. 20)}$$

but this is only a constraint on the form factor for the QQV vertex. For Model I the Dirac coupling is then, in the limit $P^2 \to 0$, consistent with a vector meson dominance description of the quark electromagnetic interaction.

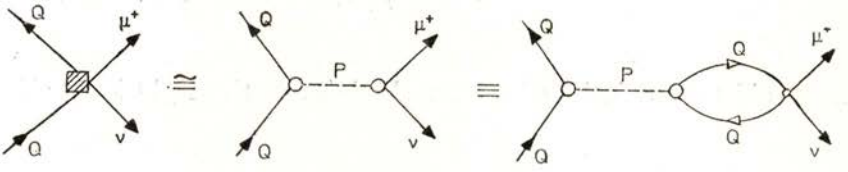
We treat in a similar way and in the same limit the divergence of the weak axial vector interaction of quarks (Fig. 3) with the resulting equations:

$$2 M g_A = \sqrt{2}\, g_Q F_\pi \qquad \text{(II. 21-a)}$$

$$= (2 M g_A) \left(\frac{m_P}{2 M}\right)^{-l} \sqrt{2}\, g_Q I^l \qquad \text{(II. 21-b)}$$

where

$$g_Q = \frac{1}{\sqrt{2}} G \left(\frac{m_P}{2 M}\right)^{v} \left(\left(\frac{m_P}{2 M}\right)^{s-v} R + 1 \right) \qquad \text{(II. 22)}$$



a b c

Fig. 3

is the overall $QQ\pi^0$ coupling constant. If we assume negligible mass dependence of the last factor in (II. 22), which is strictly true in Model I and is justified in the other Models if R is not too large then the consistency of (II. 21-b) requires:

$$v = l$$

a condition that is satisfied only in Model I. The additional constraint is:

$$\sqrt{2}\, g_Q I^l = 1 . \qquad \text{(II. 24)}$$

Equation (II. 21-a) contains nothing but a Goldberger-Treiman relation for quarks.

It is remarkable that only Model I satisfies vector meson dominance and *PCAC* for quarks [37]. It is also the only Model that predicts a *KSFR* type relation [38]:

$$f_\varrho F_\pi = c\, m_\varrho \qquad \text{(II. 25)}$$

where in this model, from (II. 18-a), (II. 21-a), (II. 23) and (II. 24)

$$c = \sqrt{2}\, g_A I'/I = g_A F/g_Q .$$

We shall use the experimental determination of c to relate g_A and g_Q[39]. From now on we restrict ourselves to Model I ($s = v = 0$; $e = 1, m = 0$; $l = 0, k = 1$) and the vertex functions

$$\Gamma_P(P,p) = W(P,p)\gamma^5 G\left[R - \frac{\not P}{2M}\right] \qquad \text{(II. 26)}$$

$$\Gamma_V^{\mu}(P,p) = W(P,p)\,\varepsilon_\alpha^\mu F\left[\left(\frac{m_V}{2M}\right)\gamma_\alpha + i R'\sigma_{\alpha\nu}\frac{P^\nu}{m_V}\right] \qquad \text{(II. 27)}$$

Applying vector meson dominance to the Pauli coupling, one obtains

$$\sum e_i g_i^V K_i = \frac{F R'}{m_V}\,\frac{1}{f_V} \qquad \text{(II. 28)}$$

where K_i gives the anomalous contribution to the magnetic moment of the quark in units of the quark mass. From relations (II. 28) and with a mixing angle θ close to the ideal mixing angle we have approximately:

$$K_{\mathcal{N}} = 2\,\frac{1 - \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{m_\varrho}{m_\omega}\right)^2}{1 + \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{m_\varrho}{m_\omega}\right)^2} K_{\mathcal{P}} \qquad \text{(II. 29)}$$

and

$$K_\lambda = \frac{4}{3}\,\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{m_\varrho}{m_\varphi}\right)^2\cos\theta}{1 + \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{m_\varrho}{m_\omega}\right)^2} K_{\mathcal{P}} . \qquad \text{(II. 30)}$$

For ideal mixing of octet and singlet SU(3) states ($\varphi \equiv \lambda\bar{\lambda}$) and with $m_\varrho^2 \approx m_\omega^2$, (II. 29) and (II. 30) give

$$K_{\mathcal{N}} = K_{\mathcal{P}}, \quad K_\lambda = \left(\frac{m_\varrho}{m_\varphi}\right)^2 K_{\mathcal{P}} . \qquad \text{(II. 31)}$$

The first relation is the usual non-relativistic quark model assumption, the second differs by the factor $(m_\varrho/m_\varphi)^2$.

As we mentioned before G and R (F and R') can be determined by solving the Bethe-Salpeter and normalization equations but to obtain such a solution a knowledge of the interacting $Q\bar{Q}$ potential and form factor $W(P,p)$ is required. As we do not know these we use general arguments to relate G to F and R to R'.

Llewellyn Smith showed that in the case of a spin independent potential the pseudoscalar and vector meson relativistic wave functions for vanishing $\left(\frac{m_P}{M}\right)$ and $\left(\frac{m_I}{M}\right)$ are related by SU(6). This implies, in our model,

$$R\,G = R'\,F \tag{II. 32}$$

a result which we take as more fundamental than the form of the potential. On the other hand the normalization equation (II. 11) written in the rest frame of the meson becomes

$$\mathrm{Tr}\left\{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\bar{\Gamma}(P,k)\frac{i}{\not k+\frac{\not P}{2}-M}\gamma^0\frac{i}{\not k-\frac{\not P}{2}-M}\cdot\right.\right.$$

$$\cdot\,\Gamma(P,k)\frac{i}{\not k+\frac{\not P}{2}-M} - \bar{\Gamma}(P,k)\frac{i}{\not k-\frac{\not P}{2}-M}\Gamma(P,k)\cdot$$

$$\left.\left.\frac{i}{\not k+\frac{\not P}{2}-M}\gamma^0\frac{i}{\not k+\frac{\not P}{2}-M}\right]\right\} = 4\,P^0 \tag{II. 33}$$

where Γ stands for Γ_P or Γ^μ_V. The potential contributions have been neglected as in Ref. [29]. Working out the trace calculations for P and V mesons under the assumption $\langle k^2\rangle \ll M^2$ and comparing the results

$$(a\,R^2 + b\,R)\,G^2 = (a\,R'^2 + b\,R')\,F^2 \tag{II. 34}$$

where, in the approximation $m_V^2, m_P^2 \ll M^2$, a and b are integrals independent of the meson masses. Equations (II. 32) and (II. 34) then give

$$G = F \tag{II. 35}$$

and

$$R = R' \tag{II. 36}$$

We note that the separable potential model in general predicts R to be of the order of R' but a precise relation, like (II. 36) is model dependent. It also gives, for a dominantly scalar interaction $R < 1$ and positive.

To find an estimate for R and R' we use the non-relativistic quark model result of the equality of the magnetic moments of the quark and the proton, which we shall rederive later, $K_{\mathcal{P}} = 2.79/2\, m_{\text{proton}}$. Equation (II. 18-*a*) for the ϱ meson becomes:

$$F \frac{m_\varrho}{2M} = \frac{f_\varrho}{\sqrt{2}} \tag{II. 37}$$

and combined with (II. 28) gives

$$R' = \left(\frac{2.79}{2\, m_{\text{proton}}} m_\varrho \right) \frac{m_\varrho}{2M} \simeq \frac{m_\varrho}{2M} \tag{II. 38}$$

where the last expression is an approximate numerical result. It is worth recalling that R' does not depend on m_V but (II. 38) shows that R' (and R) is small of order (m_ϱ/M). With (II. 38) the QQV coupling satisfies broken $SU(6)_W$ universality [37].

Neglecting R, compared to 1, we derive from (II. 21-*a*), (II. 22), (II. 25), (II. 35), (II. 36), and (II. 37) expressions for the basic quark level weak axial vector coupling constant g_A and pseudovector $QQ\pi$ coupling constant (g_Q/M) in terms of known quantities:

$$g_A = \frac{c}{\sqrt{2}} \tag{II. 39}$$

and

$$\left(\frac{g_Q}{M} \right) = \left(\frac{f_\varrho}{m_\varrho} \right). \tag{II. 40}$$

Equation (II. 40) is an additivity quark model result. In (II. 39) with the experimental value of c, $c \simeq 1$, g_A agrees with the additivity result for axial weak decays for baryons, $g_A \simeq 0.70$ [18].

We have shown that Llewellyn Smith's Model I contains PCAC and vector meson dominance consistently built in. The model is then dynamically consistent with a description of the meson interactions through the splitting of the mesons into the quarks and the rebuilding of the mesons from the quarks.

4. Three body coupling constants.

In Ref. [19] we developed the techniques for evaluating coupling constants involving three mesons in the Bethe-Salpeter formalism (triangle graph of Fig. 1-b). Llewellyn Smith Model I mass factors in the QQV vertex function act effectively as SU(3) mass breaking factors and we obtain the results ([19]):

$$f_{PPV} \propto m_V \tag{II. 41}$$

$$f_{VVP} \propto 1/m_V^2 \tag{II. 42}$$

The PPV and VVP coupling constants are related by:

$$\frac{f_{\omega\varrho\pi}^2 m_\varrho^2}{\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right]^2} \simeq 4 f_{\varrho\pi\pi}^2 \tag{II. 43}$$

wich reproduces the $SU(6)_W$ result of Sakita and Wali ([40]) in the ideal mixing limit. In [19] and [20] the effect of these mass factors in the widths of resonances was shown in various examples. Numerical results depend in many cases on the value taken for the $\omega - \varphi$ mixing angle and this makes the comparison of (II. 41) and (II. 42) with the SU(3) symmetric limit (no mass breaking factors) and experiment sometimes ambiguous. There are however at least two cases where prescriptions (II. 41) and (II. 42) seem to be tetter than the SU(3) limit. One is in the $K^* K\pi$ coupling constant (no $\omega - \varphi$ mixing involved). The other is in the $\pi\gamma, \eta\gamma$ decays of the meson φ. If we take the ideal mixing angle ($\theta \simeq 35°$) the decay is forbidden in the planar graph approximation, if however we take $\theta < 35°$ (experimentally $\theta \simeq 33°$ ([41])) without the $1/m_\varphi$ mass factor of (II. 42) the calculated width may become too large. In table II. 4 we show for these two cases our predictions compared to the SU(3) limit and experiment.

TABLE II.4

Decay	Width (MeV)		
	Prediction	SU (3) limit	Experiment
$K^* \to K\pi$	49.6	36.2	50.6 ± 0.7
$\Phi \to \pi\gamma$	0.0052	0.0070	< 0.012

For further discussion of meson couplings and connections to vector meson dominance we refer to [19] and [20]. In this section we would like to concentrate mainly in the problem of baryon couplings to mesons.

We have shown in Section 2 how Llewellyn Smith's Model I combined with vector meson dominance and the Goldberger-Treiman relation at quark level is able to reproduce the non-relativistic quark model results relating quark to hadron coupling constants. These relations were originally derived using the idea of additivity of the interactions of quarks inside the baryons in a kind of shell model of the baryon. We show now how additivity works for the baryons in the present model and how we are able to recover basic additivity results of the non-relativistic quark model.

If the baryon wave functions are solutions of the three quark channel homogeneous Bethe-Salpeter equation, they satisfy a Bethe-Salpeter normalization equation. This is shown in Fig. 4,

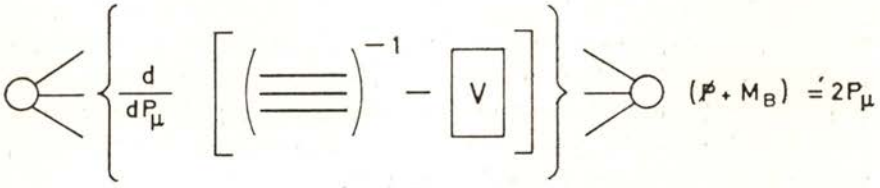


Fig. 4

and the symbols are a generalization of the notation of Ref. [29]. In particular ⋖ represents the three-body wave function,

$$\chi\left(P; \frac{P}{3} + k_1, \frac{P}{3} + k_2, \frac{P}{3} + k_3\right)$$

with $P^2 = M_B^2$ and $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Again we neglect the potential contributions to normalization. Note that Equation of Fig. 4 is a very formal one. We will disregard complications due to disconnected potential terms since we are neglecting the contribution of the potentials altogether in the normalization.

The BBV couplings in the limit $q_V^2 \to 0$, neglecting as in Ref. [19] the QQV form factor, are described by the same integrals as the normalization equation, but with different coupling constants. For the electric coupling of the nucleon we obtain the vector meson dominance result

$$g_{\varrho NN}(0) \simeq \frac{1}{2} f_\varrho \tag{II. 44}$$

and, in the ideal mixing limit

$$g_{\omega NN}(0) \simeq 3\left(\frac{1}{2} f_\varrho\right), \tag{II. 45}$$

This is just a reflection of the fact that vector dominance connects baryonic to electric charge for both nucleons and quarks. We also obtain, using (II. 12), the relation for the saturation of the electromagnetic current by the ϱ and ω poles,

$$\frac{g_{\varrho pp}(0)}{f_\varrho} + \frac{g_{\omega pp}(0)}{f_\omega} = 1. \tag{II. 46}$$

As the normalization condition is defined at zero momentum transfer, $q = 0$, the only model independent statements one can make are on the electric couplings. Some further assumptions are required to evaluate the magnetic coupling, the weak axial vector decay coupling and the couplings to pseudoscalar mesons, whose matrix elements are linear in q.

In a picture of the baryons interacting through the quarks we will suppose that when one quark interacts the other two, «spectators», behave in an average sense as a single diquark object. Inside the baryons the quarks move with small space momenta so one expects only S wave interactions. Thus to have the octet and decuplet baryons in a $\underline{56}$ representation of SU(6) the interacting quarks must couple to appropriate combinations

of SU(3) triplet (T) and sextet (S) diquarks, the triplet having spin-zero and the sextet spin 1 [42]. These average spectator diquarks can then be described by a scalar field for the triplet and a pseudovector field for the sextet.

The introduction of these diquarks has the advantage of reducing the three-body problem to a two-body one. The coupling $BQQQ$ may then be written as a combination of the couplings BQT (scalar coupling) and BQS (pseudovector coupling). If $\hat{O}_B$ is a baryon level operator and $\hat{O}_Q$ the corresponding quark level one, the matrix element $<B|\hat{O}_B|B>$ is evaluated by the graphical equation of Fig. 5, where $C_i^{T(S)}$ are

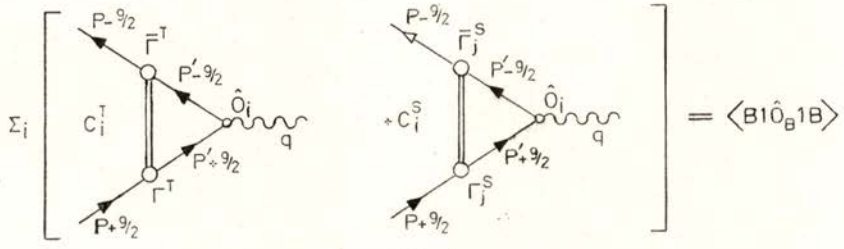


Fig. 5

products of SU(3) and SU(6) coefficients, and, apart from form factors which are supposed to be the same by SU(6), Γ^T and Γ_j^S are given by:

$$\Gamma^T = 1 \quad \text{and} \quad \Gamma_j^S = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma^5 \gamma_j$$

the factor $1/\sqrt{3}$ in Γ_j^s being a spin weighting factor. The coefficients C^T and C^S are easily determined by writing the SU(6) baryon wave function in a quark-diquark model [42]. For the proton, for instance, we have

$$P \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\sqrt{\frac{2}{3}} S_1 \mathcal{N} + \sqrt{\frac{1}{3}} S_2 \mathcal{P} \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} T_1 \mathcal{P} \qquad \text{(II. 47)}$$

where S_1, S_2 are sextet and, T_1 a triplet non-interacting

diquark, and $\mathscr{A}, \mathscr{S}$ the interacting quark (*). Multiplying the square of these coefficients by 3, since each quark can interact, we get

$$C^T_{\mathscr{A}} = 0, \qquad C^S_{\mathscr{A}} = 1 \tag{II. 48}$$

$$C^T_{\mathscr{S}} = \frac{3}{2}, \qquad C^S_{\mathscr{S}} = \frac{1}{2}.$$

For the neutron case $\mathscr{S}$ and $\mathscr{A}$ are interchanged in (II. 47) and (II. 48).

We evaluate the graphs of Fig 5 in the Breit frame of the baryon, and neglect all contributions from $\underset{\sim}{P}'$ in the numerator and from the time-like component of the S diquark. In the case of the magnetic moment calculations the quark operator will be

$$\hat{O}^{\mu}_i \equiv e_i [F_1(q^2)\,\gamma^{\mu} - i\,K_i\,F_2(q^2)\,\sigma^{\mu\nu}\,q_{\nu}] \tag{II. 49}$$

where $F_1(q^2 = 0) = F_2(q^2 = 0) = 1$. The terms linear in q give the magnetic moment and both, γ^j and $\sigma^{j\nu}$ contribute. The quark anomalous magnetic moment gives a contribution $K_i \sigma^{j\nu} q_{\nu}$ that multiplies the normalization integral which we write schematically in the form

$$I_0 = \int H(P, P', q = 0)\ (P'_0 + M)^2\, d^4 P' = 1 \tag{II. 50}$$

where form factors and denominators have been absorved in $H(P, P', q)$ and $(P'_0 + M)^2$ comes from the interacting quark propagator numerators. The electric coupling γ^j gives two contributions, one coming from the q term in the quark propagators of the form $\frac{1}{2M}\sigma^{j\nu} q^{\nu}$ which contains as a factor the integral

$$I_1 = \int H(P, P', q = 0)\ (P'_0 + M)\, 2M\, d^4 P' \tag{II. 51}$$

(*) $S_1 \equiv [\mathscr{S}\mathscr{S}]$, $S_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathscr{S}\mathscr{A} + \mathscr{A}\mathscr{S}]$, $T_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathscr{S}\mathscr{A} - \mathscr{A}\mathscr{S}]$.

and another form the q dependence of the nucleon spinors of the form $\frac{1}{2M_B}\sigma^{j\nu}q^{\nu}$ with a factor

$$I_2 = \int H(P, P', q=0)\,(P_0'^2 - M^2)\,d^4P' \qquad \text{(II. 52)}$$

From (II. 50), (II. 51), (II. 52) we have

$$I_0 = I_1 + I_2 = 1\,. \qquad \text{(II. 53)}$$

Going further into a non-relativistic situation we assume now that the average value of $P_0'^2$ in I_2 equals that of M^2, which means that the interacting quark acts effectively as if on its mass shell. This assumption is consistent with using in (II. 49) only the on mass shell couplings. Neglecting integrals in P' and equating integrals in $P_0'^2$ to integrals in M^2 we reproduce the conditions for a non-relativistic model with quarks essentially at rest and static interactions. Equation (II. 52) then gives

$$I_2 = 0 \quad \text{and} \quad I_0 = I_1 = 1\,.$$

The equation of Fig. 5 gives then the non-relativistic SU(6)--quark model results for the magnetic moments, in the form,

$$\sum_{\nu=\mathcal{N},\mathcal{P},\lambda}\left\{-\frac{1}{3}\sum_S C_\nu^S + \sum_T C_\nu^T\right\} e_\nu \mu_\nu = e\,\mu_B \qquad \text{(II. 54)}$$

where the coefficients $-\frac{1}{3}$ and 1 arise from the commutation of the Γ_S^j and γ^j or $\sigma^{j\nu}$. We note that contributions from the integral I_2 or from timelike diquark components would have spoiled the additivity rule expressed by (II. 54). In particular for the proton we have,

$$\mu_{\text{proton}} \simeq \frac{1}{2M} + K_{\mathcal{P}}\,. \qquad \text{(II. 55)}$$

The baryon axial vector weak couplings and pseudovector couplings to pseudoscalar mesons are similar to the magnetic couplings and the additivity results are derived in the same way.

In the present model the magnetic moment of the $\mathcal{N}$ and $\mathcal{A}$ quark differ from that of the $\mathcal{P}$ quark. We may write (II. 29) and (II. 30) in the form

$$K_{\mathcal{N}} = K_{\mathcal{P}}[1 + \beta] \qquad \text{(II. 56)}$$

and

$$K_{\lambda} = K_{\mathcal{P}}[1 - \alpha] \qquad \text{(II. 57]}$$

where β and α are, taking the experimental values for the vector meson masses and $\theta = 33°$, $\alpha = 0.40$ and $\beta = 0.07$. The factors α and β provide corrections to the usual non-relativistic calculations of magnetic moments. In the limit of quarks with only a anomalous magnetic moment the effect of the corrections α and β is shown in Table II. 5 ($\mu_{\text{proton}} = 2.793$).

TABLE II. 5

BARYON	Theoretical				EXPERIMENTAL
	No Correction $K_{\lambda} = K_{\mathcal{N}} = K_{\mathcal{P}}$		Correction α and β		
	μ/μ_{proton}	μ	μ/μ_{proton}	μ	
n	$-2/3$	-1.86	$-\frac{2}{3}\left(\frac{1+2/3\,\beta}{1+1/9\,\beta}\right)$	-1.93	-1.913
Λ	$-1/3$	-0.93	$-\frac{1}{3}\left(\frac{1-\alpha}{1+1/9\,\beta}\right)$	-0.57	-0.73 ± 0.16
Σ^+	1	2.793	$\frac{1-1/9\,\alpha}{1+1/9\,\beta}$	2.66	2.5 ± 0.5
Ω	-1	-2.793	$-\frac{1-\alpha}{1+1/9\,\beta}$	-1.71	?

In all cases the corrections act in the right direction and strongly reduce the magnetic moments of the Λ and Ω.

In this model other corrections could equally well have been considered, such as violations of SU (6) in the wave functions and contributions from I_2 integrals, and we have not a priori reason to neglect them compared to the α and β corrections.

5. Four body processes.

We now briefly review some of the attempts to evaluate the graph of Fig. 1 c (Page 20) and its generalisations to n external particles. The principle of the evaluation is still the same as in graphs 1.a and 1.b: the underlying structure is provided by quarks. However in addition to the vertex functions one needs to incorporate, in the case of meson processes, the $2n$ quark amplitudes. With no dynamics explicitly included, the graph of Fig. 1 c is a duality diagram of Harari and Rosner [43]. The best realization of the physics suggested by duality diagrams is the Veneziano model [15] or, in general, a dual resonance model [44]. Thus the most obvious way of evaluating the n particle amplitude T_n is by writing it in the form

$$T_n = \Gamma_{2n} \cdot B_{2n} \qquad \text{(II. 58)}$$

where Γ_{2n} describes the vertex structures, i. e., the spin, SU (3), mass breaking factors at the connections of the n mesons to the $2n$ quarks, and B_{2n} is a dual resonance model function that describes the $2n$ quark interaction. Expressions in the form of Equation (II. 58) were used by different authors in particular Bardakci and Halpern [23], Mandelstam [24] and Delbourgo and Rotelli [45]. The amplitude B_{2n} is the standard Veneziano $2n$ point function [46] for quarks. Projecting out the pole terms corresponding to the external lines the B_{2n} function can be reduced to the B_n function for mesons [24].

These models have the general properties of dual resonance models, namely they are crossing symmetric and duality constraints (Finite Energy Sum Rules) are exactly satisfied. They further have the advantage of allowing a rigorous inclusion of higher symmetries, in particular, SU (6). One could then hope to combine the successes of the Veneziano model with the

successes of the SU(6) quark model classification of resonances. Several attempts were made [47] but there remains the problem of controlling the excessive degeneracy present in dual quark models.

In fact one of the difficulties of this sort of models is that they produce parity doublets in the meson trajectories, the trajectories are doubled (pairs of particles with the same usual quantum numbers), and there is mass degeneracy for each orbital excitation ($m_\pi = m_\varrho$, for instance). The unwanted solutions can of course be simply neglected. The Carlitz and Kislinger [48] prescription to avoid parity doubing in fermion trajectories can be introduced using positive energy quark projection operators and fixed cuts in all channels. This ideia was developed by Bardakci and Halpern [49] and simplified later by Venturi [50]. In this process of refining the model, apart from the introduction of boson cuts without a clear physical meaning, the simplicity of the one (leading) term approximation is lost; cancellations between leading and non leading terms being required to achieve the eliminations of ghosts in the main trajectory.

The other important drawback of the dual relativistic quark model is its difficulty in achieving good low energy behaviour. Theoretically this corresponds to saying that soft pion limit theorems are not satisfied. This point however can be implemented by using vertex terms Γ in (II. 58) with convenient mass breaking factors. The required mass factors are basically the ones of Llewelyn Smith Model I as they appear in the vertex functions (II. 26) and (II. 27). In Refs. [23] and [24] the correct wave function for the ϱ meson is used and these models are able to reproduce the usual $SU(6)_W$ results for coupling constants. In Refs. [24] and [45] with a wave function for the π meson different from our Equation (II. 26), $\Gamma_{\pi QQ} \propto \gamma^5 \cdot (1 + P/m_\pi)$ compared to $\Gamma_{\pi QQ} \propto \gamma^5 (1 + P/m_\varrho)$, bad low energy behaviour is obtained. The improvement in the low energy behaviour with the relativistic quark model comes from the use of modified Veneziano amplitudes (free of parity doubling and with fixed cuts) and vertex structures as in Equation (II. 26) [51]. Extensions to this sort of work with applications to πN low energy scattering were recently made by Lebrun [52] and Venturi [53].

The main objection to these relativistic quark models lies probably in the fact that they are extremely complicated. Once one starts introducing extra terms to eliminate the weak points

in the original versions of the model (too much degeneracy and bad low energy behaviour) it is difficult to see how to make it of practical use. Most of the effort so far has been directed to redeviring results already known, and previously obtained in a much more straightforward manner (low energy parameters, for instance).

In the next chapters we will try to combine the ideas of duality with more conventional versions of the quark model.

CHAPTER III

Duality: Quark model at high and low energy

1. Introduction.

The aim of this chapter and the next is to understand better the quak graph for a reaction $AB \to AB$. The limitations of a quark Feynman graph interpretation of these processes were explained in the previous chapter. The successes and complications met in other attempts were also briefly discussed there.

If we draw the graph of Fig. II 1c (page 20) without showing explicitly any quark interactions, i. e., with only quark lines and no vertex functions or bound states, it becomes obviously a planar quark duality diagram ([45]). Even without any dynamics in it, this diagram can be used as an important tool in studying strong interactions. It embodies the key idea of duality ([54]) that resonances in one dhannel are connected with exchange of particles in the crossed channel. Experimentally the existence or non-existence of a planar duality diagram has an observable consequence ([55]). When we are allowed to draw a planar diagram the total cross section, σ^T_{AB}, shows an appreciable energy dependence, bumps first, followed by a smooth falling curve as energy increases. When no quark diagram exists the cross-sections become roughly flat at very low energies (no bumps and no falling down curve). This connection between cross section behaviour and duality diagrams is fully obeyed experimentally.

At high energy, lab. energy $\simeq 30\,GeV$ in πN and KN processes, all cross sections tend to become constant (or slightly increasing with energy) regardless of the existence of a duality

diagram. Thus at sufficiently high energy, probably all cross sections become similar in their dependence on the energy. We can then distinguish two components in the cross sections and are thus in this way led to the Freund-Harari conjecture [56]: the cross section σ^T_{AB} can be described by two independent terms, one, given by the duality diagram $AB \to AB$ supplies the energy dependence, the other, Pomeranchuk-like term, gives the energy independent contribution.

The relation between duality diagrams and energy dependence of cross sections allows a Regge pole model interpretation in terms of degeneracy of exchanged particle trajectories. However the Regge pole model is too restrictive. A duality relation, valid for the imaginary part of the amplitudes, in that model imposes, as the phase is precisely defined, constraints in the real part of the amplitude. However the presence of strong cuts may spoil the Regge asymptotic phases and thus the relations involving the real parts of amplitudes derived from duality for the imaginary parts may become invalid. Failures of exchange degeneracy applied to differential cross sections in inelastic processes, for instance

$$K^- P \to \pi^- \Sigma^+ \quad \text{and} \quad \pi^+ P \to K^+ \Sigma^+$$

are well known [57]. There are not such failures of the quark diagram tests of duality. For instance the cross section for $(K^+ p)$ and $(K^+ n)$ are roughly similar and show no important energy dependence at least up to $60\,GeV$, $\mathrm{Im}\,(K^+ n \to K^0 p)$ seems to be zero [58] as expected from the non existence of a legal diagram. It would be interesting to check the prediction $\mathrm{Im}\,(K^- p \to \Sigma^+ \pi^-) = 0$ because this is one of the reactions where Regge exchange degeneracy fails.

We will thus apply duality only to the imaginary part of the amplitude. The real part can in principle be determined as usual from dispersion relations. The quark model determines parameters required to describe the imaginary part of the amplitude, coupling constants at low energy and relations between cross sections at high energy. This information used in dispersion relations gives us the real part of the amplitudes.

We have seen in the last chapter how quark model in our relativistic version can be applied to determine coupling cons-

tants. We will discuss in Section III. 2 how quark model can be applied at high energy, basically using the idea of additivity ([59, 60, 9]). These low energy and high energy quark model calculations are apparently unconnected. However if duality works these calculations cannot be independent. This is what we show, first in a qualitative way, in Section III. 3, introducing the idea of additivity of quark-hadron duality diagrams. Quantitative predictions are given in Chapter IV.

Using information only from quark model calculations we develop a crude model for the imaginary part of the scattering amplitude in a reaction $A+B \to A+B$. The model simply states that at low energy we have the p wave resonances corresponding to the $L=0$ orbital excitations of the SU(6) quark model and the remainder is a continuous high energy curve to which the additivity relations apply. Such a model, supplemented with a factorization assumption in the high energy curve, is used to evaluate current algebra sum rules (Section III. 3) and dispersion relations (Section III. 4).

2. Additivity and duality.

In the high energy region, i. e., region where the cross sections become smooth functions of the energy, the additivity assumption as introduced in Refs. [59] and [60] states that for forward scattering the amplitude $T_{AB}(s, t \simeq 0)$ for AB scattering is simply given by the sum of all possible two body quark-quark and quark-antiquark contributions:

$$\text{Im } T_{AB}(s,t) = \sum_{ij} \text{Im } T_{ij}(s,t) \qquad \text{(III. 1)}$$

where T_{ij} is the amplitude for the scattering of quark i from A by quark j from B. Relation (III. 1) corresponds to the impulse approximation and is expected to be valid only near $t=0$, where multiple scattering can be neglected.

To introduce in the high energy quark model formalism the Freund-Harari conjecture we write

$$T_{ij} = T_{ij}^{P} + T_{ij}^{E} \delta_{i\bar{j}} \qquad \text{(III. 2)}$$

where T^P gives a flat contribution to the cross section and T^E gives the energy dependent part. By $\bar{j}$ we represent the antiparticle of quark j. In first approximation we assume the validity of SU(3): $T^P_{ij} = T^P$, $T^E_{ij} = T^E$. The energy independent part of the cross section for AB scattering is, from (III. 1) and (III. 2), proportional to the number of pairs of quark lines, i, j present in the process. This prescription gives immediately the famous ratios:

$$\lim_{s\to\infty} [\sigma^T(pp) : \sigma^T(p\pi) : \sigma^T(\pi\pi)] = 9 : 6 : 4 \qquad \text{(III. 3)}$$

The energy dependent part of the cross section exists only when there are quark-antiquark annihilations in the s channel.

The superscripts P and E in T^P and T^E are suggested from the language of Regge poles: P stands for Pomeranchuk and E for Exchange of particles. In our discussion we leave out Pomeranchuk type of contributions. If, when computing the energy dependent term instead of counting quark-antiquark annihilations we rearrange the $Q\bar{Q}$ pairs to form mesons and sum over these mesons our model with additivity becomes a particle exchange model. It is then not surprising that additivity with prescription (III. 2) can be made equivalent to an exchange model with Pomeran and particles being exchanged in t channel [61]. If we take meson-baryon (MB) scattering, an exchange model, say Regge Model, with Pomeran, vector and tensor mesons in t channel, with SU(3) and pure F coupling applied at the vertices gives the same relations between cross sections as quark model additivity. For example, in πN and KN scattering the use of equation (III. 2) provides the following relations:

$$f_{Nf_0} = f_{N\omega} \qquad \text{(III. 4)}$$

$$f_{NA_2} = f_{N\varphi} \qquad \text{(III. 5)}$$

$$f_{N\omega} = 3 f_{N\varphi} \qquad \text{(III. 6)}$$

where $f_{NV(T)}$ represents the imaginary part of the (MB) amplitude corresponding to t channel exchanges with the quantum numbers of vector (tensor) meson $V(T)$. Equations (III. 4) and (III. 5) are the usual relations for exchange degeneracy of opposite parity vector and tensor mesons. Equation (III. 6), a usual

quark model or SU(3) with pure F coupling relation, shows that exchange degeneracy does not occur for vector (or tensor) mesons of opposite G parity.

So far we have not used the concept of non exotic states, i. e., states which from the point of view of SU(3) belong to the $\underline{3}\times\overline{\underline{3}}$ (Mesons) and $\underline{3}\times\underline{3}\times\underline{3}$ (Baryons) representations (Equations (I. 1) and (I. 2)). In connection with duality, in particular with the idea that exotics in the s channel correspond to exchange degeneracy in t channel, the above classification can be sucessfully applied in scattering of mesons by other mesons or baryons. However for $B\overline{B}$ scattering the connection between s channel resonances and t channel exchanges certainly needs to be reinterpreted [62]. At the same time one may wonder about the validity of the exchange part of Equation (III. 2) in $B\overline{B}$ scattering when simultaneous $Q\overline{Q}$ annihilations can take place [63,64]. Because of these difficulties from now on we only consider scattering processes with at least one of the particles being a meson.

Now we look at additivity from a slightly modified point of view. The mesons are seen as some elementary quanta of a field used to investigate the quark structure of hadrons. We thus apply additivity by counting basic (MQ) amplitudes. From the πN and KN additivity (exchange model) relations without Pomeron term we derive for the MQ amplitudes $(Q\equiv\mathcal{N},\mathcal{S},\lambda)$ expressions like:

$$3(K^-\mathcal{S})=\frac{1}{2}(f_{Nf_0}+f_{N\omega})+\frac{3}{2}(f_{N?}+f_{NA_2}) \qquad \text{(III. 7)}$$

$$3(K^+\mathcal{S})=\frac{1}{2}(f_{Nf_0}-f_{N\omega})+\frac{3}{2}(-f_{N?}+f_{NA_2}) \qquad \text{(III. 8)}$$

$$3(K^+\mathcal{N})=\frac{1}{2}(f_{Nf_0}-f_{N\omega})+\frac{3}{2}(f_{N?}-f_{NA_2}) \qquad \text{(III. 9)}$$

$$3(K^-\mathcal{N})=\frac{1}{2}(f_{Nf_0}+f_{N\omega})-\frac{3}{2}(f_{N?}+f_{NA_2}) \qquad \text{(III. 10)}$$

$$3(\pi^+\mathcal{S})=f_{Nf_0}-3f_{N?} \qquad \text{(III. 11)}$$

$$3(\pi^-\mathcal{S})=f_{Nf_0}+3f_{N?} \qquad \text{(III. 12)}$$

We notice that Equations (III. 7) to (III. 12) are written in a form that allows them to be interpreted in the sense of Finite Energy Sum Rules[65] (FESR), i. e., in both sides we have the same quantity but in the left hand side written as an s channel process and in the right hand side as a t channel exchange. What we show next is that Equations (III. 7) to (III. 12) are duality consistent, resonances and particle exchanges being interrelated. To see that we remark first that once we treat basic quark interactions with mesons we are effectively considering the quark representation states as non exotic extending in this way the field of the allowed representations: $Q\bar{Q}$, QQQ and Q. From SU(3) the fictitious process $MQ \to MQ$ has the decomposition:

$$\underline{8} \times \underline{3} = \underline{3} + \underline{15} + \overline{6}$$

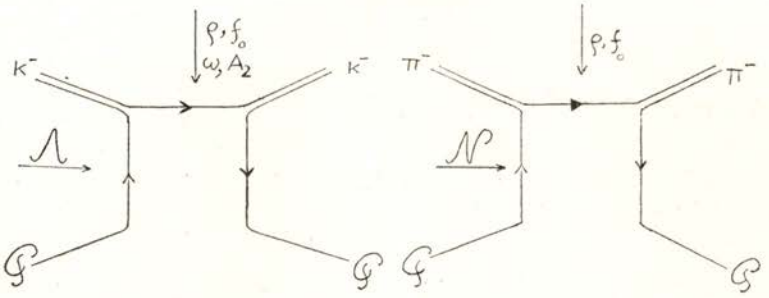
and the only possible resonances must belong to the quark representation, i. e., must have one of the following sets of quantum members:

$$I = 1/2, \quad I_Z = \pm 1/2, \quad Y = 1/3, \quad S = 0$$
$$I = 0, \quad I_Z = 0, \quad Y = -2/3, \quad S = -1.$$

We can now analyse Equations (III. 7) to (III. 12) as FESR's. The left hand sides of relations (III. 7) and (III. 12) allow s channel resonances, the right-hand sides show a non vanishing contribution. The left hand sides of (III. 8) and (III. 9) are exotic: $(K^+\mathscr{P})$ and $(K^+\mathscr{N})$ have $S = +1$. The right hand sides show vanishing contributions from the exchange degeneracy relations (III. 4) and (III. 5). Note that the isospin equivalent processes at nucleon level, (K^+p) and (K^+n), are also exotic and exchange degeneracy also makes the right hand side of the corresponding sum rule vanish. The left hand sides of Equations (III. 10) and (III. 11) are exotic, $(K^-\mathscr{N})$ has $I = 1$ and $(\pi^+\mathscr{P})$ has $I = 3/2$. The right hand sides because of exchange degeneracy and relation (III. 6) also vanish. At nucleon level, (K^-n) and (π^+p) processes, the s channel is not exotic (Σ resonances in one case and Δ resonances in the other), and the exchange contributions are also non-vanishinh. The extra exchange degeneracy that occurs at quark level because of the equality of the quark couplings to

isoscalar and isovector particles is reflected back in the absence of resonances in the $I=1$ and $I=3/2$ channel.

These results can be visualized if one thinks in terms of (s,t) duality diagrams, the ones that refer to forward scattering and can thus be related to additivity. We are allowed to draw



a b

Fig. 1

them only for the processes where s channel resonances and t channel particle exchanges occur, $(K^- \mathcal{P})$ and $(\pi^- \mathcal{P})$, Equations (III. 7) and (III. 12). These are shown in Figs. (1. a, b).

If we now come back to MB and MM scattering we immediately note that the MB (or MM) (s,t) duality diagram can

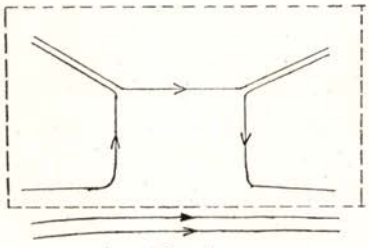


Fig. 2

be obtained by summing MQ duality graphs in the presence of quark lines (Fig. 2).

The important thing Fig. 2 is telling us is that additivity can be interpreted as additivity of MQ duality diagrams. Being primarily a concept valid at high energy additivity can thus be extended to the low energy region provided we find a convenient

F.E.S.R. that allows the comparison of high energy to low energy parameters. The problem of extracting quantitative predictions from the suggestive Fig. 2 is discussed in chapter IV. We need first to develop a model to evaluate the imaginary part of MM and MB scattering amplitudes. At te same time a deeper understanding of dual resonance models is required before turning back to that problem.

3. Current Algebra Sum Rules.

We introduce now a model to evaluate the imaginary part of the amplitude T^E_{AB} in the forward direction. It simply states:

(*i*) at low energy Im T is given by contributions from the SU(6) quark model $L=0$ states (first p wave resonances)

(*ii*) at high energy, i. e., above the first resonances, Im T satisfies the quark model additivity relations.

This is, of course, a very crude model but it has the advantage of incorporating the basic information given by quark model. The coupling constants required from (*i*) are evaluated using, for instance, the techniques developed in chapter II. The energy dependence of Im T at high energy is not determined in quark model (contrary to Regge model that predicts Im $T \sim s^{\alpha(t)-1}$) and we will extrapolate, when required, high energy experimental fits. As the model is constructed only for the resonance-exchange part of the amplitude when using (*ii*) to evaluate, for example, dispersion integrals, we must subtract the Pomeron exchange term.

We have already referred to the equivalence of using quark model additivity or an exchange model at high energy. When comparing two processes, πN to ρN, say, it is then natural to introduce a third assumption in our model:

(*iii*) at high energy the imaginary parts of the amplitudes for different processes are related by factorization.

With our model for Im T, using (*i*), (*ii*) and (*iii*) we evaluate some Current Algebra Sum Rules, first for quark reactions and after for nucleon reactions.

To generate Current Algebra Sum Rules there exists a general procedure:(66) sandwich the commutator of two operators (local or integrated operators) between two states, insert intermediate states and separate Born terms (i. e. one particle intermediate state), from physical region contributions. In general the sum rules have the structure:

$$(\text{Isospin factor}) = (\text{Born}) + (\text{Continuum})$$

and the (Continuum) is an integral containing the imaginary part of an amplitude. This term can also be considered as the dispersion integral for the amplitude evaluated at $\nu \equiv \left(\frac{s-u}{4M}\right) = \nu_{\text{Born}} = 0$.

To start we write the Adler-Weisberger (67, 68) sum rule for πQ scattering in the standard form given above:

$$1 = g_{AQ}^2 + F_\pi^2 G(0) \qquad \text{(III. 13)}$$

with

$$G(0) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_{\text{th}}}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} [\sigma_- - \sigma_+] \qquad \text{(III. 14)}$$

where $F_\pi = 0.85\, m_\pi$ is the π annihilation parameter as given by the Goldberger-Treiman relation and $[\sigma_- - \sigma_+]$ is the difference of the $(\pi^- \mathcal{P})$, $(\pi^+ \mathcal{P})$ total cross sections. The low energy contribution to the sum rule, contribution type (*i*), is explicitly shown in the Born term amplitude g_{AQ}^2. For the high energy contribution, type (*ii*), we use additivity,

$$\sigma(\pi^- \mathcal{P}) - \sigma(\pi^+ \mathcal{P}) = \sigma(\pi^- p) - \sigma(\pi^+ p) \qquad \text{(III. 15)}$$

and, to evaluate (III. 14), an experimental fit to πN scattering (69) (units of m_π):

$$[\sigma_- - \sigma_+] = 1.70\, \nu^{-0.7} \qquad \text{(III. 16)}$$

For simplicity we do not consider possible Pomeranchuk theorem violating terms. In strongly convergent sum rules, as the Adler-Weisberger relation, these terms are not important (70). From Equations (III. 16), (III. 14) and (III. 13) we obtain $g_{AQ} = 0.67$ to be compared to the additivity value $g_{AQ} \simeq 0.707$. We interpret

these numbers as meaning that the model is not unreasonable and adjust $G(0)$ to reproduce the additivity result for g_{AQ}:

$$G(0) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{F_\pi^2} \tag{III. 17}$$

We consider next a sum rule for quark Compton scattering, the Cabibbo-Radicati sum rule ([71]). Using again additivity — the photon has a $\bar{Q}Q$ structure in Quark-Model — we write the sum rule in the form:

$$0 = -K_1'^V(0) + \frac{1}{2}(K_2^V(0))^2 + \frac{1}{f_\varrho^2}\,G(0) \tag{III. 18}$$

where K_1^V and K_2^V are the Dirac and Pauli electromagnetic form factors,

$$K_1'^V(0) = \frac{\partial}{\partial t}\,K_1^V(t)\,|_{t=0} \simeq 1/m_\varrho^2 \quad \text{and} \quad K_2^V(0) \simeq 1/m_\varrho .$$

From (III. 17) and (III. 18) we derive the KSFR relation ([38]);

$$f_\varrho F_\pi = m_\varrho . \tag{III. 19}$$

Similarly for the neutral pion photoproduction sum rules of Fubini, Furlan, Rosseti ([72]) we have

$$0 = -\frac{1}{2}K^V + \frac{M}{g_Q}A_1^{(+)}(0) \tag{III. 20}$$

$$0 = -\frac{1}{2}K^S + \frac{M}{g_Q}A_1^{(0)}(0) \tag{III. 21}$$

were $A_1^{(+)}$ and $A_1^{(0)}$ are CGLN ([73]) amplitudes. Writing dispersion relations for $A_1^{(+)}(0)$ and $A_1^{(0)}(0)$ and considering again only the Regge type of contributions, the $A_1^{(+)}$ amplitude will be dominated by ω exchange and $A_1^{(0)}$ by ϱ exchange. Quark model additivity immediately gives for the ratio (III. 20) to (III. 21)

$$f_\varrho^{-1}/f_\omega^{-1} = -3 \tag{III. 22}$$

the usual SU(3) relation. Relating $A_1^{(+)}(0)$ to $G(0)$ by factorization and assuming that the ratio of the residues of off mass shell particles is the same as when they are on the mass shell we derive [74],

$$A_1^{(+)}(0) = \frac{1}{2 f_\varrho^2} m_\varrho^2 g_{\varrho\omega\pi} K^V G(0). \qquad \text{(III. 23)}$$

Combining (III. 23), (III. 20), (III. 17) and (III. 19) we obtain a well known $SU(6)_W$ result [40]:

$$g_{\varrho\omega\pi} = \frac{2}{m_\varrho} f_\varrho. \qquad \text{(III. 24)}$$

These SU(6) type of results, Equations (III. 24), (III. 22) and (III 19) come from simultaneous manipulations, through our model, of low energy and high energy quark model calculations. This overall SU(6) consistent picture can only be understood in terms of duality as will be shown in chapter IV.

With our model, i. e., as specified in conditions (*i*), (*ii*) and (*iii*), we evaluate the same set of sum rules — Adler-Weisberger, Cabibbo-Radicati, Fubini et al. sum rules — for nucleon targets. The results are summarized in Table III. 1.

TABLE III. 1

Current Algebra Sum Rules for nucleon target
Evaluation using prescription (*i*), (*ii*) and (*iii*)

Sum Rule		L. H. S.	R. H. S.				References to detailed evaluations
			Born term	Δ (1236)	High Energy	Total	
Adler-Weisberger		1	$+1.50$	-1.06	$+0.5$	0.94	[67, 68]
Cabibbi-Radicati		0	$+0.140/m_\varrho^2$	$-0.819/m_\varrho^2$	$+0.5/m_\varrho^2$	$-0.179/m_\varrho^2$	[71, 75]
Fubini et al.	$A_1^{(+)}$	0	$-1.85/(2m_N)$	$+1.55/(2m_N)$	~ 0	$-0.30/(2m_N)$	[72, 76]
	$A_1^{(0)}$	0	$+0.06/(2m_N)$	0	$-0.7/(2m_N)$	$-0.54/(2m_N)$	

Except for the last sum rule the terms in the right hand side tend to compensate among themselves and reproduce the left hand side value. The agreement is particularly good for the Adler-Weisberger relation. In the photoproduction sum rule for isoscalar photons the high energy term is too large. This is not a surprise because in photoproduction we also have exchanges of unnatural parity particles (B meson) and our model only takes into account natural parity exchanges. A break of the factorization assumption in photoproduction may also explain the bad agreement in this case.

4. Low energy parameters.

In this section we use our ansatz for the imaginary part of the amplitude to compare current algebra predictions and dispersion relation calculations of low energy parameters. We first establish a bridge between dispersion relations and current algebra showing that combining the usual dispersion relations with an expansion of the amplitude in the variable ν we simulate, working on mass shell, current algebra results: the Adler-Weisberger relation ([67, 68]) and the Adler self-consistent condition ([77]).

Let us consider the helicity non flip amplitude at $t=0$ for πN scattering $\left(\text{in general } \pi T \text{ scattering, } T \text{ with spin } \frac{1}{2}\right)$,

$$A'(\nu, t=0) = A(\nu, 0) + \nu B(\nu, 0) \qquad \text{(III. 25)}$$

where A and B are the usual invariant amplitudes ([78]). We assume that $A'(\nu, 0)$ can be expanded around $\nu=0$ in a power series in ν. The scale is set up by the target mass m_N, i. e., the expansion is valid for $\nu/m_N \ll 1$. As we are interested in the amplitude at threshold, $(\nu = m_\pi) > (|\nu_B| = m_\pi^2/2\, m_N)$ the expansion cannot be valid for Born terms. Thus before expanding we separate out the Born term, B_b, and apply the expansion in ν only for the non pole part of the amplitude, $\bar{A}'$

$$A'(\nu, t) = \bar{A}'(\nu, t) + \nu B_b(\nu, t) \qquad \text{(III. 26)}$$

with

$$\bar{A}'(\nu, t) = A(\nu, t) + \nu \bar{B}(\nu, t) . \qquad \text{(III. 27)}$$

We expand now (III. 27):

$$\bar{A}'(\nu, 0) = \bar{A}'(0) + \left.\frac{\partial \bar{A}'(\nu)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} \nu + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 \bar{A}'(\nu)}{\partial \nu^2}\right|_{\nu=0} \nu^2 + \cdots . \qquad \text{(III. 28)}$$

It is convenient to treat separately the s, u crossing even, $A'^{(+)}$, and crossing odd $A'^{(-)}$ amplitudes. For the $A'^{(+)}$ amplitude we have:

$$\bar{A}'^{(+)}(\nu) = A^{(+)}(0) + \left[\frac{\partial \bar{B}^{(+)}}{\partial \nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A^{(+)}}{\partial \nu^2}\right]_{\nu=0} \nu^2 + O(\nu^4) \qquad \text{(III. 29)}$$

and, in particular for $\nu = m_\pi$

$$4\pi \left(1 + \frac{m_\pi}{m_N}\right) a_0^{(+)} = A^{(+)}(0) + m_\pi B_b^{(+)}(m_\pi) + \left[\frac{\partial \bar{B}^{(+)}}{\partial \nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A^{(+)}}{\partial \nu^2}\right]_{\nu=} m_\pi \qquad \text{(III. 30)}$$

where a_0 is the s wave scattering length.

For then $A'^{(-)}$ amplitude we have:

$$\bar{A}'^{(-)}(\nu) = \left[\bar{B}^{(-)} + \frac{\partial A^{(-)}}{\partial \nu}\right]_{\nu=0} \nu + O(\nu^3) \qquad \text{(III. 31)}$$

and

$$4\pi \left(1 + \frac{m_\pi}{m_N}\right) a_0^{(-)} = B_b^{(-)}(m_\pi)\, m_\pi + \left[\bar{B}^{(-)} + \frac{\partial A^{(-)}}{\partial \nu}\right]_{\nu=0} m_\pi \qquad \text{(III. 32)}$$

Now we use the dispersion relations for the A and B amplitudes to evaluate the right hand sides of (III. 30) and (III. 32). Following Hamilton and Woolcock [79] we make a subtraction only for the $A^{(+)}$ amplitude. One then has:

$$\mathrm{Re}\, A^{(+)}(\nu) = A^{(+)}(0) + \frac{2}{\pi}\nu^2 \int_{m_\pi}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'^2}\nu' \frac{\mathrm{Im}\, A^{(+)}(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2} \qquad \text{(III. 33)}$$

$$\mathrm{Re}\, \overline{B}^{(+)}(\nu) = \frac{2}{\pi}\int_{m_\pi}^{\infty} d\nu'\, \nu \frac{\mathrm{Im}\, B^{(+)}(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2} \qquad \text{(III. 34)}$$

$$\mathrm{Re}\, A^{(-)}(\nu) = \frac{2}{\pi}\int_{m_\pi}^{\infty} d\nu'\, \nu \frac{\mathrm{Im}\, A^{(-)}(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2} \qquad \text{(III. 35)}$$

$$\mathrm{Re}\, \overline{B}^{(-)}(\nu) = \frac{2}{\pi}\int_{m_\pi}^{\infty} d\nu'\, \nu' \frac{\mathrm{Im}\, B^{(-)}(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2} \qquad \text{(III. 36)}$$

and

$$B_b^{(+)}(\nu) = (4\pi)\frac{4 m_N}{m_\pi^2} f^2 \frac{\nu}{\nu_B^2 - \nu^2} \qquad \text{(III. 37)}$$

$$B_b^{(-)}(\nu) = (4\pi)\frac{4 m_N}{m_\pi^2} f^2 \frac{\nu_B}{\nu_B^2 - \nu^2}\,. \qquad \text{(III. 38)}$$

From Equations (III. 33) to (III. 36) one immediately obtains:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A^{(+)}}{\partial \nu^2}\bigg|_{\nu=0} = \frac{2}{\pi}\int_{m_\pi}^{\infty}\frac{d\nu'}{\nu'^3}\mathrm{Im}\, A^{(+)}(\nu') \qquad \text{(III. 39)}$$

$$\frac{\partial \overline{B}^{(+)}}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=0} = \frac{2}{\pi}\int_{m_\pi}^{\infty}\frac{d\nu'}{\nu'^2}\mathrm{Im}\, B^{(+)}(\nu') \qquad \text{(III. 40)}$$

$$\frac{\partial A^{(-)}}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=0} = \frac{2}{\pi}\int_{m_\pi}^{\infty}\frac{d\nu'}{\nu'^2}\mathrm{Im}\, A^{(-)}(\nu') \qquad \text{(III. 41)}$$

$$\mathrm{Re}\, \overline{B}^{(-)}(0) = \frac{2}{\pi}\int_{m_\pi}^{\infty}\frac{d\nu'}{\nu'}\mathrm{Im}\, B^{(-)}(\nu'). \qquad \text{(III. 42)}$$

Neglecting at $\nu^2 = m_\pi^2$, ν_B^2 in the denominators of the Born terms, and using Equations (III. 37) to (III. 42) in (III. 29) and (III. 31) we obtain:

$$4\pi\left(1+\frac{m_\pi}{m_N}\right)a_0^{(-)}=(4\pi)\frac{2}{m_\pi}f^2+ \qquad \text{(III. 43)}$$

$$+\frac{2}{\pi}m_\pi\int_{m_\pi}^{\infty}\frac{d\nu'}{\nu'^2}\,\mathrm{Im}\,A'^{(-)}(\nu')\,d\nu'$$

$$4\pi\left(1+\frac{m_\pi}{m_N}\right)a_0^{(+)}=A^{(+)}(0)-(4\pi)\frac{4m_N}{m_\pi^2}f^2+ \qquad \text{(III. 44)}$$

$$+\frac{2}{\pi}m_\pi^2\int\frac{d\nu'}{\nu'^3}\,\mathrm{Im}\,A'^{(+)}(\nu')\,d\nu'.$$

Equation (III. 43) is formally identical to the Adler-Weisberger relation ([67, 68]) with Weinberg's expression for the scattering lengths ([80]). Equation (III. 44), we will see, leads to a on shell Adler condition ([77]). Equations (III. 43) and (III. 44) are first order approximations to the dispersion relations for $A'^{(-)}$ and $A'^{(+)}$ and the connection between these relations and current algebra results was already noticed in Ref. [81].

We thus take the point of view that the current algebra approximation is equivalent to a on shell treatment with an expansion of the amplitudes around the point $\nu\simeq 0$, $t\simeq 0$. To see how good the approximation is we have plotted in Graph 3 $\bar{A}'^{(\pm)}$ against (ν/m_π) using the recent Nielsen's tables ([82]) for amplitudes in the unphysical region. With our expansions in ν we require a linear dependence on ν for $\bar{A}'^{(-)}$ [Equation (III. 31)], and a parabolic one for $\bar{A}'^{(+)}$ [Equation (III. 29)]. The straight line

$$\bar{A}'^{(-)}(\nu)=-0.66\,\nu \qquad \text{(III. 45)}$$

and the parabola

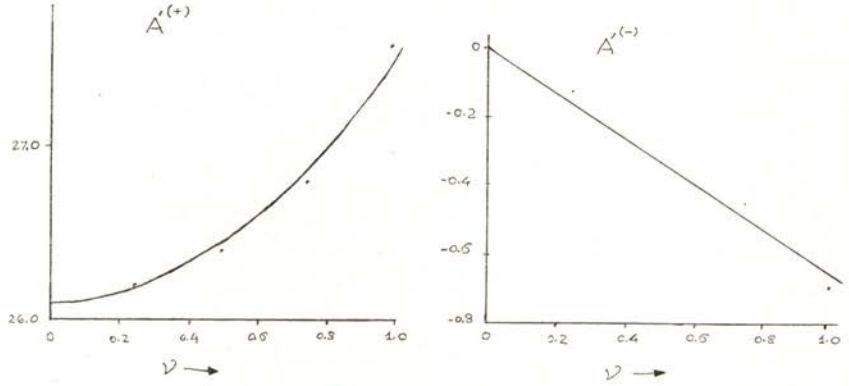
$$\bar{A}'^{(+)}(\nu)=26.1+1.4\,\nu^2 \qquad \text{(III. 46)}$$

fit reasonably well the tabulated points.

To determine low energy parameters, s and p waves scattering lengths, we need to evaluate the amplitudes at threshold. For the s wave scattering lengths we have Equations (III. 43) and (III. 44) and for p waves the relation

$$\frac{1}{2m_N}\,\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Re}\,[m_\pi B^I(m_\pi,0)]=(a^I_{1-}-a^I_{1+})+\frac{m_\pi}{4m_N^2}a^I_0 \qquad \text{(III. 47)}$$

where I stands for isospin, $a_{1\pm}$ are the p wave scattering lengths, $l=1$, $j=l\pm 1/2$. For the calculations we use Equations (III. 37) to (III. 42). The left hand sides (L. H. S.) and subtraction constants were evaluated from the fits to Nielsen's tables [Fig. 3 and similar curves to the $\bar{B}$ amplitudes]. The first p wave resonances, $N(938)$ — Born term — and $\Delta(1236)$ were expli-



$A'^{(+)}(\nu)$ and $A'^{(-)}(\nu)$ in the unphysical region
$t=0$, $0\leqslant\nu\leqslant 1$ $(m_\pi=1)$

Fig. 3

citly evaluated. For the high energy part of the (—) amplitude we used our ansatz with Equation (III. 17) and factorization, i. e.,

$$\operatorname{Im} A'(\nu):\operatorname{Im}(\nu B(\nu)):\operatorname{Im} A(\nu)=1:(1+k^V):(-k^V) \qquad \text{(III. 48)}$$

In Table III. 2 we show the results of our calculations and, for comparison, the high energy contribution required to satisfy exactly the equations, i. e., to have L. H. S. = R. H. S.

We note that for all the (+) amplitudes almost complete saturation occurs with the inclusion of the N and $\Delta(1226)$. A philosophy of resonance saturation for the $A^{(+)}$, $B^{(+)}$ and $A'^{(+)}$ amplitudes is then adequate and there is no need of knowing the high energy behaviour to estimate low energy parameters. In particular from the $A'^{(+)}$ amplitude we have approximately

$$A^{(+)}(0)\simeq\frac{g^2}{m_N}$$

an on shell version of the Adler condition.

TABLE III.2

Amplitude		Equation	L. H. S.	R. H. S.				
				Constant	Born term	$\Delta(1236)$	High Energy Contribution	
							required to have R. H. S. = L. H. S.	Predicted
$\frac{1}{4\pi}$ A	(+)	III. 33	$\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.190$	$\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.156$	/	$\frac{2m_N}{m_\pi^2}(0.0377)$	$-\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.004$	/
	(−)	III. 35	$-\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.732$	/	/	$-\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.588$	$-\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.144$	$-\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.137$
$\frac{m_\pi}{4\pi}$ B	(+)	III. 34	$-\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.191$	/	$-\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.162$	$-\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.0317$	$\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.003$	/
	(−)	III. 36	$\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.840$	/	$\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.162$	$\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.495$	$\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.183$	$\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.174$
$\frac{1}{4\pi}$ A′	(+)	III. 44	$-\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.001$	$\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.156$	$-\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.162$	$\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.0060$	$\left(\frac{2m_N}{m_\pi^2}\right)0.001$	/
	(−)	III. 43	$\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.108$	/	$\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.162$	$-\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.093$	$\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.039$	$\left(\frac{1}{m_\pi}\right)0.037$

For the (—) amplitudes in all cases the high energy curve gives an important contribution. The quantities predicted by our ansatz agree well with the quantities required to satisfy exactly the equations. The agreement for the $A'^{(-)}$ amplitude is not surprising because the corresponding equation is the Adler-Weisberger relation which we have checked before. More interesting is the check of factorization for the imaginary part of the amplitudes (Equation (III. 48). Our model gives for the ratios of the high energy contributions,

$$A'^{(-)} : \nu B^{(-)} : A^{(-)} = 1 : 4.7 : (-3.7)$$

in excellent agreement with the ratios obtained from the high energy contributions required to exactly satisfy Equations (III. 35), (III. 36) and (III. 43):

$$= 1 : 4.69 : (-3.7).$$

It is now obvious that our simple ansatz can give correct predictions of s and p wave scattering lengths in πN scattering [using Equations (III. 43), (III. 44) and (III. 47) and taking the various contributions from Table III. 2]. A more detailed discussion of the πN case is contained in Ref. [21]. Using p wave resonance saturation for the (+) amplitudes and applying quark model additivity and factorization for the high energy part of the (—) amplitudes we can evaluate low energy parameters in other meson-baryon scattering processes. For the s wave scattering length, having in mind the Adler condition, the values obtained are close to the Weinberg's formula, as we will see in chapter IV. In Table III. 3 we show the predicted values for the p wave scattering length combination, $(a_1^{(-)} - a_1^{(-)})$, $I_t = 1$ in $\pi N, \pi \Sigma$ and $\pi \Xi$ scattering. The $I_t = 0$ scattering lengths are simply given in our model by the first p wave resonance contributions.

For completeness we include in Table III. 4 the set of low energy parameters, s and p wave scattering lengths and s wave effective ranges, for the hypothetical πQ scattering. They were obtained in Ref. [21] using dispersion relations. The high energy contributions were evaluated using additivity and experimental fits to πN scattering.

TABLE III. 3

$(a_{1-}^{(-)} - a_{1+}^{(-)})$ p-wave scattering lengths

Process	Prediction	Experiment
πN	$+0.061$	$+0.057$
$\pi \Sigma$	$+0.000$	?
$\pi \Xi$	-0.024	?

TABLE III. 4

Low Energy Parameters in πQ scattering (*)
$(m_\pi = 1,\ f_Q^2 \simeq 0.029)$

			Isospin Combination	
			(+)	(−)
s wave	Scatt. Lengths		~ 0	$+4 f_Q^2$
	Effective Range		$+2.24 f_Q^2$	$+f_Q^2$
p wave	Scatt. Lengths	$l+1/2$	$+\frac{2}{3} f_Q^2$	$-0.79 f_Q^2$
		$l-1/2$	$-\frac{4}{3} f_Q^2$	$-0.38 f_Q^2$

(*) f_Q is the $QQ\pi$ pseudovector coupling constant: $f_Q^2 = \frac{g_Q^2}{4\pi}\left(\frac{m_\pi}{2 M_Q}\right)^2$

Before ending this chapter let us comment on the current algebra techniques to predict low energy parameters ([80, 83, 84]). In the *PCAC* treatment one expresses the off mass shell amplitude as a sum of two terms, one, direct term, corresponds to the scattering of axial vector currents by an on mass shell target, the other is the current algebra commutator term. Discussing the various ways in which this scheme can be applied, in particular the difficulties related to mass extrapolations, Huang and Urani ([85]) arrived to the conclusion that the scheme is in fact equivalent to a full on the mass shell treatment with s channel resonances *and* a ϱ exchange term.

Comparing the current algebra predictions on low energy parameters in πN scattering to the rigorous calculations based on dispersion relations ([79, 86]) one observes that they roughly agree when *either* one or other of the above terms is dominant but discrepancies occur when both give important contributions. For instance the commutator alone (or a ϱ exchange term alone) ([87]) gives a good prediction in the determination of the «universal» $a_0^{(-)}$ scattering length,

$$a_0^{(-)} \simeq \frac{1}{4\pi}\left(\frac{f_\varrho}{m_\varrho}\right)^2. \qquad \text{(III. 49)}$$

Note that Equation (III. 43) with our ansatz also gives this value. Working for simplicity in the πQ case, the Born term alone gives

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{2}\,(g_{QQ}/M)^2 \simeq \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{2}\left(\frac{f_\varrho}{m_\varrho}\right)^2$$

and the high energy part, Equation (III. 17), gives the same quantity. Putting the two contributions together we recover (III. 49). Another good current algebra prediction is in the $a_{1-}^{(+)}p$ wave scattering lengths where direct term saturation alone gives a good result. This is related to the fact that dispersion relations for (+) amplitudes are, as we have seen, well satisfied with a few s channel resonances (N and $\Delta(1236)$).

However current algebra predictions are in strong disagreement with dispersion relations in the case of the $a_{1-}^{(-)}p$ wave scattering length where both direct and ϱ exchange term contribute appreciably. The reason for this disagreement is that effec-

tively double counting occurs adding s and t channel terms. To determine the $a_{1\pm}^{(-)} p$ wave scattering lengts we need Equation (III. 36) for the real part of the B amplitude. In the current algebra treatment of the ρ exchange term factorization is applied to the real part of the amplitude, i. e.,

$$\mathrm{Re}\,[m_\pi B^{(-)}(m_\pi, 0)]_\rho = (1 + k^V)\,[\mathrm{Re}\,A'^{(-)}(m_\pi, 0)]_\rho \qquad \text{(III. 50)}$$

and, from (III. 49),

$$= (1 + k^V)\left(\frac{f_\rho}{m_\rho}\right)^2. \qquad \text{(III. 51)}$$

In our model the current algebra direct term corresponds to the low energy contributions in the dispersion integrals (N, Δ), the ρ exchange term has the counterpart in the high energy curve. As we apply factorization only to the imaginary part of the amplitude,

$$\mathrm{Im}\,[\nu B^{(-)}(\nu, 0)] = (1 + k^V)\,\mathrm{Im}\,A'^{(-)}(\nu, 0) \qquad \text{(III. 52)}$$

we obtain a contribution to $\mathrm{Re}\,B^{(-)}(m_\pi, 0)$ given by,

$$\int \frac{\mathrm{Im}\,[\nu B^{(-)}(\nu, 0)]}{\nu^2}\, d\nu = (1 + k^V)\, G(0) \qquad \text{(III. 53)}$$

and from (III. 17) and the KSFR relation,

$$= \frac{1}{2}(1 + k^V)\left(\frac{f_\rho}{m_\rho}\right)^2 \qquad \text{(III. 54)}$$

which is half of the quantity given by the exchange model for the real part of the amplitude. As we have shown, with our factorization prescription, we reproduce fairly well the high energy contribution to the dispersion integrals. Current algebra calculations over estimate the exchange term: a full exchange term cannot be taken at the same time with direct channel terms. The exchange type term represents t channel contributions and it should be used to describe only the region above the s channel resonances. It is interesting to remark that in the current algebra treatment as the number of resonances included in the direct term increases — thus apparently improving the accuracy of the

calculation — the prediction for the $a_{1-}^{(-)}$ scattering length become worse [88].

Our conclusion is that in the way current algebra is applied to the determination of low energy parameters it violates the basic idea of duality that at a given energy only either an s channel or a t channel picture of the process should be included. This principle is followed in our crude model and we avoid the troubles of current algebra calculations obtaining good results for the $a_{1\pm}^{(-)}$ p wave scattering lengths.

Recently Höhler, Jakob and Strauss [89] systematically discussed various theoretical approaches to low energy parameters in comparison with dispersion relations. Their basic results agree with our conclusions.

CHAPTER IV

Quark diagrams and dual resonance models

In this chapter we extend the already introduced duality ideas in connection with the underlying quark rearrangements that take place in hadronic processes. The naive Feynman graphology, useful in evaluating decays of mesons and coupling constants, cannot be applied to more complex situations. On the other hand the dual relativistic quark models, using basically the Veneziano formula applied to quarks, while being very interesting as ideas are of limited practical applications.

So far the most successful formula in the field of Veneziano type models is the Lovelace formula [90] for $\pi\pi$ scattering. This formula having duality and crossing naturally built in, accounts, roughly, for the known physics of the $\pi\pi$ system in the whole range of energies. For detailed fits one requires unitarized versions of the model [91] but we shall not attempt to include such features in our discussion.

The attempts to apply Veneziano formula to other 4 particle amplitudes has not always met with complete success and certainly never achieved the general agreement with experiment and theory of the $\pi\pi$ formula. Trouble not only occurs, as we mentioned, with relativistic dual quark models but also with straight generalizations of the Veneziano formula. In πN scattering, for instance, those models lead to bad low energy parameters [45, 92].

Instead of imposing from the beginning a particular form for the amplitude we try, in this chapter, to extract from the Veneziano-Lovelace formula some basic properties. These properties, which are derived from the dual structure and not from the

specific form of the Veneziano amplitude, are then classified and their consequences explored. We shall concentrate our attention only on scattering of pions on an arbitrary target T because pion mass extrapolations are small and allow direct comparison with soft limit results, but what we have to say could equally be extended to other pseudoscalar meson-target reactions.

We work in the framework of dual resonance models (*) and assume that planar duality holds, i. e., the scattering amplitude $A(s,t,u)$ has the quark underlying structure given by duality diagrams ([43]). It can then be written as a sum of (s,t), (u,t) and (s,u) terms each one exhibiting poles in two channels, s and t, etc. According to the physical situation these quark model non exotic poles, are interpreted either as resonances or Regge poles. The terms $V(s,t)$ and $V(u,t)$ have the same quark structure and show no particular symmetry under $s \leftrightarrow t$, $u \leftrightarrow t$ interchanges respectively. The (s,u) diagram does not change when seem from s or u channels and the corresponding $U(s,u)$ term is then taken as even under $s \leftrightarrow u$ interchange:

$$U(s,u) = U(u,s)\,. \tag{IV. 1}$$

Keeping in mind that a pure $U(s,u)$ term is t channel exotic ($I_t = 2$) and the $s \leftrightarrow u$ crossing properties of the t channel isospin amplitudes we write the simplest and most general t channel isospin amplitudes for πT scattering in the form:

$$A_0^t = \beta\,[V(s,t) + V(u,t)] + \delta\, U(s,u) \tag{IV. 2 a}$$

$$A_1^t = \alpha\,[V(s,t) - V(u,t)] \tag{IV. 2 b}$$

$$A_2^t = \gamma\, U(s,u)\,. \tag{IV. 2 c}$$

In principle $V(s,t)$ and $U(s,u)$ are not the same function and of the four Veneziano coefficients α, β, δ and γ two can be absorbed in the normalization of $V(s,t)$ and $U(s,u)$. Note that throughout this chapter we shall never assume a specific form for $V(s,t)$ and $U(s,u)$.

(*) For a review and definitions see Ref. [44].

We consider the reaction

$$\pi(q_1) + T(p_1) \to \pi(q_2) + T(p_2)$$

ann define the variable $\nu = q_1 \cdot (p_1 + p_2)/2\, m_T$, m_T being the mass of the target. We now assume that an expansion around $t = 0$, $\nu = 0$ is valid. At least in the πN case, as we have seen, such approximation is good. If in the region $\nu \simeq 0$ the s wave part of the amplitude is vanishingly small the s wave scattering lenght is approximately given by

$$a = m_\pi \frac{\partial A(\nu, t=0)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu \to 0} . \qquad \text{(IV. 3)}$$

The best justification of (IV. 3) is the sucess of the current algebra calculations of scattering lengths [80, 85]. Note that we are not strictly working in a soft pion limit. We assume that as far as the pion is concerned the soft limit results remain valid without drastic alternations when applied to physical situations because of the smallness of the pion mass.

Theoretically (IV. 3) is on more secure grounds for an isospin crossing odd amplitude because such an amplitude is constrained to vanish at $\nu = 0$ (*). This is in fact the amplitude we are most interested in in this chapter. We extend Equation (IV. 3) to each planar dual amplitude defining in this way a_{st}, a_{ut} and a_{su} contributions to the s wave scattering lengths. Using the $s \leftrightarrow u$ crossing properties of the t channel amplitudes we obtain from Equations (IV. 2) the following expressions for the scattering lengths:

$$a_0^t = \beta [a_{st} + a_{ut}] + \delta\, a_{su} = 0 \qquad \text{(IV. 4 a)}$$

$$a_1^t = \alpha [a_{st} - a_{ut}] = 2\, \alpha\, a_{st} \qquad \text{(IV. 4 b)}$$

$$a_2^t = \gamma\, a_{su} = 0 . \qquad \text{(IV. 4 c)}$$

Note that if Equation (IV. 3) is true the addition of a Pomeranchuck like term to the amplitude would not affect the scattering

(*) For a discussion of σ terms and meson mass extrapolations see Ref. [93].

lengths because it is even under $s \leftrightarrow u$ crossing. For $\pi\pi$ scattering with physical pions the zero pion mass approximation of Equation (IV. 3) is not correct [80]. In particular, because of the additional symmetry, $a_{su} = a_{st}$, modifying Equations (IV. 4 a) and (IV. 4 c).

If we go now to the high energy limit in the forward direction

$$\operatorname{Im} A(s, t \simeq 0, u) \underset{s \to \infty}{\sim} \operatorname{Im} V(s, t \simeq 0) \qquad \text{(IV. 5)}$$

which implies that the resonance contributions from $\operatorname{Im} U(s,u)$ at $t \simeq 0$ do not add up at high energy to form Reggeons but rather compensate among themselves. Such compensations are achieved in chiral schemes [94, 95] as in the $\pi\pi$ Veneziano formula [90, 96, 97] by the inclusion of low lying particles (daughters). For example, in the $\pi\pi$ case the mass degenerate ρ and ε have equal and opposite contributions to $\operatorname{Im} U(s,u)$. We extend now these ideas to other processes.

As $\operatorname{Im} U(s,u)$ does not contribute at high energy in the forward direction one can write for $U(s,u)$ superconvergent relations in the form

$$\int \nu^k \operatorname{Im} U(s,u)\, d\nu = 0 \qquad (t \simeq 0) \qquad \text{(IV. 6)}$$

Equation (IV. 6) holds for all odd integers k. The most natural way of achieving this is by cancellations between high and low partial wave contributions in each local mass region. Then Equation (IV. 6) would be expected to hold also for even k. In our applications we restrict k to a value, $k = -2$, that provides convergence even for amplitudes which are not superconvergent and thus safely allows saturation with a few resonances. The test for superconvergence then becomes the local cancellation of the integral.

It is important to remark that the superconvergence of $U(s,u)$ is not derived here from exoticity in t channel but appears as a consequence of the dual planar structure of the amplitude. When an exotic t channel is present, $I_t = 2$, Equation (IV. 6) coincides with the superconvergent relations of Brout et al [97]. But, as shown below in the case of πN scattering, it is also valid when there are no exotic channels.

At this stage we compare our equations (IV. 1)-(IV. 6), which we think should be kept in a Veneziano formula for the πT scattering amplitude, with the Lovelace expression. Equations (IV. 1) and (IV. 2) are satisfied. Equations (IV. 3) and (IV. 4) are also satisfied up to terms in m_π^2 in the limit of linear expansion of the denominator Γ functions [96]. Equation (IV. 5) is obviously satisfied. Equation (IV. 6) is exact in the zero width resonance approximation. Note that the Veneziano formula for $K\pi$ scattering [98] also satisfies the equations that refer to $V(s,t)$ and $V(u,t)$ terms (there is no $U(s,u)$ term in πK scattering). In the case of the $\pi\eta$ system conditions (IV. 3) and (IV. 4) are not satisfied and the Lovelace formula is then not correct [99].

As the next step we discuss the consequences of imposing on the πT amplitude the constraints of the additivity quark model in the version proposed in previous work (Ref. [21] and chapter III of this thesis): quark model additivity is additivity of $V(s,t)$ π-quark duality diagrams generating the $V(s,t)$ πT diagram. We express the high energy additivity rule in the following way:

$$\operatorname{Im} <\pi T|A|\pi T> \underset{\substack{s\to\infty \\ t\simeq 0}}{\simeq} \sum_i \operatorname{Im} <\pi Q_i|A|\pi Q_i> = \qquad \text{(IV. 7)}$$

$$= n \operatorname{Im} V_Q(s, t\simeq 0)$$

where $\operatorname{Im} V_Q(s,t\simeq 0)$, a universal function of s, is the amplitude for the basic π-non strange quark Q interaction and n the number of interacting quarks in T(*). Via duality and Finite Energy Sum Rules (FESR) the high energy curve when extrapolated down to the low energy region must be, on average, equal to the low energy contributions. In this way the additivity rule (IV. 7) for the Imaginary part of the planar dual amplitude $V(s,t)$ can be extended to the whole range of energies.

We shall now apply these ideas to specific reactions and see how far they are satisfied in practice. We need to select an amplitude in which s channel resonances come only from $V(s,t)$, i.e., the A_1^t amplitude (Equation (IV. 2b)). As a «good»

(*) Note that the additivity rule (IV. 7) does not work for the real part of the amplitude because then $V(u,t)$ and $U(s,u)$ terms also contribute.

FESR, ($k=-2$) we take the Adler-Weisberger relation [67, 68] interpreted as a FESR for A_1^t/ν^2 [100].

$$a_1^t = \frac{A_1^t(\nu,0)}{\nu}\bigg|_{\nu\to 0} = (\text{Born term}) + \frac{2}{\pi}\int_{\nu_{\text{th.}}}^{\infty} \frac{\text{Im}\, A_1^t(\nu',0)}{\nu'^2}\, d\nu'. \quad \text{(IV. 8)}$$

The sum rule is convergent which simplifies the comparison of different scattering processes because no cut-offs, which may be channel dependent, need be introduced.

To saturate the right hand side of (IV. 8) we generalize the procedure developed in Ref. [21] and in chapter III: in the resonance region we take only the first p wave resonances and treat the contributions above as high energy contributions, i.e., satisfying (IV. 7). We thus derive a set of SU(6) relations for coupling constants, by considering the p wave contributions to (IV. 8) of different πT reactions ($\pi Q, \pi\pi, \pi K, \pi N, \pi\Sigma, \pi\Xi$) in the zero width approximation:

$$\left(\frac{g_{Q\pi}}{M_Q}\right)^2 = \left(\frac{g_{\varrho\pi\pi}}{m_\varrho}\right)^2 = \frac{8}{3}\left(\frac{g_{K^*K\pi}}{m_{K^*}}\right)^2 \quad \text{(IV. 9a)}$$

$$= \left(\frac{g_{N\pi}}{m_N}\right)^2 - \frac{16}{3}\left[\frac{g_{\Delta N\pi}}{m_N+m_\Delta}\right]^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{g_{\Sigma\pi}}{m_\Sigma}\right)^2 \quad \text{(IV. 9b)}$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{g_{\pi\Sigma\Lambda}}{m_\Lambda+m_\Sigma}\right]^2 + \frac{2}{3}\left[\frac{g_{\Sigma^*\Sigma\pi}}{m_{\Sigma^*}+m_\Sigma}\right]^2 = \left(\frac{g_{\pi\Xi}}{m_\Xi}\right)^2 + \frac{8}{3}\left[\frac{g_{\Xi^*\Xi\pi}}{m_\Xi+m_{\Xi^*}}\right]^2$$

To obtain relations (IV. 9b) the kinematic factors appearing in the relativistic widths were approximated by putting $(m_\Delta+m_N)/m_N \simeq 2$ etc, as is usual in SU(6) calculations. Relations (IV. 9a) and (IV. 9b) are SU(6) as in the relativistic quark model [19]: the PPV (pseudoscalar, pseudoscalar, vector meson) coupling constant being proportional to m_V the BBP (baryon, barion, pseudoscalar meson) coupling being pseudovector in its nature with the s channel SU(3) mixing parameter $f^s \equiv F/(F+D) = 2/5$. We could write more SU(6) relations using target particles with higher spin (vector mesons, for instance) but then (IV. 7) should be interpreted in a spin average sense. Also if one substitutes a kaon for the pion more SU(6) relations are obtained. Note that we are not imposing the saturation of the Adler-Weisberger relation with p-wave resonances, but simply comparing their contributions in different processes.

As both the high energy and low energy contributions in the right hand side of (IV. 8) satisfy (IV. 7) obviously the left hand side also has to satisfy (IV. 7), i. e.:

$$a_1^t = n\,a \qquad \text{(IV. 10)}$$

where a is a universal constant, the scattering length for πQ scattering. Equation (IV. 10) with Equations (IV. 4a) and (IV. 4c) reproduces Weinberg's universal scattering lengths for scattering of soft pions on any target ([80]).

The equations within each of the sets (IV. 9a) and (IV. 9b) are experimentally fairly well satisfied but the agreement is not so good when one equates meson to baryon coupling constants. The additivity relations provided by (IV. 7) are also not always well satisfied. They impose the condition of having pure F coupling in the t channel which is too strong. However our aim is not to check SU(6) but to stress that the vehicle for such an overall SU(6) consistent picture is the idea of duality. As emphasized several times by Rosner ([55]) duality is less restrictive than SU(6) or quark model additivity and it is probably more fundamental.

This is the point of view we take from now on when we consider the $U(s,u)$ integrals of Equation (IV. 6). We have another specific reason for doing so: the vanishing of these integrals cannot be achieved in the framework of SU(6) quark model $L=0$ states as has been known for some time ([94]). We are led back to the necessity of low lying particles to saturate (IV. 6). i. e. particles below the main trajectories initiated by the SU(6) $L=0$ states. In first approximation we shall include in (IV. 6) all the observed p and s wave resonances in the first resonance region, in analogy with the ϱ, ε case ([94]), and, because of the convergence argument referred to above, use $k=-2$ as in the Adler-Weisberger relation.

In general, from Equations (IV. 2), the s channel contributions of the $U(s,u)$ term can be isolated by the combination

$$U(s,u) \propto A_0^t - (\beta/\alpha)\,A_1^t \qquad \text{(IV. 11)}$$

Equation (IV. 2) combined with the condition of no exotics in the s channel allows the following classification of the target particles according to their quark content:

Group 1 — Only one non strange quark in $T(K, \Xi, \cdots)$, $I_T = 1/2$

$$I_T = 1/2 : \delta = \gamma = 0 ; \quad \beta/\alpha = 1 .$$

Group 2 — Two non strange quarks in $T(\pi, \Sigma, \wedge, \cdots)$, $I_T = 0, 1$

$$I_T = 0 : \gamma = 0 ; \quad \alpha = 0$$

$$I_T = 1 : \delta/\gamma = -1/2 ; \quad \beta/\alpha = 3/2 \qquad \text{(IV. 12)}$$

Group 3 — Three non strange quarks in $T(N, \Delta, \cdots)$, $I_T = 1/2, 3/2$

$$I_T = 1/2 : \gamma = 0 ; \text{ No constraint on } \beta/\alpha$$

$$I_T = 3/2 : \delta/\gamma = -1 ; \quad \beta/\alpha = 3 . \qquad \text{(IV. 13)}$$

Of course in Group 1 there is no $U(s, u)$ integral to satisfy, and from this point of view no low lying particles were required in these processes. It is perhaps not an unrelated coincidence that no low lying particles coupled to πK and $\pi \Xi$ have been unmistakably detected [101]. The Ξ resonances, though not definitely classified, seem to fit quite well in the two main trajectories [102].

In Group 2 apart from $\pi\pi$ itself which leads to the results of Gilman and Harari [94] we can investigate Equation (IV. 6) for $\pi \Sigma$ scattering. The first p and s wave resonances are (*) $\wedge(1115)$, $\wedge(1405)$, $\Sigma(1189)$, $\Sigma(1385)$. Using Equations (IV. 11) and (IV. 12) we compute the left hand side of (IV. 6) for $k = -2$ in the zero pion mass limit to be

$$-(24 + 14) + (32 + 10) = -38 + 42 = (+4 \pm 8)\, GeV^{-2}$$

(*) The resonance parameters in $\pi \Sigma$ and πN scattering (mass, width and branching ratios) were taken from Refs. [103] and [101]. Except for the $\Delta(1236)$ resonance, where a Breit-Wigner formula with a $(q/q_\Delta)^3$ dependence in the width was used, the resonance contributions were evaluated in the zero width approximation. The widths were corrected for zero mass pions in the kinematic factors multiplying the coupling constants. The quoted errors simply include errors in the widths. For $f^s \equiv F/(F + D)$ we used the quark model value, $f^s = 2/5$.

which is compatible with zero on the right hand side. Our proposed mechanism of local mass cancellations seems then to work.

In Group 3 the testable case is πN scattering but here β/α is undetermined. Looking back to Equation (IV. 2), taking $t \simeq 0$ and the high energy limit one sees that β/α is related to $f^t \equiv F/(F+D)$ by [104]

$$\beta/\alpha = 4f^t - 1. \qquad \text{(IV. 15)}$$

The first p and s wave resonances [103, 101] are now the $N(938)$, $N(1460)$, $N(1525)$, $\Delta(1236)$ and Equation (IV. 6) gives:

$$(1-\beta/\alpha)(104+9.2+1.1)+(2+\beta/\alpha)60.8=0 \qquad \text{(IV. 16)}$$

and, from (IV, 15),

$$f^t = 1.4 \pm 0.1. \qquad \text{(IV. 17)}$$

This value of f^t, larger than the SU(6) quark model value $f^t=1$, is in reasonable agreement with the experimental determination and other theoretical predictions: $f^t \simeq 1.5$ (See Ref. [105] and further references there). If our arguments about the vanishing of $U(s,u)$ integral by cancellations in narrow mass strips are right, Equation (IV. 17) determines an high energy parameter from only a few low energy resonances. Because of the rapid convergence of (IV. 6) additional high energy contributions to (IV. 16) or to (IV. 14) would not change the results appreciably.

Returning to the s wave scattering lengths, deviations from the high energy quark model additivity as indicated by $f^t \neq 1$ are expected to cause violations in the universal scattering lengths. Taking the πN a_1^t scattering length as the standard quantity a the scattering lengths for $N\pi, \Sigma\pi$ and $\Xi\pi$ would be:

$$N\pi: \; a_1^t = a$$

$$\Sigma\pi: \; a_1^t = 2f^t a \simeq 3a \qquad \text{(IV. 19)}$$

$$\Xi\pi: \; a_1^t = (2f^t - 1)a \simeq 2a \qquad \text{(IV. 19)}$$

For $\Sigma\pi, \Xi\pi$ they are larger than predicted by universality. Neither (IV. 18) nor (IV. 19) can be unambiguously tested. It

should be kept in mind that any result for scattering lengths relies on the validity of (IV. 3).

Other possible tests of Equation (IV. 6) are more speculative. However, we shall consider $\pi\rho$ and $\pi\Delta(1236)$ scattering using spin averaged amplitudes.

For $\pi\rho$, inserting the π, ω and A_1 poles, Equation (IV. 6) gives,

$$4\,\frac{g^2_{\rho\pi\pi}}{m^2_\rho} - 2\,g^2_{\omega\rho\pi} + \frac{(m^2_{A_1} - m^2_\rho)}{4\,m\,A_1^4}\,[2\,g_1^2 + g_0^2] = 0 \qquad \text{(IV. 20)}$$

where g_1 and g_0 are respectively the transverse and longitudinal couplings in the $A_1 \to \rho\pi$ decay, with

$$\Gamma_{A_1\rho\pi} = \frac{1}{12\,\pi}\,(2\,g_1^2 + g_0^2)\,q^5/m^2_{A_1}.$$

To keep consistency with our previous arguments and the local saturation of (IV. 6) with s and p waves only, the $A_1 \to \rho\pi$ decay should occur in a purely orbital s state. This corresponds to $|g_0/g_1| \approx 1$. (For information on the experimental situation and theoretical analysis of A_1 data, see Ref. [106]). To make an estimate of $\Gamma_{A_1\rho\pi}$ we allow ourselves some freedom in playing simultaneously with SU(6) and chiral symmetry. From $SU(6)_W$ we borrow the relation [40] $4\,g^2_{\rho\pi\pi}/m^2_\rho = g^2_{\omega\rho\pi}$ (*) and from chiral symmetry [94, 95] (or experiment), $m^2_{A_1} \approx 2\,m^2_\rho$. Neglecting terms in m^2_π, Equation (IV. 20) then gives:

$$\Gamma_{A_1\rho\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Gamma_{\rho\pi\pi} \qquad \text{(IV. 21a)}$$

$$\simeq 90\,MeV. \qquad \text{(IV. 21b)}$$

The width predicted in (IV. 21) is quite acceptable. Experimentally [101] $\Gamma_{A_1\rho\pi} \lesssim 95\,MeV$.

(*) This relation can be derived in the same way as relations (IV. 9a) and (IV. 9b) extracting from the Adler-Weisberger relation for $\pi\rho$ the p wave resonance contributions. It agrees approximately with the experimental width $\Gamma_{\omega\pi\gamma}$ with ρ dominance.

For $\pi\Delta$ scattering (IV.6), saturated with the same contributions as in the πN case (the $E(1525)$ is here negligible), allows a prediction for the $\Delta\Delta\pi$ coupling constant. We use data from Sutherland's work [107] and his definition of the $\Delta\Delta\pi$ coupling: $g_{\Delta^{++}\Delta^{+}\pi^{+}}\psi^{++}_{\mu}\gamma_5\psi^{+}_{\mu}\varphi^{+}_{\pi}$. The result is

$$\frac{g^2_{\Delta^{++}\Delta^{+}\pi^{+}}}{4\pi} = 35^{+2}_{-5} \qquad \text{(IV. 22)}$$

in good agreement with the SU(6) value [40,107], $\simeq 32$. In Ref. [107], from the Adler-Weisberger relation, a larger value is obtained but this, we think, is related to the general difficulty in saturating the Adler-Weisberger relation with a restricted number of resonances [108, 94, 100].

One could try to generalize these calculations to backward scattering. Instead of considering t channel Regge poles and s channel (or u channel) resonances one could also invert the procedure and consider t channel resonances and s channel (u channel) Regge poles. Regge poles in the t channel are expected to dominate at large s, small t, i. e., forward scattering. Regge poles in u channel should dominate at large t and $u \to 0$, i. e., backward or near backward scattering.

As we have seen, an important constraint which we impose on a dual resonance model is good behaviour both at threshold and in the high energy region. The threshold point, $t=0$, $\nu=m_\pi$ is thus of particular interest. Going into the backward direction region, it is then natural to work exactly in the backward direction, i. e., $\cos\theta=-1$, and constrain the forward and backward amplitudes to be equal at threshold.

One should notice that the expansion of the amplitudes in the variable ν around the point $\nu\simeq 0$, $t\simeq 0$ does not necessarily have to be taken along the line $t=0$. For instance in the original Weinberg's current algebra treatment [80] of low energy parameters one only requires $t=(q_1-q_2)^2=q_1^2+q_2^2-2q_1q_2$ being of order $0(m_\pi^2)$, i. e., of second order relative to the linear term in ν. This means that a backward expansion starting from the point $\nu=0$, $t=4m_\pi^2$ is also valid and should reproduce at threshold, $\nu=m_\pi$, $t=0$ the same results of the forward expansion, i. e., Equation (IV. 3) and the current algebra scattering lengths. This

is in fact another way of stating the condition of having $F_{\text{forward}} = F_{\text{backward}}$ at threshold.

Regarding Equation (IV. 6) the corresponding backward direction equation is:

$$\int t^k \operatorname{Im} V(s,t)\, dt = 0 \qquad (\cos\theta = -1). \tag{IV. 23}$$

The resonances to be included in (IV. 23) are the $\rho, \varepsilon, f_0, \rho'$ etc. Using in (IV. 23) local mass cancellations we come across the problem of the possible non existence of the ρ'. The ρ', predicted in the $\pi\pi$ Veneziano formula [90], is required to annihilate the f_0 contribution in the superconvergent sum rules. In the backward direction, this difficulty is in general more important because for the same value of k the integrals are less convergent than in the forward direction (ν increases faster than t as the masses of the resonances increase), and thus the role of higher mass resonances (f_0, ρ') is more relevant. In our calculations we limit ourselves again to the resonances in the first mass region, i. e., the ρ and the ε.

To isolate the t channel contributions of the $V(s,t)$ term we use, from Equations (IV. 2), the t channel isospin combinations,

$$V(s,t) \propto A_0^t + (\beta/\alpha) A_1^t \tag{IV. 24}$$

If we further simplify the problem by taking $m_\rho \simeq m_\varepsilon$ our saturation scheme gives, from (IV. 23) and (IV. 24),

$$\operatorname{Im} F_\varepsilon + (\beta/\alpha) \operatorname{Im} F_\rho = 0 \qquad (\cos\theta = -1) \tag{IV. 25}$$

It should be noticed that now, in contrast to what we had before, it is possible to write the $V(s,t)$ superconvergent relation (IV. 23) for πT processes belonging to any of the above referred Groups 1, II and III, provided the $V(s,t)$ term can be isolated via (IV. 24).

Equation (IV. 25) allows us to relate the coupling constants $g_{\rho TT}$ to $g_{\varepsilon TT}$. We work in the narrow resonance approximation using t channel elementary particle exchanges in the Feynman formalism. In $\pi\pi$ scattering there is a forward backward symmetry

and Equations (IV. 11) and (IV. 24) are identical. Equation (IV. 25) in this case gives again the Gilman-Harari (94) result (*):

$$g_{\varepsilon\pi\pi}/g_{\varrho\pi\pi} \simeq 1 \qquad \text{(IV. 26)}$$

In πK scattering (IV. 25) gives:

$$g_{\varepsilon KK} = g_{\varrho KK} \qquad \text{(IV. 27)}$$

$$\simeq \frac{1}{2} g_{\varepsilon\pi\pi} . \qquad \text{(IV. 28)}$$

Phase shift analysis of $K^+ p$ scattering provides an estimate of the quantity $g_{\varepsilon KK} g_{\varepsilon NN} \simeq 10$ (109). Comparing it to the corresponding πp product of coupling constants, $g_{\varepsilon\pi\pi} g_{\varepsilon NN}$ ($\simeq 50$ from various determinations), we obtain $g_{\varepsilon KK}/g_{\varepsilon\pi\pi} \simeq 1/5$ which is much smaller than (IV. 28) but has the same sign.

When the target T is a particle with spin the amplitudes in the forward and backward directions must have well defined spin properties. For targets with spin $\frac{1}{2}$ we use the t channel no-flip amplitudes. In the forward direction

$$F_f^{(\pm)} \equiv A'^{(\pm)} = A^{(\pm)} + \frac{\nu}{(1 - t/4 m_T^2)} B^{(\pm)} \qquad \text{(IV. 29)}$$

is related to the total cross sections and these are in fact the amplitudes used in previous forward direction calculations. In the backward direction we write the no-flip amplitudes (110):

$$F_b^{(+)} = A^{(+)}(s, -4q^2) + \frac{m_T \omega}{E} B^{(+)}(s, -4q^2) \qquad \text{(IV. 30)}$$

$$F_b^{(-)} = \frac{m_\pi E}{m_T \omega} \left[A^{(-)}(s, -4q^2) + \frac{m_T \omega}{E} B^{(-)}(s, -4q^2) \right] \qquad \text{(IV. 31)}$$

(*) The $\varepsilon\pi\pi$ and εKK coupling constants are defined using the Lagrangian:

$$L_\varepsilon = \frac{1}{2} g_{\varepsilon\pi\pi} m_\varepsilon \varepsilon\pi\pi + g_{\varepsilon KK} m_\varepsilon \varepsilon i K^+ \tau K .$$

where E, ω and q are center of mass variables, $E = \sqrt{q^2 + m_T^2}$, $\omega = \sqrt{q^2 + m_\pi^2}$. At $\cos\theta = -1$ also holds $t = -4q^2$ and $\nu = (s-u)/4m_T = E\omega/m_T$. At threshold, as required, $F_b^{(+)} = F_f^{(+)}$. In πN scattering the ρ and ε contributions (*) to (IV. 25) are

$$\text{Im}\, F_\rho^{(-)} = \frac{m_\pi}{4\pi} 2\left[1 + K_N^V \frac{m_\rho^2}{4m_N^2}\right] g_{\rho\pi\pi} g_{\rho NN}\, \pi\, \delta(t - m_\rho^2) \qquad \text{(IV. 32)}$$

and

$$\text{Im}\, F_\varepsilon^{(+)} = -\frac{1}{4\pi} m_\varepsilon g_{\varepsilon\pi\pi} g_{\varepsilon NN}\, \pi\, \delta(t - m_\varepsilon^2) \qquad \text{(IV. 33)}$$

Similar contributions can be written for $\pi\Xi$ and $\pi\Sigma$ scattering. If one neglects the vector meson magnetic coupling contribution in (IV. 32) — in general this contribution is not negligible — and uses the values of β/α corresponding to pure F coupling in high energy t channel exchanges, Equation (IV. 25) would obviously give for the ε couplings the same SU(3) structure in πB as in πM scattering. In our calculations we shall keep the magnetic coupling contributions and use $f' = 1 \cdot 4$ (Equation (IV. 17)). To evaluate the $F_\rho^{(-)}$ resonances contributions we apply vector meson dominance, $g_{\rho BB} = I_B g_{\rho\pi\pi}$ and use for K_B^V the values given by the quark model, $F/(F+D) = \frac{3}{4}$ with $K_N^V = 3 \cdot 7$. From (IV. 25), (IV. 32) and (IV. 33) we obtain for the products of coupling constants $g_{\varepsilon\pi\pi} g_{\varepsilon BB}$ the values shown in Table IV. 1.
Having in mind the approximations involved the rough agreement with dispersion relations [111] in the εNN case is quite encouraging. If in (IV. 23) the f_0 is also included — it has to be if a ρ' effect does not exist — the values of the $g_{\varepsilon\pi\pi} g_{\varepsilon BB}$'s should be increased. Combining the result $g_{\varepsilon\pi\pi} g_{\varepsilon NN} \simeq 40$ with Equation (IV. 26) we obtain for the $g_{\varepsilon NN}$ coupling constant,

$$\frac{g_{\varepsilon NN}^2}{4\pi} \simeq 5.1\,. \qquad \text{(IV. 34)}$$

(*) The εNN coupling constant is defined from the Lagrangien $L_\varepsilon = g_{\varepsilon NN} N N \varepsilon$.

TABLE IV.1

coupling constants:

εBB	β/α	$g_{\varepsilon\pi\pi}\, g_{\varepsilon BB}$	
		Prediction	Dispersion Relations
εNN	~ 5	~ 40	69 ± 4 Engels 63 Schlaile 50 Strauss
$\varepsilon \Xi\Xi$	1	3·5	?
$\varepsilon \Sigma\Sigma$	3/2	10	?

Theoretical predictions on the εNN coupling constants (dispersion relations, dynamical equations with exchange potentials) give values for $g^2_{\varepsilon NN/4\pi}$ ranging from [112] 2.5 to 14.7.

In the forward direction we have seen that the $U(s,u)$ term corresponds either to a pure exotic t channel or to a t channel with degenerate trajectories cancelling among themselves. For instance the f_0 and ϱ trajectoires are approximately degenerate and thus it is possible to write a forward «superconvergent» $U(s,u)$ relation for πN scattering. In the backward direction we expect the same situation to occur: the vanishing of the $V(s,t)$ integrals corresponds either to an exotic u channel or to a u channel with cancellations of trajectories. In $\pi\Xi$ and $\pi\Sigma$ $V(s,t)$ corresponds to $I_u = 3/2$ and 2, respectively. In πN there are no exotic channels and thus the «superconvergent» $V(s,t)$ relation to be valid requires cancellations of u channel trajectories. As the N_α and Δ_δ trajectories are not degenerate to achieve the required cancellations one needs to introduce two additional trajectories degenerate with the N_α and Δ_δ respectively. The need of at least four trajectories to satisfy duality in backward scattering is well known and is not surprising [113].

CHAPTER V

A few conclusions

We summarize now the main topics discussed in this thesis and draw some relevant conclusions.

In chapter I we enumerated a few problems in connection with a realistic interpretation of the quark model: the mass of the quark (free and bound quark), the binding potential, possible bootstrap schemes, dual models. These are the problems directly related to our work. Extremely interesting question like quark statistics, integrally charged quark models were completely left out. Concerning the quark statistics, at least as far as our work is concerned, we do not need to take up a position on this question. Concerning less economic quark models, using more than one SU(3) triplet, we think that the successes of duality and quark duality diagrams make them much less attractive than the one fractionally charged triplet quark model.

Cosmic rays experiments failed to confirm unambiguously the «evidence for quarks». However a somewhat unexpected evidence for the realistic quark model appears to emerge from inclusive experiments. We cannot see a simple explanation for the presence of a «quark symmetry frame» based on pure (I, Y, B) and mathematical quark arguments.

In chapter II we developed a Bethe-Salpeter formalism applied to quarks. Not only mesons and baryons were described as bound state poles in the $\bar{Q}Q$ and QQQ channels respectively, but also their interactions were seen as built up from quark level interactions. SU(3) mass breaking factors are systematically introduced in various hadron coupling constants via the mass factors in the vector and pseudoscalar meson Bethe-Salpeter

wave functions required by the constraint of vector meson dominance and the Goldberger-Treiman relation at quark level. These vertex functions are realizations of Llewellyn Smith Model I.

For baryons the Bethe-Salpeter formalism is complicated. However when non-relativistic approximations for the motion of the quarks are introduced we recover the usual results of the additivity quark model with corrections. In the evaluation of magnetic moments the predicted deviations from SU(6) are in fair agreement with experiment.

In chapter III we performed some quark level calculations (sum rules, dispersion relations) and showed that quarks, from a theoretical point of view, can be treated as strong interacting particles on the same footing as baryons and mesons. In particular the ideas of duality work for quark interactions in a way similar to that for hadrons. In fact, duality, with Harari-Rosner duality diagrams, can be seen as a new development of the quark model. We showed that the calculations of the old quark model, at low and high energy, are duality consistent. We used quark model low and high energy calculations to evaluate sum rules and dispersion relations finding good agreement with detailed calculations.

In chapter IV we explored the constraints derived from the quark rearrangements that occur in hadron reactions. Such constraints, we think, should be included in dual resonance models satisfying planar duality. One of the constraints takes the form of a superconvergent relation to be satisfied by local mass cancellattions. These «superconvergent» relations are more general than the usual ones because they do not require the presence of exotic channels. They are valid, for instance, in πN scattering. We made applications of these relations in forward and backward direction. In the backward directions we obtain a set of new predictions on the $\delta(750)$ coupling constants.

We think that as a whole our work brings support to a realistic interpretation of the quark model and shows that without any major difficulty quarks can be treated as dynamical objects in the (s, t, u) Mandelstam's plane.

ACKNOWLEDGEMENTS

I should like to thank Professor Leonardo Castillejo for his supervision and guidance throughout the course of this work. Thanks are also due to the members of staff and my colleagues in the High Energy Physics group for many discussions and conversations; and in particular to Chris Miller and Hedley Morris for reading several sections of the manuscript. I should also like to acknowledge a research fellowship from the Calouste Gulbenkian Foundation.

REFERENCES

(1) M. GELL-MANN, *Phys. Letters* **8**, 214 (1964).

(2) G. ZWEIG, CERN Preprint TH 401 (1964).

(3) Quarks were reported to have been observed in References:
C. B. A. MC CUSKER and I. CAIRNS *Phys. Rev. Letters*, **23**, 658 (1969).
W. T. CHU et. al., *Phys. Rev. Letters* **24**, 917, 1210 (E) (1970).
Quarks were not observed in experiments similar to the previous ones, as reported in references:
W. E. HAZEN, *Phys. Rev. Letters* **26**, 582 (1971).
A. F. CLARK et. al., *Phys. Rev. Letters* **27**, 51 (1971).

(4) G. F. CHEW, *S*-Matrix Theory of strong interactions, W. A. Benjamin, Inc. Publishers (1961).

(5) G. MORPURGO, *Physics* **2**, 95 (1965).

(6) R. H. DALITZ, in *High Energy Physics*, Gordon and Breach Publ., New York (1966).

(7) H. J. LIPKIN and A. N. TAVKHELIDZE, *Phys. Letters*, **17**, 331 (1965).

(8) L. I. SCHIFF, *Phys. Rev. Letters* **17**, 612 (1966).

(9) J. J. J. KOKKEDEE and L. VAN HOVE, *Nuovo Cimento* **42**, 711 (1966).

(10) P. JAMES and H. WATSON, *Phys. Rev. Letters* **18**, 179 (1967)

(11) W. KO and R. L. LANDER, *Phys. Rev. Letters* **26**, 1284 (1971).
S. L. STONE et. al., University of Rochester Preprint, UR-875-335 (1971).

(12) A. TAVKHELIDZE, in *High Energy Physics and Elementary Particles* (pg. 753), IAEA, Vienna 1965.
D. FAIMAN and A. W. HENDRY, *Phys. Rev.* **173**, 1720 (1968).

(13) R. H. DALITZ, in *Lectures at the Second Hawaii Topical Conference on Particle Physics*, University of Hawaii Press, Honolulu, 1967.
M. K. SUNDARESAN and P. J. S. WATSON, *Ann. Phys.* (N. Y.) **59**, 375 (1970).
M. BÖHM, H. JOOS and M. KRAMMER, DESY Preprint 71/10 (1971).

(14) O. W. GREENBERG, *Phys. Rev. Letters* **13**, 598 (1964).
D. FAIMAN et. al., Ref [12].
R. H. DALITZ, Ref [13].
R. P. FEYNMAN, M. KISLINGER aud F. RAVNDAL, *Phys. Rev.* **D3**, 2707 (1971).

(15) G. VENEZIANO, *Nuovo Cimento* **52**, 190 (1968).

(16) L. SUSSKIND, *Nuovo Cimento* **69**, 457 (1970).

(17) C. LOVELACE, *Nuclear Physics* **B12**, 253 (1969).

(18) For general references on Quark Model see:
J. J. J. KOKKEDEE, The Quark Model, W. A. Benjamin, Inc. Publishers (1969).
G. MORPURGO, Lecture Notes at Erice Summer School, Sicily (1969).
H. J. LIPKIN, Quarks for pedestrians, Lecture Notes, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel (1971).

(19) J. DIAS DE DEUS, Consequences of relativistic quark models for the interactions of hadrons, University College London 1970 (to be published in *Physical Review* D).

(20) ———, *Portugaliae Physica* **6**, 163 (1971).

(21) ———, Quarks, Sum Rules and Low energy parameters in πN scattering, University College London (1970) (to be published in *Physical Review* D).

(22) G. VENEZIANO, Progress in the theory and application of dual models, talk presented at the International Conference on Duality and Symmetry in *Hadron Physics*, Tel-Aviv, Israel (1971).

(23) K. BARDAKCI and M. B. HALPERN, *Phys. Rev.* **183**, 1956 (1969).

(24) S. MANDELSTAM, *Phys. Rev.* **184**, 1625 (1969).

(25) J. DIAS DE DEUS, Scattering of pions by any target in Dual Resonance Models, University College London (1971). (to be published in *Physical Review* D).

(26) C. BECCHI and G. MORPURGO, *Phys. Rev.* **140B** 687 (1965).
———, *Phys. Rev.* **149**, 1284 (1966).

(27) W. THIRRING, *Acta Physica Austriaca*, Suppl. II, 205 (1965).

(28) R. VAN ROYEN and V. F. WEISSKOPF, *Nuovo Cimento* **50**, 617 (1967).

(29) C. H. LLEWELLYN SMITH, *Ann. Phys.* (N. Y.) **53**, 521 (1969).

(30) E. E. SALPETER and H. A. BETHE, *Phys. Rev.* **82**, 1232 (1951).
M. GELL-MANN, and F. E. LOW, *Phys. Rev.* **82**, 350 (1951).

(31) T. KITAZOE and T. TESHIMA, *Nuovo Cimento* **57A**, 498 (1968).

(32) T. GUDEHUS, *Phys. Rev.* **184**, 1788 (1969).

(33) See, for instance:
D. LURIE, A. J. MACFARLANE and TAKAHASHI, *Phys. Rev.* **140B**, 109 (1965).

(34) J. GOLDSTEIN, *Phys. Rev.* **19**, 1516 (1953).

(35) O. W. GREENBERG, *Phys. Rev.* **147**, 1077 (1966).

(36) A. PAGNAMENTA, *Nuovo Cimento* **53A**, 30 (1968).

(37) P. G. O. FREUND, *Phys. Letters* **15**, 352 (1965).
P. G. O. FREUND, in *Fundamental Particle Physics*, Syokabo and W. A. Benjamin Publishers (1968).

(38) K. KAWARABAYASHI and M. SUZUKI, *Phys. Rev. Letters* **16**, 255 (1966).

(39) In Ref. [29] a derivation of the KSFR relation with $c = 1$ is given, but such a derivation is questionable as it requires that the quark unrenormalized g_A be identical to the renormalized one and neglects divergent terms in the loop integrals I and I′ to make them equal.

(40) B. SAKITA and K. C. WALI, *Phys. Rev.* **139B**, 507 (1965).

(41) E. LOHRMANN, in Proceedings of the Lund International Conference on Elementary Particles (1969).
J. PERES-Y-JORBA, in Proceedings, 4th International Symposium on electron and photon interactions at high energies, Daresbury (1969).

(42) J. CARROL, D. B. LICHTENBERG and J. FRANKLIN, *Phys. Rev.* **174**, 1681 (1968).
(43) H. HARARI, *Phys. Rev. Letters* **22**, 562 (1969).
J. L. ROSNER, *Phys. Rev. Letters* **22**, 689 (1969).
(44) G. VENEZIANO, Narrow resonance models compatible with duality and their developments. Lecture notes for the International School of Subnuclear Physics, Erice, Sicily (1970).
(45) R. DELBOURGO and P. ROTELLI, *Physics Letters* **30B**, 192 (1969).
————, *Nuovo Cimento* **59A**, 412 (1970).
(46) For a review see:
H. M. CHAN, CERN Report No. TH 1057 (1969).
(47) See References: [49], [50] and
R. CARLITZ, S. ELLIS, P. G. O. FREUND and S. MATSUDA, Caltech Preprint (1970).
(48) R. CARLITZ and M. KISLINGER, *Phys. Rev. Letters* **24**, 186 (1970).
(49) K. BARDAKCI and M. B. HALPERN, *Phys. Rev. Letters* **24**, 428 (1980)
(50) G. VENTURI, *Lett. Nuovo Cimento* **3**, 753 (1970).
(51) J. P. LEBRUN and G. VENTURI, *Lett. Nuovo Cimento* **4**, 1133 (1970).
(52) J. P. LEBRUN, Université de Liege Preprint 71/4 (1971).
(53) G. VENTURI, Universitá di Bologna Preprint (1971).
(54) For a review see:
H. HARARI, Lectures given at Brookhaven Summer School, August 1969.
(55) J. ROSNER, Hadron Symmetry from crossing relations, Invited talk presented at the Spring meeting of the American Physical Society (1970).
(56) P. G. O. FREUND, *Phys. Rev. Letters* **20**, 235 (1968).
H. HARARI, *Phys. Rev. Letters* **20**, 1395 (1968).
(57) See, for instance:
C. B. CHIU, *Nuclear Physics* **B30**, 477 (1971).
(58) J. V. ALLABY, Two-body hadronic interactions and total cross-sections talk at the XVth International Conference on High Energy Physics, Kiev 1970.
(59) E. M. LEVIN and L. L. FRANKFURT, *Soviet Phys.* — JETP *Letters* **2**, 65 (1965).
(60) H. J. LIPKIN and F. SCHECK, *Phys. Rev. Letters* **16**, 71 (1966).
(61) P. G. O. FREUND, *Nuovo Cimento* **43A**, 1171 (1966).
N. CABIBBO, L. HORWITZ and Y. NE'EMAN, *Phys. Letters* **22**, 336 (1966).
(62) J. ROSNER, *Phys. Rev. Letters* **21** 950 (1968).
(63) J. J. J. KOKKEDEE and L. VAN HOVE, *Nuclear Physics* **B1**, 169 (1967).
(64) R. W. WEINER, Antibaryon-baryon scattering, Duality and the Quark Model, Physikalisches Institut der Universität Bonn Preprint (1970).
(65) R. DOLEN, D. HORN and C. SCHMID, *Phys. Rev. Letters* **19**, 402 (1967); *Phys. Rev.* **166**, 1768 (1968).
(66) S. L. ADLER and R. F. DASHEN, Current Algebras and applications to particle physics, W. A. Benjamin, Inc. Publishers (1968).
(67) S. L. ADLER, *Phys. Rev.* **140B** 736 (1965).
(68) W. I. WEISBERGER, *Phys. Rev.* **143**, 1302 (1966).
(69) G. VON DARDEL et al., *Phys. Rev. Letters* **8**, 173 (1962).

(70) See, for instance:
R. L. THEWS, *Nuovo Cimento* **68A**, (1970).
(71) N. CABIBBO and L. A. RADICATTI, *Phys. Rev. Letters* **19**, 697 (1966).
(72) S. FUBINI, G. FURLAN and C. ROSSETTI, *Nuovo Cimento* **40**, 1171 (1965).
(73) G. CHEW, M. GOLDBERGER, F. LOW and Y. NAMBU, *Phys. Rev.* **106**, 1345 (1957).
(74) G. ZWEIG, *Nuovo Cimento* **32**, 689 (1964).
(75) F. J. GILMAN and H. J. SCHNITZER, *Phys. Rev.* **150**, 1362 (1966).
(76) S. L. ADLER and F. J. GILMAN, *Phys. Rev.* **152**, 1460 (1966).
(77) S. L. ADLER, *Phys. Rev.* **139B**, 1638 (1965).
(78) G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER, F. E. LOW and Y. NAMBU, *Phys. Rev.* **106**, 1337 (1957).
(79) J. HAMILTON and W. S. WOOLCOCK, *Reviews of Modern Fhysics*, **35**, 737 (1963).
(80) S. WEINBERG, *Phys. Rev. Letters*, **17**, 616 (1966).
(81) R. G. MOORHOUSE, *Annual Review of Nuclear Science* **19**, 301 (1969).
(82) H. NIELSEN, The invariant amplitudes of pion-nucleon scattering in the unphysical region for $t \lesssim 4\,\mu^2$. Helicity amplitudes, University of Aarhus Preprint (1971).
(83) Y. TOMOZANA, *Nuovo Cimento* 46A, 707 (1967).
K. RAMAN and E. C. G. SUDARSHAN, *Phys. Rev.* **154**, 1499 (1967).
(84) H. J. SCHNITZER, *Phys. Rev.* **158**, 1471 (1967).
(85) J. C. HUANG and J. R. URANI, *Phys. Rev.* **D1**, 877, (1970).
(86) L. ROPER, R. WRIGHT and B. FELD, *Phys. Rev.* **138B**, 190 (1965).
(87) J. J. SAKURAI, *Phys. Rev. Letters* **17**, 552 (1966).
(88) K. RAMAN, *Phys. Rev.* **164**, 1736 (1967).
(89) G. HÖHLER, H. P. JACOB and R. STRAUSS, A critical test for models for the low energy πN amplitude, University of Karlsruhe Preprint (1971).
(90) C. LOVELACE, *Physics Letters* **28B**, 264 (1968).
(91) ———, Proceedings, Argonne Conference on $\pi\pi$ and πK interaction (1969).
P. N. DOBSON, *Letters Nuovo Cimento* **31**, 761 (1969).
(92) K. IGI, *Physics Letters* **28B**, 330 (1968).
(93) F. VON HIPPEL and J. KIM, *Phys. Rev.* **D1**, 51 (1970).
H. MORRIS and G. THOMPSON, to be published in *Nuclear Physics B*.
T. P. CHENG and R. DASHEN, *Phys. Rev. Letters* **26**, 594 (1971).
(94) F. J. GILMAN and H. HARARI, *Phys. Rev.* **165**, 1803 (1968).
(95) S. WEINBERG, *Phys. Rev.* **177**, 2604 (1969).
(96) H. OSBORN, *Letters Nuovo Cimento* **1**, 513 (1969).
J. YELLIN, Notes on $\pi\pi$ scattering, UCRL-18637, 18664 (1968).
(97) R. BROUT, F. ENGLERT and C. TRUFFIN, Conserved Currents, Duality and the meson spectrum, Contributed paper to the International Conference on Duality and Symmetry in Hadron Physics, Tel Aviv, April 1971.
(98) K. KAWARABAYACHI and S. KITAKADO, *Physics Letters* **28B**, 432 (1969).
(99) M. JACOB, Duality in Strong Interaction Physics, Lectures given at the VIII Internationale Universitätswoche für kernphysik der Universität Graz, Schladming (1969).
(100) G. COSTA and G. SHAW, *Nuclear Physics* **B6**, 1 (1968).

(101) Rewiev of Particle Properties, *Physics Letters* **33B**, August 1970.
(102) O. W. GREENBERG, Resonance Models, Proceedings of the Lund International Conference on Elementary Particles (1969).
(103) R. PLANO, Baryon non-strauge resonances.
R. LEVI SETTI, Baryon strange resonances, Proceedings of the Lund International Conference on Elementary Particles (1969).
(104) V. BARGER, M. G. OLSSEN and K. V. SARMA, *Phys. Rev.* **147**, 1115 (1966).
(105) J. ROSNER, *Phys. Rev. Letters* **24**, 950 (1968).
(106) J. BALLAM et. al., *Phys. Rev. Letters* **21**, 934 (1968); *Phys. Rev.* **D1**, 94 (1970).
D. J. CRENNEL et. al., *Phys. Rev. Letters* **24**, 781 (1970).
C. D. FROGGRATT and G. RANFT, University College London preprint (1970).
D. GRIFFITHS, *Nuclear Physics* **B18**, 24 (1970).
(107) D. G. SUTHERLAND, *Nuovo Cimento* **48**, 188 (1967).
(108) G. SHAW, *Phys. Rev. Letters* **18**, 1025 (1967).
(109) B. R. MARTIN and C. MILLER, private communication. Preliminary work only. The solution referred to in the text is only one of various possible ones.
(110) C. LOVELACE, R. M. HEINZ and A. DONNACHIE, *Phys. Letters*, **22**, 332 (1966).
(111) J. ENGELS, *Nuclear Physics* **B25**, 141 (1970).
H. SCHLAILE, Karlsruhe University Thesis (1970).
R. STAUSS, Karlsruhe University Thesis (1970).
(112) Springer Tracts in Modern Physics, Compilation of coupling constants and low energy parameters, **55**, 239 (1970).
(113) See, for instance:
F. HALZEN, Duality and Backward peaks, CERN preprint TH 1319 (1971).

Composto e impresso na Tip. Matemática, Lda. — R. Diário de Notícias, 134-1.º-Esq. — Lisboa

Toute la correspondance concernant la rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Prix de l'abonnement:	250 escudos (US $8.50) par volume
Prix des volumes déjà parus:	300 escudos (US $10)
Prix du fascicule:	75 escudos (US $2.50)

Les membres de la «Sociedade Portuguesa de Química e Física» ont une réduction de 50 % sur les prix indiqués.

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Scientifiques et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu detaillé de tous les ouvrages soumis à la rédaction en deux exemplaires.

All mail concerning PORTUGALIAE PHYSICA to be addressed to:

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Subscription rates:	250 escudos (US $8.50) per volume
Price of past volumes:	300 escudos (US $10)
Price of copy:	75 escudos (US $2.50)

Members of the «Sociedade Portuguesa de Química e Física» may obtain *Portugaliae Physica* at a reduced price (50 %).

Universities, Physics Laboratories, Academies, Scientific Societies and Physics Publications are invited to receive this review in exchange for their publications.

PORTUGALIAE PHYSICA will give a detailed report of any book if two copies have been submitted

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 7
FASCÍCULO 3-4
1972

INSTITUTO DE ALTA CULTURA
CENTROS DE ESTUDOS DE FÍSICA DAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS

PORTUGALIAE PHYSICA

Fundadores: A. Cyrillo Soares, M. Telles Antunes, A. Marques da Silva, M. Valadares.

VOLUME 7 1972 FASCÍCULO 3-4

VOLUMES PUBLICADOS:

Vol. 1 — 1943-45 — 326 pp.

Vol. 2 — 1946-47 — 256 pp.

Vol. 3 — 1949-54 — 173 pp.

Vol. 4 — 1965-66 — 304 pp.

Vol. 5 — 1967-70 — 194 pp.

Vol. 6 — 1970-71 — 316 pp.

Vol. 7 — 1971-72 — 210 pp.

Redacção: Laboratório de Física da Faculdade de Ciências — Lisboa-2 (PORTUGAL)

Comissão de redacção:

J. Moreira de Araújo — Carlos Braga — Carlos Cacho — A. Pires de Carvalho — M. Abreu Faro — J. Gomes Ferreira — F. Bragança Gil — Manuel Laranjeira. Amaro Monteiro — J. Pinto Peixoto — J. da Providência — Lídia Salgueiro — J. de Almeida Santos — José Sarmento — António da Silveira — J. Veiga Simão.

ÍNDICE

(Table des matières)

Contribution à l'étude de l'anisotropie des materiaux ferromagnétiques, par Luís V. Brito Frazão 87

Liste des publications reçues actuellement en échange avec Portugaliae Physica 205

Instructions pour les auteurs 209

CDU 53 (469) (05)

PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 7
FASCÍCULO 3-4
1972

CONTRIBUTION À L'ETUDE DE L'ANISOTROPIE DES MATERIAUX FERROMAGNÉTIQUES (*)

LUIS V. BRITO FRAZÃO (**)

ABSTRACT — The present work begins with a survey of ferromagnetic anysotropies and discusses the methods used in their experimental determination.

A detailed description of the experimental device realised — a Rotating sample magnetometer — is then given. This R. S. M. was conceived with the special purpose of measuring anisotropic magnetization. Special attention was paid to Eddy currents, sample geometry and the state of surface of the sample. In respect with this last point we conclude that spherical samples cut directly by the sparking machine are less perturbated that those obtained by any other method.

Temperature limitations of this kind of measurements are also discussed.

Two independent signal data analysing techniques were utilised — synchronous detection and correlation. A very cheap and sensitive home-made correlator is discribed.

The measurement method we describe is of very rapid and easy manupulation and its sensitivity is only surpassed by two very sensitive torque magnetometers.

(*) Thése présentée à l'Université de Grenoble pour obtenir le grade de Docteur-és-Sciences Physiques.

Reçu 10 Novembre 1971.

(**) Adresse actuelle: Instituto de Física e Matemática — Avenida Prof. Gama Pinto, Lisboa 4 — Portugal.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION 91

CHAPITRE I — *ANISOTROPIE MAGNETOCRISTALLINE ET ANISOTROPIE DE L'AIMANTATION: DESCRIPTION ET METHODES DE MESURE* . . 93

I — *L'anisotropie ferromagnetique: description phenomenologique* 93

II — *Methodes experimentales de mesure* 96

A — Mesure des courbes d'aimantation du cristal suivant différentes directions du champ appliqué 97

B — La résonance ferromagnétique 99

C — Mesures de couples 100

D — Magnétomètre à échantillon tournant . . . 101

CHAPITRE II — *APPAREILLAGE DE MESURE.* 103

I — *Introduction* 103

II — *Principe de mesure* 104

III — *Les bobines de mesure* 105

IV — *Description de l'ensemble de l'appareil* 113

V — *Traitement du signal* 115

A — Le signal de référence 116

B — La détection synchrone: amplificateur à détection synchrone 117

C — La corrélation 120

VI — *Les echantillons* 124

A — Découpage et forme 124

B — Fixation de l'échantillon: le porte-échantillon 127

VII — *Performances et limitations de l'appareillage.* . . . 128

CHAPITRE III — *DETERMINATION DES CONSTANTES D'ANISOTROPIE MAGNETOCRISTALLINE ET D'ANISOTROPIE DE L'AIMANTATION PAR LA METHODE DU MAGNETOMETRE A ECHANTILLON TOURNANT* 131

I — *Anisotropie magnetique et magnetometre a echantillon tournant* 131

II — *Effet des courants de Foucault dans l'echantillon.* . 135

III — *Les mesures par detection synchrone.* 138

IV — *Les mesures par correlation.* 142

V — *Resultats obtenus sur le nickel* 146

VI — *Etat de surface de l'echantillon: son influence sur les mesures d'anisotropie de l'aimantation* 156

VII — *Resultats obtenus sur l'alliage CoFe (8% Fe)* . . 164

CHAPITRE IV — *QUELQUES CONSIDERATIONS THEORIQUES* 169

Conte premier 169

Conte deuxieme. 172

Conte troisieme. 175

Conte quatrieme 178

CONCLUSION 179

APPENDICE I 181

APPENDICE II 187

APPENDICE III. 195

REFERENCES 199

REMERCIEMENTS 203

INTRODUCTION

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une étude menée au Laboratoire d'Electrostatique et de Physique du Métal et relative à l'anisotropie des métaux ferromagnétiques et de leurs alliages.

Cette étude a commencé avec les travaux d'Aubert [2] sur l'anisotropie magnétocristalline du nickel; il a effectué la première détermination de l'anisotropie de l'aimantation et a montré la nécessité de tenir compte de celle-ci pour l'interprétation des mesures de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline.

Ce résultat était d'autant plus intéressant qu'un travail publié par Callen ef Callen [1] prévoyait pour le fer et le nickel une anisotropie de l'aimantation «... immeasurably small at all temperatures and vanishing at 0 °K ...». Il nous est donc paru intéressant de continuer les expériences commencées par Aubert en élargissant la gamme de température et en réalisant un dispositif expérimental de mesure directe d'anisotropie de l'aimantation qui complétait aussi les mesures indirectes obtenues avec la balance de torsion. Pour mener à bien notre traivail, nous avons dû construire et mettre au point un appareillage approprié, réaliser un système de détection du signal et choisir convenablement les échantillons à étudier.

L'exposé de ce travail est divisê en quatre chapitres.

Au chapitre I, nous rappelons les définitions de l'anisotropie magnétocristalline et de l'anisotropie de l'aimantation ainsi que les relations qui les lient, conformément à l'analyse thermodynamique proposée par Aubert. Nous passons aussi en revue les différentes méthodes expérimentales de mesure de l'anisotropie.

Au chapitre II, nous décrivons l'appareillage de mesure ainsi que son fonctionnement.

Au chapitre III, nous discutons la détermination des constantes d'anisotropie magnétocristalline et de l'aimantation par chacune des méthodes de mesures mises au point et présentons les résultats obtenus.

Enfin, au chapitre IV, est donné un bref rappel des théories existantes sur l'anisotropie des ferromagnétiques.

CHAPITRE I

Anisotropie magnétocristalline et anisotropie de l'aimantation. Description et methodes de mesure

I — L'anisotropie ferromagnétique: description phenomenologique.

Dans un matériau ferromagnétique, l'énergie ainsi que le module de l'aimantation dépendent de la direction de l'aimantation par rapport aux axes cristallographiques. Les propriétés qui en résultent peuvent être décrites en introduisant les notions d'anisotropie de l'énergie et de l'aimantation. L'anisotropie de l'énergie — anisotropie magnétocristalline — est étudiée depuis de nombreuses années et si du point de vue expérimental certains progrès on été réalisés par la construction de balances de torsion de plus en plus performantes, il manque toujours une interprétation théorique dans le cadre d'un modèle rigoureux.

La mesure de l'anisotropie de l'aimantation apporte des informations complémentaires très importantes pour l'étude de l'origine de l'anisotropie des corps ferromagnétiques. Dans ce travail, nous envisageons également l'anisotropie magnétocristalline étant donné son étroite liaison avec l'anisotropie de l'aimantation. En fait, ainsi que le proposent schématiquement Callen et Callen [1] (figure 1), l'existence d'une anisotropie de l'énergie implique l'existence d'une anisotropie de l'aimantation. Dans une direction de facile aimantation, l'anisotropie a tendance à maintenir les spins individuels alignés et augmenter ainsi le module de l'aimantation; dans une direction de difficile aimantation, l'anisotropie fait augmenter la déviation angulaire des spins et fait décroître l'aimantation. Ce modèle a été le premier à être présenté pour interpréter l'anisotropie de l'aimantation. D'autres modèles ont

été présentés par la suite. Nous l'avons toutefois retenu parce qu'il permet une représentation simple de l'anisotropie de l'aimantation. En particulier, ce modèle prévoit que l'anisotropie de l'aimantation s'annulera à 0 °K puisque tous les spins sont alors parallèles quelle que soit la direction considérée.

Nous allons rappeler les résultats du calcul thermodynamique effectué par Aubert [2] et qui sont à la base de toutes les notions auxquelles nous aurons recours. L'anisotropie magnétique

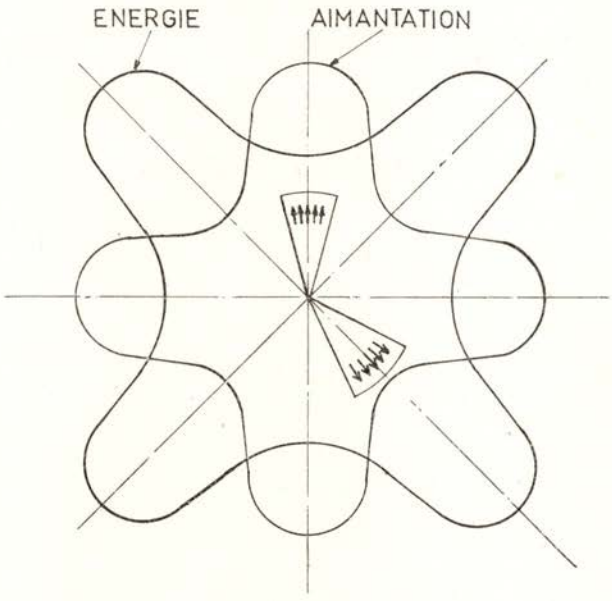


Fig. 1

d'un cristal ferromagnétique s'introduit en exprimant que l'énergie libre du cristal est fonction de la direction du vecteur aimantation $\vec{M}$, par rapport aux axes cristallographiques.

Considérons le cas d'un monocristal ferromagnétique placé dans un champ extérieur suffisant pour qu'il soit monodomaine et d'une géométrie telle que le champ démagnétisant soit uniforme à l'intérieur de l'échantillon. L'expression la plus générale consiste à développer cette énergie en harmoniques sphériques $Y_n^m(\theta, \varphi)$ de la direction θ et φ de $\vec{M}$ sous la forme

$$(1) \qquad E_a = \sum_n B_n \sum_{m=-n}^{n} C_n^m \, Y_n^m(\vartheta, \varphi)$$

où les C_n^m sont des nombres déterminés par symétrie du réseau cristallin et les B_n sont des coefficients caractérisant les propriétés anisotropes du matériau et appelés «constantes d'anisotropie». Cette expression de l'énergie libre ne contient pas le terme $-\vec{M} \cdot \vec{H}$ d'interaction avec le champ extérieur $\vec{H}$, ni l'énergie du champ démagnétisant dépendante de la forme de l'échantillon.

Nous introduisons la fonction de Gibbs du système

$$(2) \qquad G(T, H_M, \vartheta, \varphi) = U - TS - M \cdot H_M$$

les quatre variables indépendantes de G sont $T, H_M, \vartheta, \varphi$, et sachant que $dU = T\,dS - \vec{H} \cdot d\vec{M}$, on obtient

$$(3) \qquad dG = -S\,dT - M\,dH_M + H_\vartheta M\,d\vartheta + H_\varphi M \cdot \sin\vartheta\, d\varphi$$

H_M, H_ϑ et H_φ sont les composantes du champ extérieur $\vec{H}$ dans le système de coordonnées sphériques utilisées.

De l'expression (3), en obtient:

$$(4) \qquad M = -\frac{\partial G}{\partial H_M}$$

où H_M est la composante de $\vec{H}$ dans la direction de $\vec{M}$.

On peut développer G en harmoniques sphériques:

$$(5) \qquad G = \sum_n B'_n(T, H_M) \sum_{m=-n}^{+n} C_n'^m \, Y_n^m(\vartheta, \varphi).$$

Cette expression caractérise les propriétés anisotropes de l'échantillon considéré, les $C_n'^m$ sont déterminés par les conditions de symétrie non seulement du réseau mais aussi de l'échantillon. Pour le cas d'une sphère $C_n'^m = C_n^m$. L'expression (4) montre que le module de l'aimantation est anisotrope:

$$(6) \qquad M = \sum_n M_n \sum_{m=-n}^{n} C_n'^m \, Y_n^m(\vartheta, \varphi)$$

avec

$$M_n = -\frac{\partial B'_n}{\partial H_M}. \tag{7}$$

Pour un échantillon sphérique, on peut montrer que:

$$B'_n = B_n - M_n H_{i_M} \text{ avec } H_{i_M} = H_M - \frac{4\pi}{3} M. \tag{8}$$

Pour faciliter les calculs, on a souvent recours au développement de E_a et de M en fonction des cosinus directeurs $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ de $\vec{M}$ par rapport aux axes quaternaires du cristal

$$E_a = K_0 + K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 + \\ + K_3(\alpha_1^4\alpha_2^4 + \alpha_2^4\alpha_3^4 + \alpha_3^4\alpha_1^4) + \cdots \tag{9}$$

et

$$M = M_0 + M_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + M_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 + \\ + M_3(\alpha_1^4\alpha_2^4 + \alpha_2^4\alpha_3^4 + \alpha_3^4\alpha_1^4) + \cdots \tag{9}$$

Dans la suite de l'exposé, nous utiliserons les développements de E_a et M en cosinus directeurs, faisant intervenir les constantes K_1, K_2, K_3 et M_1, M_2, M_3 avec

$$K'_n = K_n - M_n H_{i_M}. \tag{10}$$

II — Méthodes expérimentales de mesure.

Plusieurs méthodes expérimentales sont utilisées pour la détermination des constantes d'anisotropie magnétocristalline. Parmi celles-ci citons particulièrement les courbes d'aimantation, les mesures de couples et la résonance ferromagnétique. Pour la mesure des constantes d'anisotropie de l'aimantation, la première méthode directe est celle connue sous le nom de magnétomètre à échantillon (ou champ) tournant. Dernièrement l'analyse des courbes d'aimantation [6] a permis de faire une mesure directe de la différence d'aimantation entre deux directions cristallogra-

phiques déterminées. La méthode des couples ne permet qu'une mesure indirecte des constantes d'anisotropie de l'aimantation.

A — **Mesure des courbes d'aimantation du cristal suivant différentes directions du champ appliqué.**

Cette méthode consiste à tracer, pour plusieurs directions du champ appliqué $\vec{H}$, les courbes $M(H_i)$, aimantation du cristal dans la direction de $\vec{H}$, en fonction du champ H_i, champ extérieur corrigé du champ démagnétisant. Ce champ doit atteindre une valeur H_{is} suffisante pour que l'échantillon soit monodomaine.

On calcule $\int_0^{H_{is}} M\,dH_i$

$$\int_0^{H_{is}} M\,dH_i = M_s H_{is} + E_{a_0} - E_a(\vec{\alpha}_i) \tag{11}$$

où E_{a_0} est l'énergie libre de l'échantillon à l'état désaimanté et $E_a(\vec{\alpha}_i)$ l'énergie libre de l'échantillon aimanté à saturation dans la direction $\vec{\alpha}_i$.

La détermination de l'intégrale pour plusieurs directions permet de calculer les constantes d'anisotropie.

Les limitations de cette méthode ont déjà été signalées par Aubert [2] et nous nous bornerons à les énumérer:

a) l'énergie de l'état désaimanté E_{a_0} est considérée comme une quantité reproductible;

b) la méthode ne permet pas de mesurer une variation de constantes d'anisotropie en fonction du champ appliqué;

c) les constantes d'anisotropie sont obtenues à partir de différences petites de termes beaucoup plus grands.

Krause [3, 4] a développé une autre méthode de détermination des constantes d'anisotropie magnétocristallines à partir de l'analyse des courbes d'aimantation dans le domaine de champs où il n'y a plus de déplacements de parois mais seulement rotation de l'aimantation.

Les mesures ont été effectuées sur des cristaux de symétrie cubique ayant la forme d'un prisme allongé suivant les directions $<100>$ et $<110>$.

Pour ces deux directions, on a respectivement les relations:

$$\frac{H_i M_s}{3\gamma_i^3 - \gamma_i} = -K_1 - \frac{K_2}{2}(1 - \gamma_i^2)$$

et

$$\frac{H_i M_s}{3\gamma_i^2 - 2\gamma_i} = -K_1 - \frac{K_2}{2} \cdot \gamma_i^2$$

où

$$\gamma_i = \frac{M}{M_s}.$$

L'extrapolation de ces expression pour $\gamma_i^2 = 0$ et $\gamma_i^2 = 1$ permet la détermination de K_1 et K_2.

Cet auteur indique, pour le nickel à basses températures, une précision sur les constantes K_1 et K_2:

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} = 1{,}5\,\% \qquad \frac{\Delta K_2}{K_2} = 10\,\%.$$

Les valeurs de K_1 ainsi obtenus sont en accord avec celles d'Aubert [5] dans la même gamme de température.

Aucune influence des constantes d'amisotropie de l'aimantation sur les résultats n'a été enregistrée.

Récemment, avec la possibilité de faire des mesures d'aimantation pour des valeurs du champ appliqué supérieures à 20 kOe, Rebouillat [6] a pu déterminer les différences d'aimantation entre deux directions cristallographiques déterminées à partir de l'analyse des courbes d'aimantation dans la zone de saturation.

Ainsi pour le nickel, à 4° K, il a obtenu:

$$\Delta M = M_{111} - M_{111} = 0{,}26 \text{ u. e. m./cm}^3$$

$$\Delta M = M_{111} - M_{100} = 0{,}095 \text{ u. e. m./cm}^3.$$

Ces résultats sont en excellent accord avec les récentes mesures de Aubert et Escudier [7] qui ont trouvé:

$$\Delta M = M_{111} - M_{100} = 0{,}1 \text{ u. e. m./cm}^3.$$

B — **La résonance ferromagnétique.**

On excite la précession des spins autour de leur position d'équilibre, à l'aide d'un champ alternatif hyperfréquence, appliqué perpendiculairement à un champ extérieur continu $\vec{H}_0$, suffisant pour saturer l'échantillon. La pulsation de résonance est liée à l'énergie libre F du cristal par [8]

$$(12) \qquad \omega_0^2 = \frac{\gamma^2}{M^2 \sin^2 \theta_0} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \, \partial \varphi} \right) \right]^2_{\theta_0, \varphi_0}$$

où F comprend les termes E_a, $-\vec{M}\vec{H}$ et l'énergie d'anisotropie de $\gamma = g \dfrac{e}{2mc}$, g étant le rapport gyromagnétique.

Aubert a développé l'expression (12) pour des directions particulières de $\vec{H}_0$ dans les plans $\{111\}$, $\{110\}$ et $\{100\}$.

Ainsi pour le plan $\{100\}$ et $H_0 // <110>$

$$(13) \qquad \left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2 = \left(H_0 + \frac{K_1'}{M} + \frac{K_2'}{2M} - \frac{K_3'}{2M} + 4\pi M\right)\left(H_0 - \frac{2K_1'}{M} - \frac{K_3'}{M}\right)$$

ces expressions permettant la détermination des K_n'.

En dépit des difficultés soulevés par cette technique pour le cas des métaux en raison de la faible pénétration du champ hyperfréquence, Rodbell [9] a pu déterminer les constantes K_1 et K_2 du nickel. Dernièrement, Infantes [10] a repris les expériences de Rodbell confirmant ainsi les résultats de ce dernier et montrant qu'il existe une différence entre les résultats obtenus par mesures de résonance et par mesure de couples. Cette divergence est sensible surtout pour la valeur de K_2' du nickel. Aubert [2] a suggéré que les constantes d'anisotropie obtenues par mesures de couples et par résonance ne représentaient pas la même quantité, dans un modèle où apparaît l'importance de la contribution du moment orbital. Infantes, à l'aide de la courbe qui donne le champ magnétique de résonance en fonction de la position de l'échantillon a essayé d'obtenir les termes M_1, M_2, M_3, à partir de la relation:

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = K_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \theta^2} + K_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} + K_3 \frac{\partial^2 f_3}{\partial \theta^2} +$$

$$+ H_0 \cos(\varphi - \theta)[M_0 + M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3] -$$

$$- 2 H_0 \sin(\varphi - \theta)\left[M_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + M_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta} + M_3 \frac{\partial f_3}{\partial \theta}\right] -$$

$$- H_0 \cos(\varphi - \theta)\left[M_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \theta^2} + M_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} + M_3 \frac{\partial^2 f_3}{\partial \theta^2}\right]$$

dans laquelle la position du vecteur $\vec{M}$ est repérée par les angles θ et φ et où f_1, f_2, f_3 représentent les quantités suivantes:

$$f_1 = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2$$

$$f_2 = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2$$

$$f_3 = \alpha_1^4 \alpha_2^4 + \alpha_2^4 \alpha_3^4 + \alpha_3^4 \alpha_1^4$$

En ajustant les courbes expérimentales et théoriques, et utilisant des valeurs de K_1, K_2, K_3 obtenues par des mesures de couples, en obtient pour M_1, M_2 et M_3 les valeurs:

$$M_1 = 0{,}2 \pm 0{,}2 \text{ u. e. m./cm}^3$$

$$M_2 = 0{,}4 \pm 1 \text{ u. e. m./cm}^3$$

$$M_3 = 0{,}15 \pm 1 \text{ u. e. m./cm}^3.$$

Ceci montre qu'une détermination des constantes d'anisotropie de l'aimantation par cette méthode n'est pas envisageable pour l'instant.

Une limitation des expériences de résonance ferromagnétique est liée au fait qu'elles sont très influencées par l'état de surface de l'échantillon. Ceci a été démontré par Frait [11] qui a effectué des mesures sur différents échantillons taillés dans le même monocristal.

C — Mesures de couples.

Un échantillon monocristallin fixe est placé dans un champ magnétique statique $\vec{H}$, suffisant pour le saturer. La direction prise par le vecteurs aimantation est alors celle qui minimise

l'énergie libre. Dans cette position du vecteur aimantation, le couple dû à l'énergie d'anisotropie est compensé par le couple exercé par le champ appliqué.

Deux méthodes de mesure de couples sont couramment utilisées:

a) la méthode de déflection selon laquelle on mesure l'angle de déflection du cristal. Cet angle est pris comme une mesure du couple exercé sur l'échantillon [12].

b) la méthode de zéro selon laquelle on maintient l'échantillon immobile. Le couple mécanique nécessaire pour le faire donne alors la valeur du couple d'anisotropie [2].

L'utilisation de ces méthodes, et en particulier de la méthode de zéro, a permis d'obtenir une détermination très précise de l'énergie d'anisotropie et des constantes d'anisotropie magnétocristalline. Cette méthode permet aussi, avec un appareillage et des techniques d'analyse appropriées, la détermination des constantes d'anisotropie de l'aimantation. Pour cela on étudie la variation des constantes K'_n en fonction du champ H_{i_M}, champ extérieur corrigé du champ démagnétisant.

D — Magnétomètre à échantillon tournant.

On fait tourner à vitesse constante un échantillon monocristallin autour d'un axe cristallographique donné, dans un champ magnétique statique $\vec{H}$ appliqué perpendiculairement à l'axe de rotation; grâce à un système de bobines dont l'axe est soit parallèle au champ, soit perpendiculaire, on peut déterminer les variations des composantes du vecteur aimantation dans ces deux directions. Comme nous le discuterons en détail au chapitre II, l'orientation parallèle permet l'étude de l'anisotropie de l'aimantation, tandis qu'avec l'orientation perpendiculaire, on peut mesurer l'anisotropie de l'énergie.

CHAPITRE II

Appareillage de mesure

I — Introduction.

Il n'existe pratiquement que deux méthodes directes d'étude de l'anisotropie de l'aimantation des corps ferromagnétiques: l'analyse des courbes d'aimantation à champs très élevées et la méthode du magnétomètre à échantillon tournant. Nous avons choisi cette dernière, Aubert [2] avait à l'époque où nous commencions cette étude déjà réalisé un premier appareillage qui démontrait qu'une mesure directe de l'anisotropie de l'aimantation du nickel était possible. Il nous fallait améliorer cet appareil, l'adaptant à une gamme de température plus étendue, et revoir entièrement le problème du traitement du signal.

Afin de justifier le choix que nous avons fait, nous soulignons trois avantages immédiats du magnétomètre à échantillon tournant:

a) rapidité de mesure accrue par rapport à celle obtenue par la méthode de la balance de torsion — mesure de couples;

b) possibilité de mesurer aussi bien les constantes d'anisotropie de l'aimantation que celles d'anisotropie magnétocristalline, et ainsi de comparer nos résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes;

c) prix de revient de l'ensemble relativement faible comparé à n'importe quelle autre méthode.

II — Principe de mesure.

La mesure s'effectue par une méthode d'induction, en faisant tourner un échantillon ferromagnétique dans un champ magnétique statique. Plusieurs appareils utilisant un tel principe ont déjà été réalisés pour l'étude de diverses propriétés des corps ferromagnétiques [13, 14, 15, 16]. Ils sont connus dans la littérature sous le nom de «Rotating Sample Magnetometer» (R. S. M.).

La figure 2 présente schématiquement le principe R. S. M. L'échantillon ferromagnétique est placé dans un champ magnétique $\vec{H}$ et tourne à vitesse constante autour d'un axe OZ perpendiculaire à la direction du champ. L'aimantation tournera dans le plan XOY à condition que ce plan soit un plan de symétrie du cristal. Un système de bobines détecte les variations du flux magnétique au cours de la rotation. La f. e. m. induite

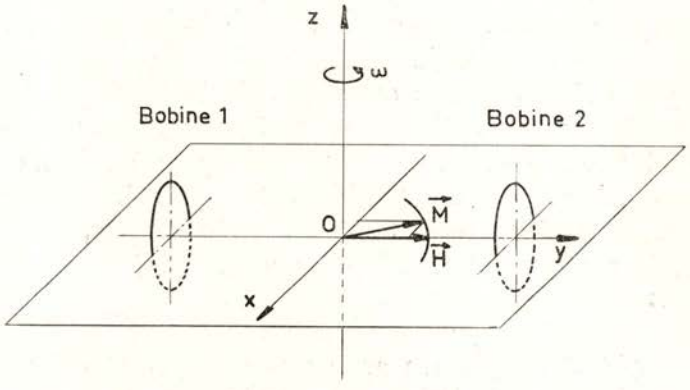


Fig. 2

contient toutes les informations sur l'anisotropie magnétocristalline et de l'aimantation, ainsi que sur l'amplitude de l'aimantation. Ces informations peuvent être obtenues par l'analyse des harmoniques produites au cours de la rotation.

Du point de vue pratique, la construction d'un appareillage adapté à nos besoins comporte quatre étapes essentielles que nous allons mentionner et dont la discussion sera l'objet des paragraphes suivants:

a) le choix d'un système de bobines adapté à la mesure d'une très petite variation d'aimantation;

b) la construction d'un ensemble mécanique, assurant une grande stabilité, une rotation uniforme de l'échantillon autour d'un axe donné, et le moins possible de vibrations de l'échantillon;

c) le choix du système adapté au traitement du signal obtenu;

d) la fabrication et la préparation des échantillons.

III — Les bobines de mesure.

Dans le cours de notre étude, nous avons étudié et réalisé des bobines de géométries diverses, adaptées aux nécessités expérimentales de notre montage, leurs caractéristiques essentielles étant:

a) des dimensions compatibles avec l'entrefer de l'électroaimant dont nous disposions (40 mm);

b) une compensation soignée afin d'éliminer les contributions dues aux éventuelles fluctuations du champ appliqué;

c) une possibilité d'orientation de leur axe par rapport à la direction du champ;

d) une géométrie donnant un signal utile de l'ordre de quelques dizaines de nanovolts afin d'avoir un rapport signal sur bruit exploitable dans l'état actuel de l'électronique.

Nous allons décrire les deux systèmes qui nous ont permis d'obtenir les meilleurs résultats:

1 — Système de bobines fixes, de grande surface, extérieures à l'enceinte cryogénique;
2 — Système de bobines mobiles, de plus petite surface, placées près de l'échantillon, à l'intérieur de l'enceinte cryogénique.

Système de Bobines 1:

Chronologiquement, nous avons commencé par le système 1, dont les caractéristiques sont indiquées au Tableau 1. Le calcul des dimensions optima a été fait à l'aide d'un programme exploité

à l'ordinateur et dont le principle est le suivant. On calcule le maximum de la fonction $P = F^2/R$, où F est le flux d'un dipole à travers une bobine cylindrique, R étant sa résistance. Ce calcul présente l'avantage d'être indépendant du diamètre de fil à utiliser, permettant ainsi ultérieurement l'adaptation de l'impédance des bobines aux exigences de l'électronique d'amplification. Le calcul se fait en faisant varier les dimensions de la bobine intérieure pas à pas. Une partie des résultats est montrée sur la figure 3. Une fois les bobines réalisées et assemblées, elles prennent l'emplacement indiqué sur la figure 4. La fixation se fait par l'intermédiaire de trois ressorts qui permettent en même temps un réglage de position par rapport aux pièces polaires.

Ce système à l'aide duquel nous avons pu obtenir de nombreux résultats présentait néanmoins quelques inconvénients, rendant son utilisation «peu commode». Le principal résidait dans la difficulté d'aligner l'axe des deux bobines entre elles et l'ensemble par rapport à la direction du champ. Ce dernier point est particulièrement important, puisqu'une petite déviation «ε» de l'axe des bobines par rapport à la direction du champ introduit dans la composante de l'aimantation intervenant pour le calcul du flux

$$M_m = M[\cos(\vec{M}, \vec{H}) + \varepsilon \cdot \sin(\vec{M}, \vec{H})] \tag{15}$$

une contribution des termes d'anisotropie magnétocristalline sous la forme $M \cdot \sin(\vec{M}, \vec{H}) =$ Couple d'anisotropie / Champ appliqué.

Comme nous le verrons au chapitre III, l'expression de la f. e. m. induite, dans le cas d'un échantillon sphérique tournant autour d'un axe [100] sera donné par

$$e \sim \omega \left[\left(\frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{8} \right) \sin 4\varphi + 2\varepsilon \frac{K_1'}{H} \cos 4\varphi \right] \tag{16}$$

si on se limite à l'harmonique 4 du développement en série de Fourier de l'expression de la f. e. m. induite.

Ainsi par exemple, pour le nickel à 20° C et pour un champ appliqué de 10000 Oe, $K_1 = -5.10^4$ erg/cm^3 et $\frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{8} = 0{,}2$ u. e. m./cm^3, une désorientation de 1° donnerait une contribution de 0,1 u. e. m./cm^3, qui est de l'ordre de grandeur du terme à

$X = 0{,}400$	$Y = 2{,}100$		$Z = 4{,}874$	$T = 5{,}000$
$R = 3{,}295098$	$F = 0{,}144372$	$P = 0{,}006326$		
$X = 0{,}400$	$Y = 2{,}200$		$Z = 4{,}855$	$T = 5{,}000$
$R = 3{,}667144$	$F = 0{,}155887$	$P = 0{,}006627$		
$X = 0{,}400$	$Y = 2{,}300$		$Z = 4{,}833$	$T = 5{,}000$
$R = 4{,}062583$	$F = 0{,}167248$	$P = 0{,}006885$		
$X = 0{,}400$	$Y = 2{,}400$		$Z = 4{,}809$	$T = 5{,}000$
$R = 4{,}482056$	$F = 0{,}178399$	$P = 0{,}007101$		
$X = 0{,}400$	$Y = 2{,}500$		$Z = 4{,}783$	$T = 5{,}000$
$R = 4{,}926150$	$F = 0{,}189291$	$P = 0{,}007273$		
$X = 0{,}400$	$Y = 2{,}600$		$Z = 4{,}755$	$T = 5{,}000$
$R = 5{,}395894$	$F = 0{,}199873$	$P = 0{,}007404$		
$X = 0{,}400$	$Y = 2{,}700$		$Z = 4{,}723$	$T = 5{,}000$
$R = 5{,}891733$	$F = 0{,}210101$	$P = 0{,}007492$		
$X = 0{,}400$	$Y = 2{,}800$		$Z = 4{,}689$	$T = 5{,}000$
$R = 6{,}414575$	$F = 0{,}219931$	$P = 0{,}007541$		
$X = 0{,}400$	$Y = 2{,}900$		$Z = 4{,}652$	$T = 5{,}000$
$R = 6{,}965288$	$F = 0{,}229316$	$P = 0{,}007550$		
$X = 0{,}400$	$Y = 3{,}000$		$Z = 4{,}611$	$T = 5{,}000$
$R = 7{,}544772$	$F = 0{,}23212$	$P = 0{,}007521$		
$X = 0{,}400$	$Y = 3{,}100$		$Z = 4{,}567$	$T = 5{,}000$
$R = 8{,}154027$	$F = 0{,}246573$	$P = 0{,}007456$		
$X = 0{,}400$	$Y = 3{,}200$		$Z = 4{,}519$	$T = 5{,}000$
$R = 8{,}794159$	$F = 0{,}254347$	$P = 0{,}007356$		
$X = 0{,}400$	$Y = 3{,}300$		$Z = 4{,}467$	$T = 5{,}000$
$R = 9{,}466269$	$F = 0{,}261481$	$P = 0{,}007223$		
$X = 0{,}400$	$Y = 3{,}400$		$Z = 4{,}410$	$T = 5{,}000$
$R = 10{,}171701$	$F = 0{,}267915$	$P = 0{,}007057$		
$X = 0{,}400$	$Y = 3{,}500$		$Z = 4{,}348$	$T = 5{,}000$
$R = 10{,}911892$	$F = 0{,}273580$	$P = 0{,}006859$		
$X = 0{,}400$	$Y = 3{,}600$		$Z = 4{,}280$	$T = 5{,}000$
$R = 11{,}688463$	$F = 0{,}278398$	$P = 0{,}006631$		
$X = 0{,}400$	$Y = 3{,}700$		$Z = 4{,}206$	$T = 5{,}000$
$R = 12{,}503252$	$F = 0{,}282274$	$P = 0{,}006373$		

Fig. 3

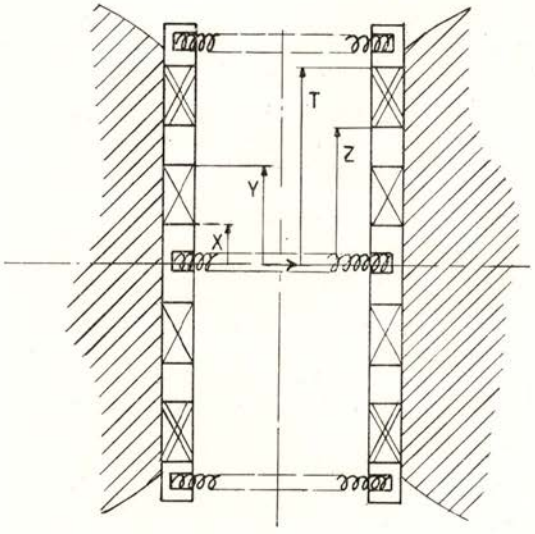


Fig. 4.

TABLEAU 1

calculée cab 500	bob. de mesure	bob. de compensation
	$X = 0{,}4$ cm $Y = 2{,}9$ cm	$Z = 4{,}65$ cm $T = 5{,}00$ cm
enroulement	cuivre emaillé Φ 15/100 mm	
Nb. spires	4956	690
resistance	505 Ω	211 Ω
surface	48.000 cm²	48.000 cm²

mesurer. Il nous faut donc arriver à réduire ε à quelques minutes d'arc si l'on veut rendre cette contribution négligeable ce qui ne s'est pas passé sans quelques difficultés.

D'autre part, l'absence de guidage mécanique — le champ magnétique empêchant l'utilisation de roulements à billes — pour le système tournant, faisait apparaître des vibrations au niveau de l'échantillon. On engendrait ainsi des signaux à basse fréquence qui perturbaient les mesures. Il est important de souligner qu'une vibration, ou une rotation excentrée de l'échantillon fait intervenir une variation de flux proportionnelle à M_s, aimantation à saturation, cette variation étant à comparer à celle induite par l'anisotropie de l'aimantation ΔM. Pour le nickel à 20° C, le rapport des variations de flux induites par une vibration d'amplitude $\delta r = 10^{-1}$ mm, autour de la position d'équilibre et les variations de flux induites par l'anisotropie de l'aimantation ΔM est de 10^{-2}. Il apparaissait nécessaire de réduire les vibrations jusqu'à une amplitude maximale de 10^{-2} mm.

L'utilisation d'un guidage par trois pointes en teflon, ou l'amortissement des vibrations en plongeant le système tournant dans de la glycérine nous a permis de résoudre momentanémant le problème, mais il apparaissait nécessaire de revoir entièrement la question.

Un autre argument en faveur de ce dernier point était que pour pouvoir exploiter nos mesures nous devions utiliser les valeurs des constante d'anisotropie magnétocristalline obtenues par d'autres méthodes. Ceci rendait nos résultats dépendants de ces méthodes.

Système de Bobines 2 :

Nous avons ainsi étudié un système de bobines répondant aux caractéristiques énumérées en 2. Les bobines ont alors une double fonction. Détection du signal et en même temps support de guidage pour l'échantillon, éliminant ainsi les sources d'erreus provenant des vibrations mécaniques et d'un mauvais centrage de celui-ci. Ce système, de petites dimensions, était tel que l'axe des bobines pouvait prendre toutes les directions par rapport à la direction du champ et en particulier la position perpendiculaire, permettant une mesure commode des constantes d'anisotropie magnétocristalline.

Sur la figure 5 sont montrées les dimensions et les positions relatives des bobines de mesure et de la bobine de compensation.

Les caractéristiques de ces bobines sont données dans le Tableau 2.

La compensation et l'équilibrage des bobines ont été effectuées à l'aide d'un fluxmètre. Les variations de flux étaient obtenues par des variations du champ d'un électro-aimant, dans l'entrefer duquel étaient placées les bobines. Nous avons ainsi pu réaliser une compensation à mieux que 10^{-5}.

Nous avons fait le calcul approché du flux à travers les bobines en fonction de la position du dipole $\vec{m}$ de coordonnées cartésiennes α, β et γ en considérant quatre spires de rayons moyen R comme le montre la figure 6.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \qquad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \tag{17}$$

$$\Phi = \int_S \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{18}$$

où $\vec{A}$ représente le potentiel vecteur, S et C respectivement la surface et la longueur de la spire, le flux total étant donné par

$$\Phi_T = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \cdot \sum_{i=1}^{4} \frac{\vec{r}_i \Lambda\, d\vec{l}_i}{r_i^3} \tag{19}$$

ou

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{0_1 M_i}.$$

La composante du produit vectoriel suivant Y se réduit à l'expression

$$\Phi_T = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} (R^2 - R(\alpha \sin\theta + \gamma \cos\theta))(r_1^{-3} + r_2^{-3} - r_3^{-3} - r_4^{-3})\, d\theta + \right.$$
$$\left. + \int_0^{2\pi} R Z_0 \cos\theta \left(\frac{1}{r_3^3} + \frac{1}{r_4^3} \right) d\theta \right] \tag{20}$$

avec $r_1^2 = (R \sin\theta - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 + (R\cos\theta - \gamma)^2$ et des expressoins similaires pour r_2^2, r_3^2, r_4^2.

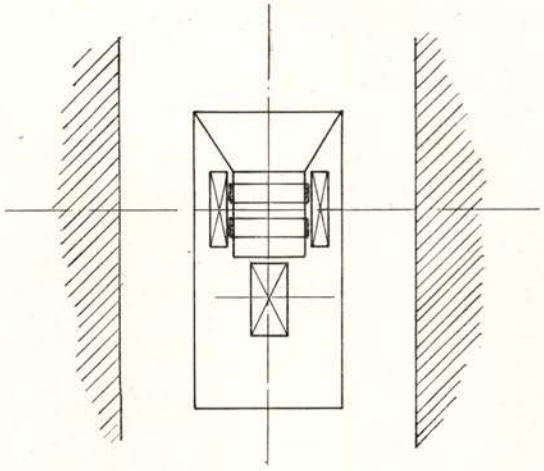


Fig. 5

TABLEAU 2

	bob. de mesure	bob. de compensation
r. int.	2,5 mm	2,5 mm
r. ext.	5 mm	5 mm
largeur	2,5 mm	5 mm
enroulement	cuivre emaillé Φ 7/100 mm	
Nb. spires	860	1720
resistance	107,5 Ω	212,3 Ω
surface	378 cm²	756 cm²

Le développement en série de Taylor de $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ s'écrit:

$$(21) \quad \Phi(\alpha,\beta,\gamma) = \Phi(0,0,0) + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}(0,0,0) + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}\right)_0 + \\ + \frac{\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2}\right)_0 + \frac{\gamma^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2}\right)_0$$

soit avec les valeurs numériques de R, z_0, y_0 et y_1 choisies:

$$(22) \quad \Phi = \frac{\mu_0 m}{4\pi}[434{,}848 - 12{,}578\,\gamma - 11{,}727\,\alpha^2 + 25{,}732\,\beta^2 - 22{,}976\,\gamma^2]$$

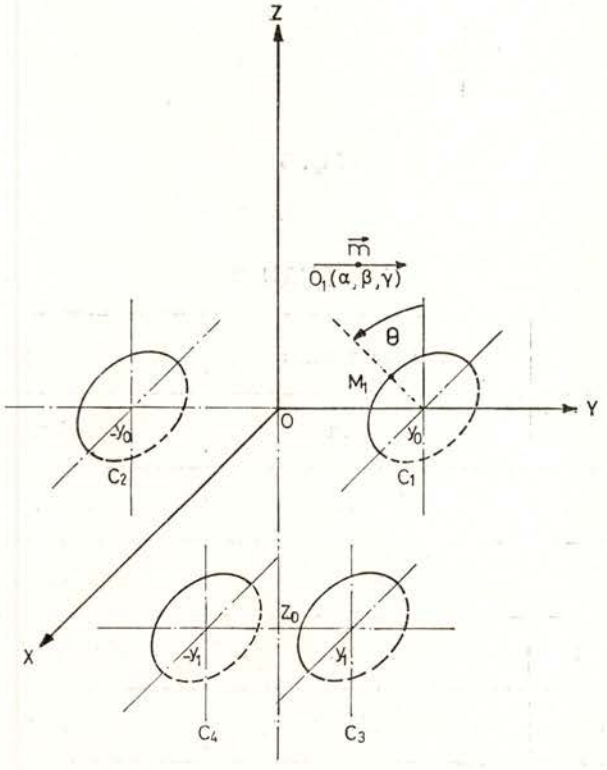


Fig. 6

α, β, γ sont exprimés en milimètres et toutes les autres quantités en MKS.

En dérivant l'expression (22) par rapport à γ on peut constater que le point de flux maximum se situe à 0,273 mm en-dessous

de (0, 0, 0). La nouvelle fonction de flux pour cette origine devient alors:

$$(23) \qquad \Phi = \frac{\mu_0 m}{4\pi}[436{,}569 - 11{,}727\,\alpha^2 + 25{,}733\,\beta^2 - 22{,}976\,\gamma^2].$$

Afin d'assembler rigidement les bobines entre elles on a utilisé la méthode suivante. Dans un rondin d'araldite chargée au talc, on a usiné des emplacements pour les bobines déjà compensées. Une fois le raccord des fils effectué, les chambrages furent remplis d'araldite au talc non polymérisée. Après polymérisation, un alesage intérieur pour le guidage du tube tournant fut usiné jusqu'à arriver à 1/10 mm des premières spires des bobines. Afin d'éviter l'usure due au frottement avec le porte-échantillon, aussi en araldite, deux bagues en bronze-béryllium furent incorporées à l'intérieur, la lubrification étant assurée par l'usage répété de teflon pulvérisé.

IV — Description de l'ensemble de l'appareil (*)

Une alimentation stabilisée VARIAN de 10 KW, régulée en courant, alimente un électro-aimant TEK-ELEC (1), permetant d'obtenir des champs allant jusqu'à 20 kOe avec une stabilité de 10^{-5} dans 1 cm^3. L'entrefer est de 40 mm, la partie rectifiée de la pièce polaire a un diamètre de 100 mm. L'échantillon (2) est placé au milieu des pièces polaires, dans un porteéchantillon qui s'adapte au tube tournant (3) avec une portée conique de centrage. Un moteur synchrone direct SLO-SYN (4) entraîne le tube tournant, par l'intermédiaire d'un arbre à roulements. Un ensemble de trois plateaux en aluminium est à la base du système de réglage qui sera décrit au papagraphe suivant. Un premier plateau (5), percé de douze trous disposés en couronne et symétriquement

(*) Les numéros cerclés correspondent aux références, sur le schéma général de la figure 7.

par rapport au centre, est fixé au tube tournant et tourne ainsi avec l'échantillon. Les deux autres plateaux (6) et (7) sont rigidement liés entre eux, mais peuvent tourner ensemble autour de l'axe. Sur (6) sont fixées deux lampes pouvant faire entre

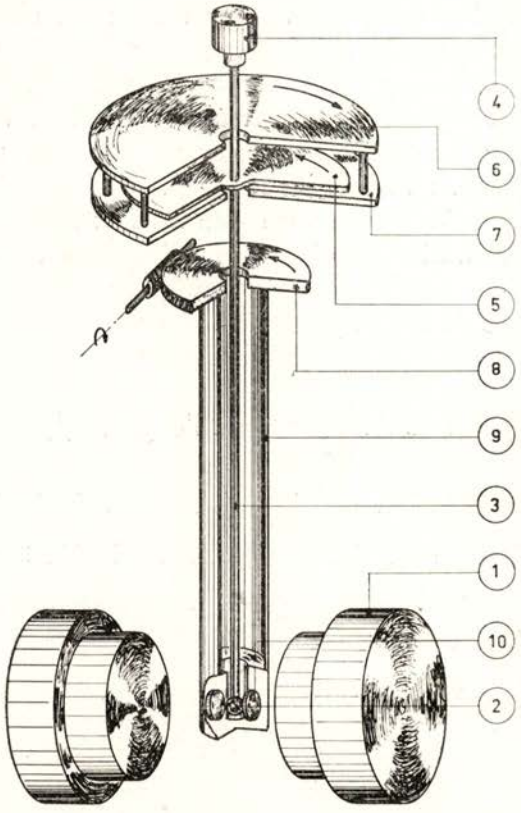


Fig. 7 — Schéma de principe du magnétomètre à échantillon tournant.

elles des angles de 30°, 45°, 60° ou 90°. Sur (7), et en face des lampes, deux cellules photoélectriques, dont une munie d'un réglage fin de position, seront excitées à chaque passage d'un trou ouvert. Pour positionner les bobines par rapport à la direction du champ, une roue dentée (8) est solidaire du tube (9), au bout

duquel est fixé le porte-bobines (10). La rotation de la roue dentée se fait soit manuellement soit à l'aide d'un moteur. L'étanchéité entre le tube (9) et le système de rotation se fait par un joint tournant en caoutchouc. A l'extérieur de ce tube est placé un autre tube fixé au chassis. L'espace entre chacun de ces tubes peut être rempli de liquide cryogénique ou d'un gaz d'échange. Cet ensemble est placé à l'intérieur d'un vase dewar en verre. Une garde d'azote permet de réduire les pertes du dewar. Ne disposant dans ce montage d'aucun moyen de régulation de température, nous avons construit une enceinte qui se substitue au cryostat, pour des mesures entre l'ambiante et — 60° C. Nous y faisons circuler un liquide cryogénique — alcool — dont la température est stabilisée par un thermostat. L'élément réfrigérant est la glace carbonique. Nous avons ainsi pu obtenir des températures allant jusqu'à — 60° C, stabilisées au niveau de l'échantillon à mieux que 0,2° C. Les fils de mesure, provenant des bobines, ainsi que ceux qui viennent de la résistance de platine de mesure de température, incorporée dans le porte bobine, se relient à l'extérieur par un prise étanche. Le dispositif est complété par un système de levage du plateau tournant, permettant un rapide accès à l'échantillon.

Une potence en bois, liée élastiquement au moteur, permet d'absorber une partie des vibrations produites par celui-ci, empêchant ainsi quelles ne se transmettent au châssis sur lequel repose tout l'ensemble du montage.

Les photos 1 et 2 donnent une vue d'ensemble de l'appareillage et un détail du système de réglage des plateaux.

V — Traitement du signal

Nous nous sommes fixés comme objectif premier la mesure directe des différentes composantes de l'anisotropie de l'aimantation; il nous faut pour cela recourir à la détection et à l'analyse individuelle de chacune des harmoniques du signal obtenu dans les bobines, jusqu'à un ordre compatible avec le niveau d'amplification dont nous disposons. Pour réaliser cette détection, nous avons eu recours à deux méthodes distinctes de traitement du signal: la détection synchrone et la corrélation.

Aussi bien pour la première que pour la seconde de ces méthodes il était indispensable de disposer d'un signal de référence, de même période fondamentale que l'harmonique à déterminer, le déphasage entre ces deux signaux devant être réglable.

Nous allons décrire sucessivement le signal de référence, la méthode de détection synchrone et la méthode de corrélation.

La formulation mathématique de ces deux méthodes est rappelée brièvement aux Appendices I et II.

A — Le signal de référence.

Comme nous l'avons signalé au paragraphe précédent, c'est l'ensemble des plateaux (5), (6), et (7) qui sont à la base du système de génération du signal de référence. Au cours de la rotation, le plateau (5) permet l'excitation de deux cellules

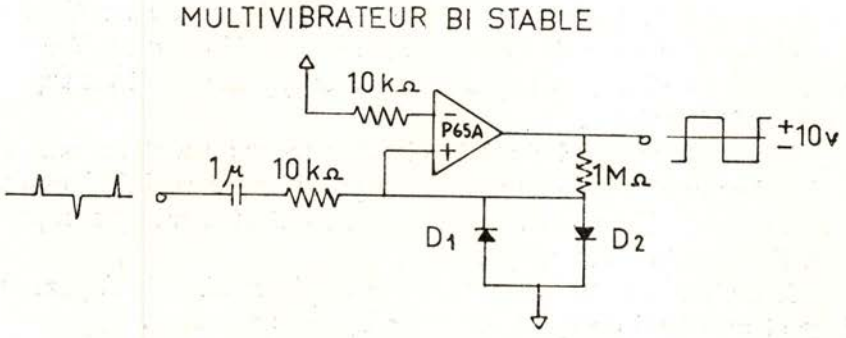


Fig. 8

photoélectriques, sous la forme d'un nombre d'impulsions multiple de la fréquence de rotation de l'échantillon. Ces impulsions, de polarité alternée, «attaquent» um multivibrateur bistable, construit à l'aide d'un amplificateur opérationnel, et dont le schéma est montré sur la figure 8.

Um multivibrateur bistable est un circuit à deux états stables; il va rester indéfiniment dans un de ces états jusqu'à ce qu'une impulsion de polarité opposée le fasse changer. Nous obtenons en sortie une function qui sert de signal de référence et qui dans le cas qui nous concerne est une fonction carrée.

PHOTO 1

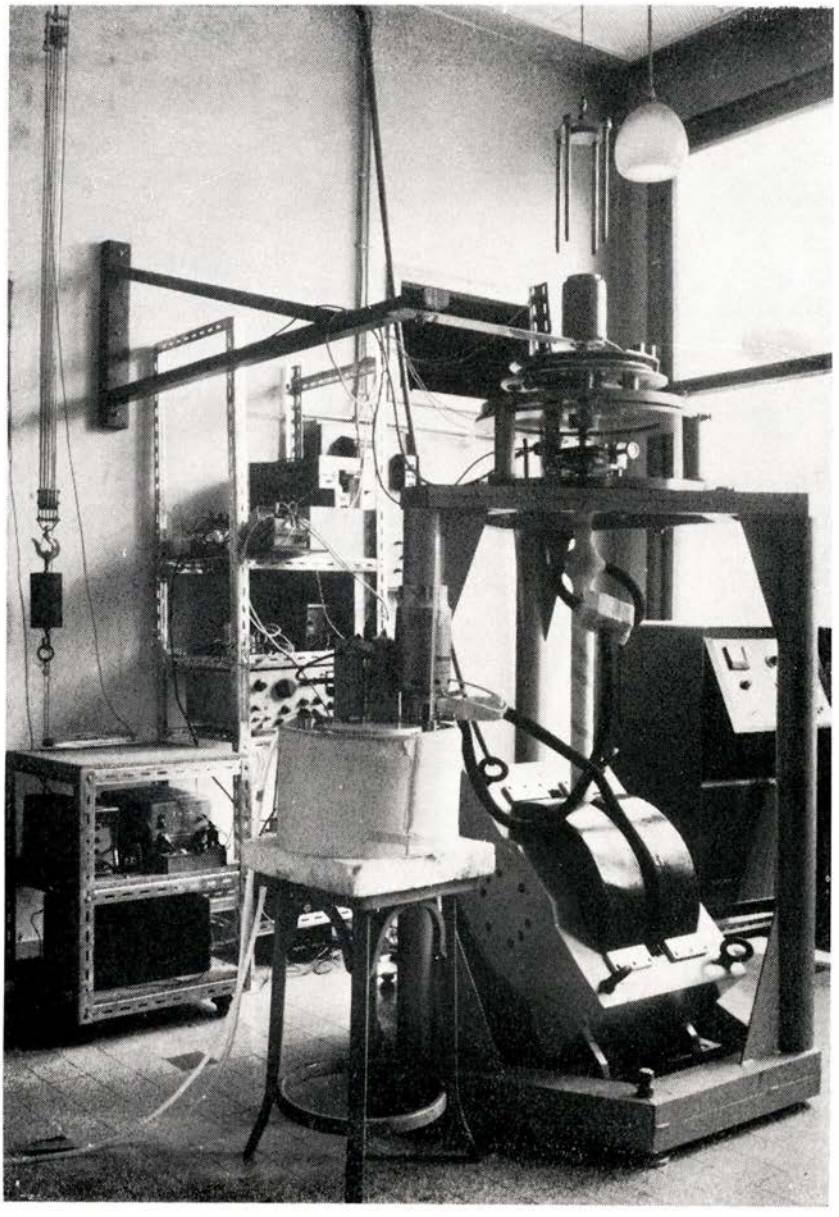
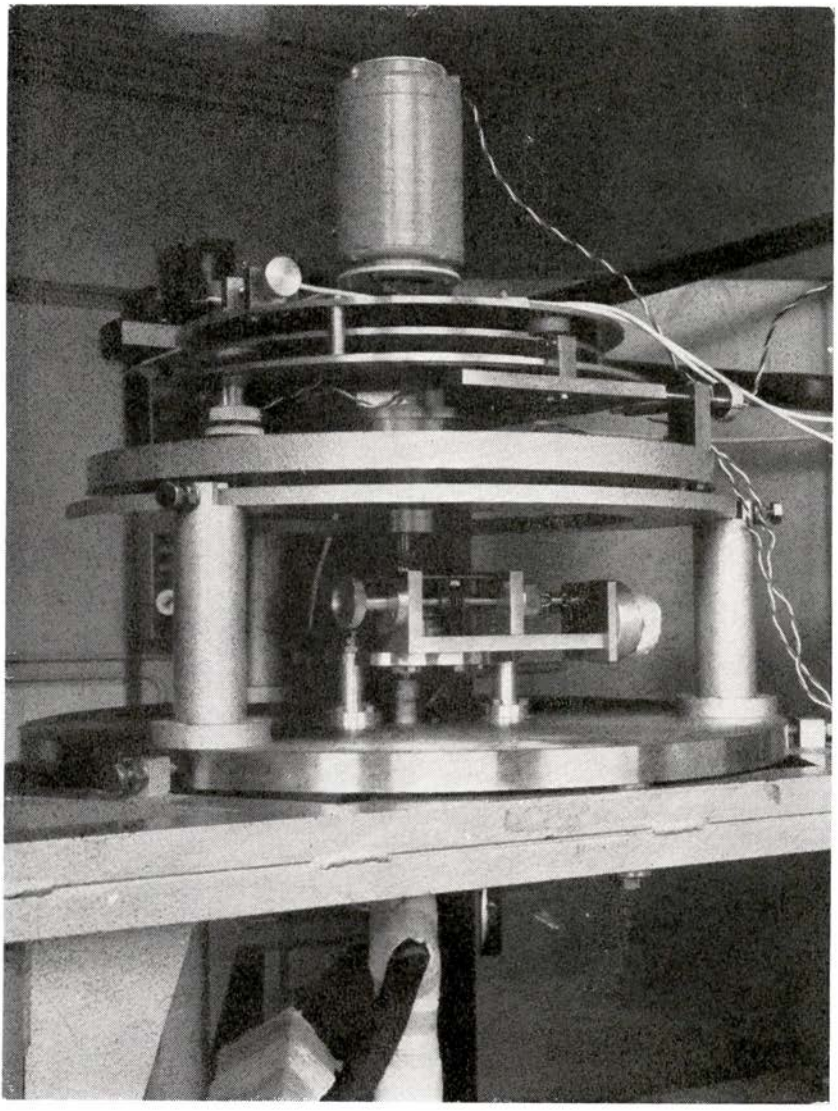


PHOTO 2



Sur la figure 9 est présentée une vue éclatée de l'ensemble montrant comment on peut mécaniquement déphaser le signal de référence du signal à analyser. Ce réglage est spécialement important en corrélation. Dans la détection synchrone le déphasage est fait électroniquement par le détecteur lui-même.

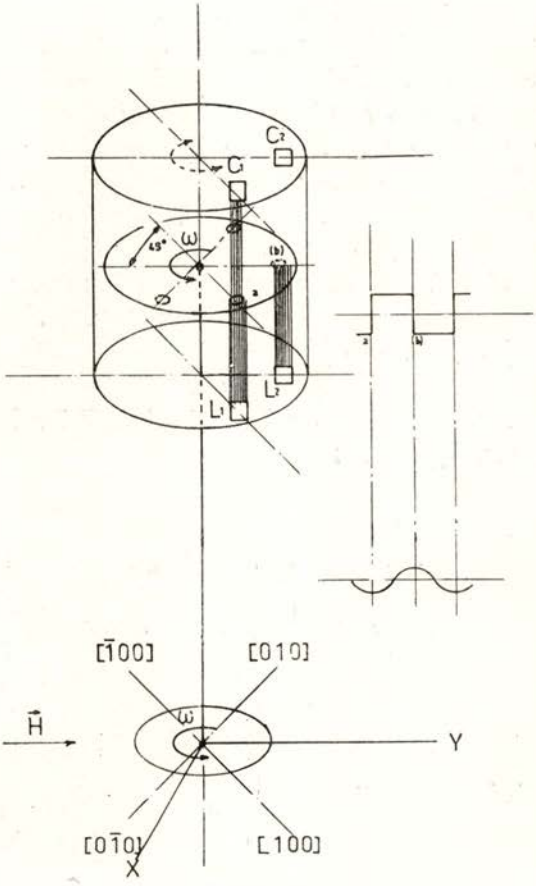


Fig. 9

B — **La détection synchrone; amplicateur à detection synchrone.**

Un amplificateur à détection synchrone est un système qui a pour fonction de sélectionner une bande de fréquence du spectre appliquée à l'entrée et transposer l'information contenue dans cette bande de fréquence dans une autre centrée autour de la

fréquence zéro. L'élément essentiel d'un tel amplicateur — «amplificateur Lock-in» suivant la terminologie américaine — est un détecteur de phase, dans lequel le signal à étudier est «mélangé» avec un signal de référence produisant des fréquences somme et différence des fréquences d'entrée. Un filtre passe-bas disposé en sortie du «mélangeur» rejette les hautes fréquences correspondant aux fréquences somme et laisse passer les fréquences différence qui se situent dans sa bande passante. En particulier, l'harmonique résultant de la différence entre le signal et la référence sera de fréquence nulle. Les harmoniques différence résultant des autres composantes du spectre de fréquences, dont l'écart par rapport à la fréquence de référence est supérieur à la fréquence de coupure du filtre, seront atténuées. Par conséquent, la sortie du filtre passe-bas sera constitué par la partie du spectre de fréquence du signal situé autour de la fréquence de référence dans une bande passante déterminée par ce filtre.

L'analyse justifiant ce qui vient d'être ennoncé précédemment se trouve résumée dans l'Appendice I.

Le schéma fonctionnel du Lock-in-Amplifier PAR HR8 est représenté sur la figure 10:

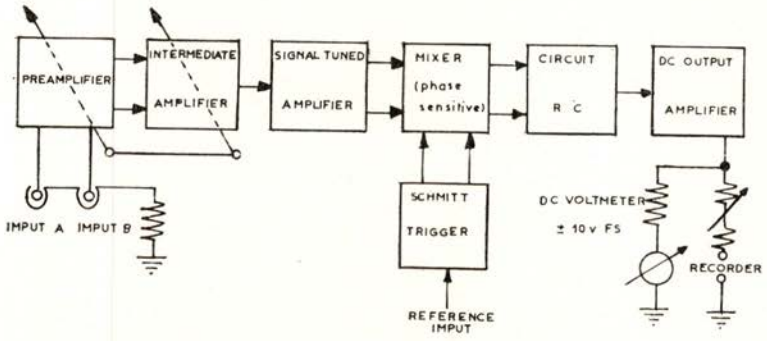


Fig. 10

Dans la version commercialisée des amplificateurs à détection synchrone, le «mélange» du signal ne s'effectuera pas avec une fonction de référence carrée, mais avec une fonction sinosoidale obtenue à partir de la référence: ce qui a pour effect d'éliminer les fréquences some $3\nu_s, 5\nu_s, \cdots$ et de ne garder que la bande autour de la fréquence zéro.

Afin de mieux illustrer le fonctionnement de l'étage «melangeur», on a représenté sur la figure 11 la tension de sortie, quand la référence est en phase avec le signal (*a*) et quand la référence est déphasée de 90° par rapport au signal (*b*).

L'appareil est complété par un générateur interne de fonctions carrées qui fournit un certain nombre de tensions de référence, utilisées pour calibrer le gain du circuit de mesure.

Cette méthode nous apparaissait comme précise et de manipulation commode pour l'analyse des différentes harmoniques que nous devions séparer. Le principal inconvénient résidait dans

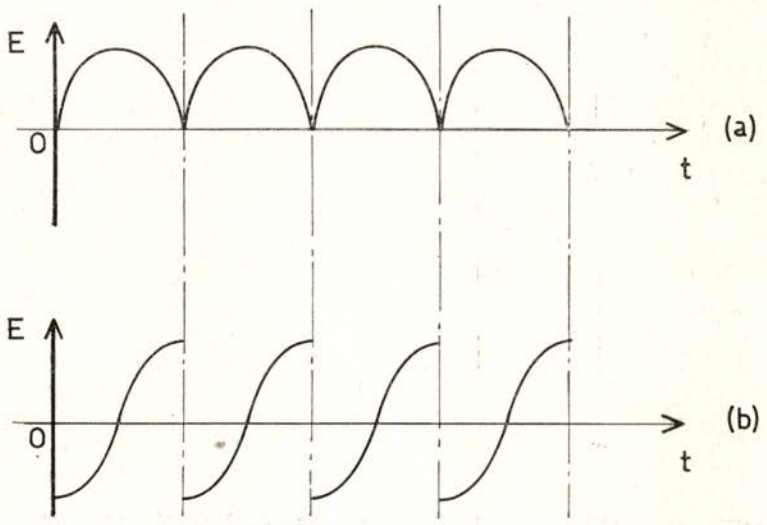


Fig. 11

son utilisation dans une gamme de fréquence très basse, inférieure à 5 Hz, cette gamme nous étant imposée afin d'éliminer partiellement l'effet des courants de Foucault induits dans l'échantillon au cours de la rotation. Ces courants de Foucault von générer un signal synchrone et de même fréquence que le signal due aux propriétés anisotropes du matériau. Nous discuterons leur effet au chapitre III.

En effet, la gamme de fréquences entre 1 et 10 Hz correspond aux moins bonnes conditions d'utilisation du pré-ampli du lock-in (figure 12), ainsi qu'à un temps d'attente plus long avant que le signal atteigne son état stable.

Cette méthode a été utilisée avec entière satisfaction sauf pour un certain nombre de cas que nous discuterons au chapitre III. Parallèlement à l'utilisation de cette méthode, nous en avons utilisé une autre — la corrélation — que nous allons décrire au paragraphe suivante.

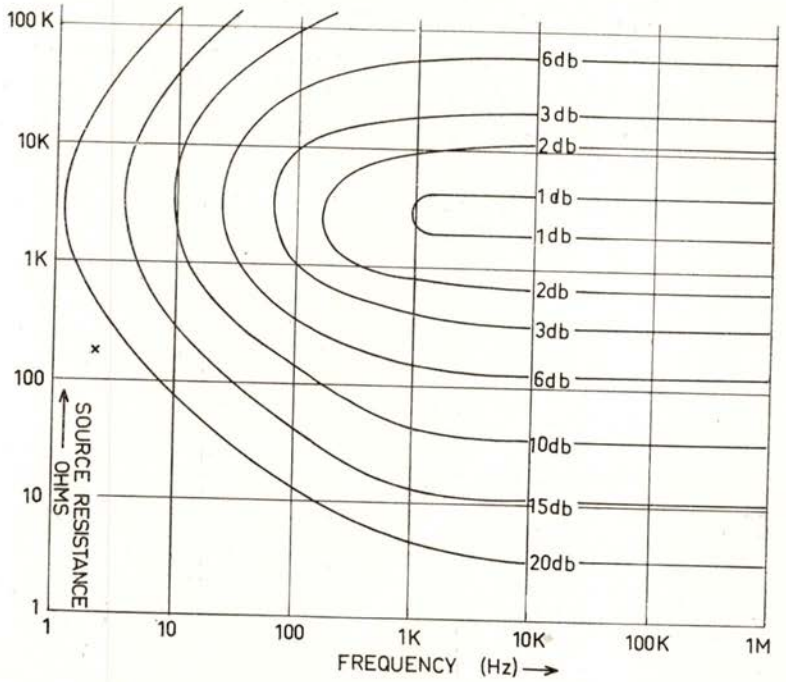


Fig. 12 — Contours of constants noise figure for a typical PAR Type C preamplifier as a function of frequency and source resistance at 290° K.

C — La corrélation.

Dans la théorie de l'analyse harmonique, on définit la fonction de corrélation de deux fonction $f_1(t)$ et $f_2(t)$ par

$$\frac{1}{T_1}\int_{-T_{1/2}}^{\tau+T_{1/2}} f_1(t)\cdot f_2(t+\tau)\cdot dt \tag{24}$$

où $f_1(t)$ et $f_2(t)$ ont la même période T_1, τ pouvant varier d'une façon continue de $-\infty$ à $+\infty$ et indépendamment de t.

Cette définition implique trois opérations distinctes:

a) à l'une des fonctions périodiques on donne un déplacement du temps τ;

b) la fonction ainsi déplacée est multipliée par une autre fonction périodique de même fréquence fondamentale;

c) la valeur moyenne du produit est obtenue par intégration sur une période complète.

Ces opération se répètent pour chaque valeur de τ comprise entre $-\infty$ et $+\infty$.

D'après Lee [17], un «appareil» pouvant réaliser l'ensemble des opérations décrites est un corrélateur.

La corrélation dont le domaine d'applicabilité s'étend aux fonctions apériodiques et aux fonctions aléatoires présente deux variantes définies suivante le type de renseignement que l'on veut obtenir et qui du point de vue mathématique s'expriment par:

Autocorrélation: $f_1(t) = f_2(t)$

Intercorrélation (aussi appelée crosscorrélation): $f_1(t) \neq f_2(t)$.

Nous donnons en Appendice II une analyse de la corrélation, les caractéristiques fondamentales de l'intercorrélation et de l'auto-

SCHEMA FONCTIONNEL DU CORRELATEUR

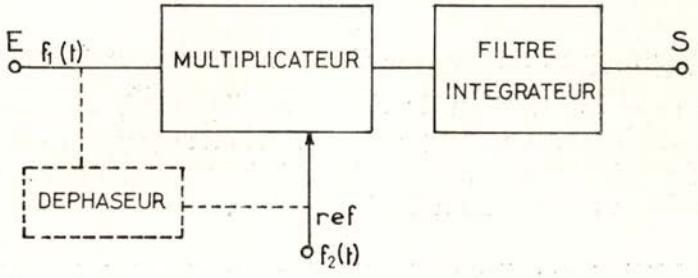


Fig. 13

corrélation et justifions notre choix pour la première de ces techniques. L'appareil que nous avons construit et dont le schéma fonctionnel est représenté sur la figure 13 comprend bien les caractéristiques définissant un corrélateur.

Nous allons analyser chacun de ses élements dont le schéma électronique est représenté sur la figure 14.

Déphaseur: C'est à l'aide de l'ensemble des plateaux (5), (6), (7) que se fait le déphasage entre le signal et la fonction de référence, en avançant ou en retardant l'origine des déclenche-

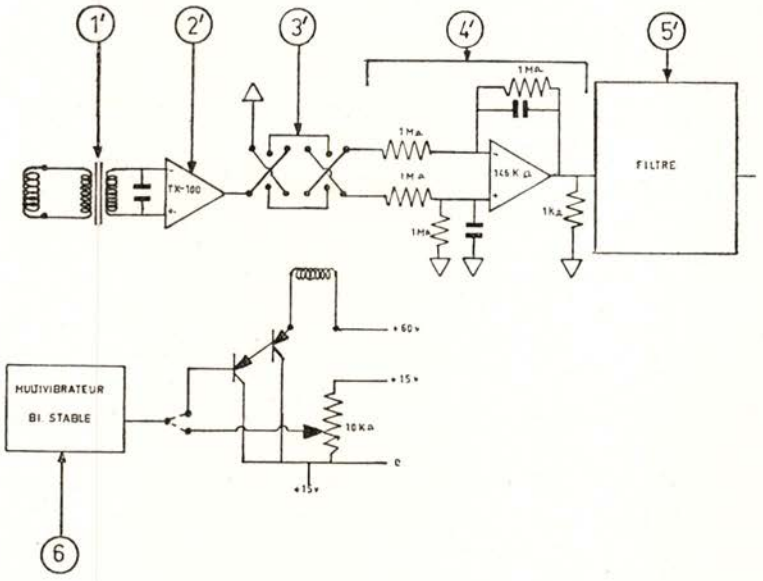


Fig. 14

ments par rapport au passage d'une direction cristallographique donnée dans la direction du champ appliqué $\vec{H}$, comme nous l'avons décrit dans ce paragraphe à propos du signal de référence. Un réglage optique permet de faire l'ajustement de phase avec une précision supérieure à 1 minute d'arc.

Multiplicateur: La multiplication du signal à l'entrée par la fonction carrée de référence est effectuée par l'intermédiaire du relais Clare double inverseur à contacts de mercure (3') dont le choix a été conditionné par sa rapidité d'inversion et son faible bruit thermoélectrique de contact. Le résultat du produit est obtenu en sortie d'un amplificateur différentiel de gain unite (4').

Filtre intégrateur: La fonction est intégrée par un filtre passe-bas (5′) ayant pour fonction de transfert une fonction de Butterworth du troisiéme ordre. La figure 15 montre le schéma

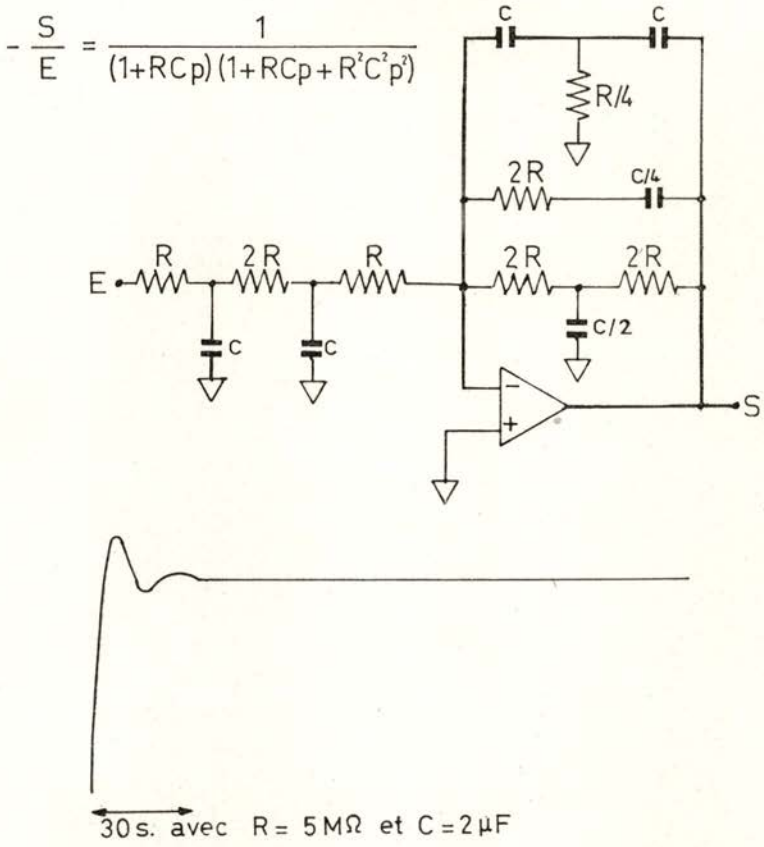


Fig. 15

électronique de ce filtre, ainsi que la figure type de sa réponse à un échelon. Ce dispositif est complété par une étage d'amplification (2′), avant le relais, pour pouvoir amener le signal à un niveau compatible avec les conditions de fonctionnement du relais, et un transformateur (1′) qui élimine la composante continue du signal d'entrée; un filtrage par des capacités de valeurs appropriés permet d'éliminer les frequences supérieures à 20 Hz.

La nécessité d'amplifier des signaux d'un niveau très différent, dans un rapport allant de 1 à 1000, nous a amené à utiliser différents types d'amplificateurs comme un amplificateur continu (TEK-ELEC TX-100), um amplificateur galvanométrique (amplispot SEFRAM), le pré-ampli de la détection synchrone. Dans ce dernier cas, on pouvait simultanément faire les mesures par les deux méthodes décrites et comparer les performances de l'une par rapport à l'autre.

Il est important de souligner que le corrélateur que nous avons construit effectue l'ensemble des mesures du Lock-in, mais apporte en plus des reseignements supplémentaires que nous discuterons au Chapitre III. Son prix de revient, principalement fonction des deux amplificateurs opérationnels et d'un relais ($\simeq 2\,000$ F), est environ 10 fois plus petit que le prix d'un amplificateur à détection synchrone.

VI — Les échantillons.

A — Découpage et Forme.

L'interprétation des résultats obtenus suppose une aimantation uniforme dans tout le volume de l'échantillon. Les seules formes compatibles avec cette exigence sont des ellipsoïdes. Les difficultés mécaniques d'obtenir des échantillons de cette forme nous impose l'utilisation d'échantillons sphériques.

Nombreux ont été les auteurs qui ont choisi des échantillons taillés en disques. Les inconvénients de ce choix en ce qui concerne des mesures d'anisotropie ont déjà été signalés par Aubert [2] et peuvent se résumer en trois points essentiels:

a) non saturation de l'échantillon;

b) réalisation mécanique d'un disque, moins précise que celle d'une sphère;

c) erreurs d'inclinaison du plan du disque par rapport au champ magnétique.

L'usage d'échantillons en forme de sphère peut conduire à des erreurs au cas où l'échantillon n'est pas perfaitement sphérique.

Aubert a calculé le couple produit par un échantillon ayant un écart à la sphéricité $\Delta\Phi$ mesuré sur le diamètre et a trouvé l'expression

$$\Gamma_d = \frac{4\pi M_s^2 V \varepsilon}{5} \sin 2\varphi \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Phi}. \tag{25}$$

Pour obtenir un échantillon avec un ε minimum, nous avons recours à une série de traitements mécaniques et chimiques successifs et l'on obtient ainsi des écarts à la sphéricité de l'ordre du micron.

La méthode utilisée est la suivante: dans le lingot du monocristal est taillé par la méthode d'électro-érosion un échantillon sphérique ($\Delta\Phi \simeq 1/100$ mm). Cet échantillon est ensuite soumis à une série de polissages mécaniques avec des pâtes émeri et diamant de grain décroissant jusqu'à $0,1\,\mu$. Afin de diminuer la couche perturbée par le polissage, de légères attaques chimiques sont effectuées entre chaque polissage.

Comme nous avons pu le constater au cours de notre étude sur le nickel, les polissages mécaniques successifs créent une distribution de dislocations à l'intérieur du monocristal, leur effet se faisant sentir particulièrement dans une mince couche superficielle et engendrant ainsi l'apparition d'un terme supplémentaire dans les mesures d'anisotropie. Comme nous le verrons au chapitre III, ce terme est relativement important dans les mesures d'anisotropie de l'aimantation, mais est très petit ($< 1/1\,000$) vis à vis des termes d'anisotropie magnétocristalline, ce qui justifie que celles-ci soient insensibles à l'état de surface de l'échantillon.

Nous avons assayé de déterminer quel serait l'état «le moins perturbé», et nous pensons que c'est celui qui correspond aux échantillons directement obtenus par électro-érosion, la masse du cristal étant peu affectée par le découpage qui crée en surface une couche amorphe de quelques centaines d'Angstroems au minimum, ainsi que nous avons pu le constater par diffraction électronique.

On a observé que des recuits effectués après polissages avaient pour effet de faire apparaître une nouvelle contribution, probablement due à la formation de cristallites en surface désorientés par rapport à la masse du cristal, comme le montre la figure 16.

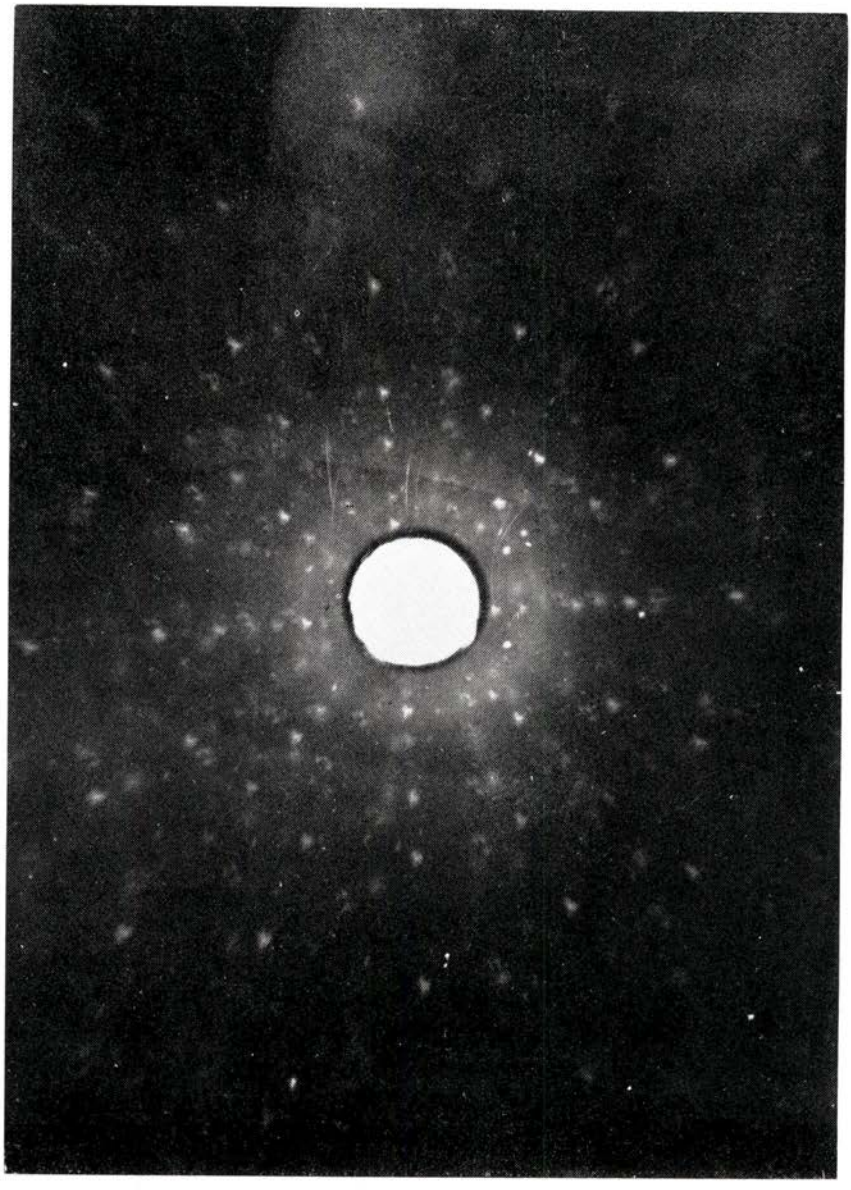


Fig. 16

Dans le cours de cette étude, des échantillons ayant subi différents traitements ont été utilisés en fonction du but recherché.

Ainsi une étude complète suivant deux plans cristallographiques était impossible avec un échantillon d'électro-érosion par suite de défauts de sphéricité. En effet un tel échantillon présente toujours une anisotropie de forme, empêchant sont utilisation avec un axe de rotation autre que son axe de rotation lors du découpage.

B — Fixation de l'échantillon; le porte-échantillon.

Après avoir été pré-orientés magnétiquement, les échantillons sont placés dans un porte-échantillon, comme celui représenté en coupe sur la figure 17, usiné dans de l'araldite chargée au talc.

L'échantillon est fixé de façon telle que les contraintes qui lui seront appliquées au blocage aient une symétrie de révolution autour de l'axe de rotation. L'échantillon est fixé entre deux cônes dont l'un est fixe (A) et solidaire du porte-échantillon et l'autre (B) vient s'appuyer sur la sphère déjà en place, la fixation s'effectuant au moyen d'une vis (C). Une fenêtre (D) est percée à l'extrêmité inférieure du porte-échantillon afin de permettre une orientation aux rayons X (précision meilleure que 1/2°). La partie supérieure du porte-échantillon est en bronze diamagnétique et se termine par une portée conique qui ira s'adapter sur la portée conique du tube tournant.

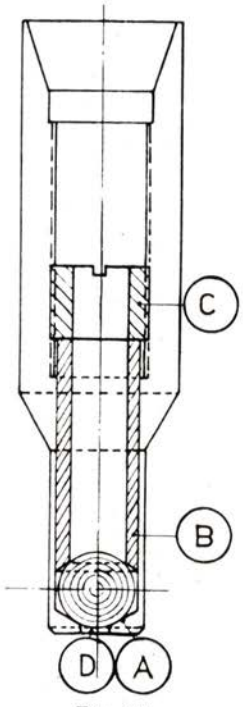


Fig. 17

Les échantillons utilisés ont tous un diamètre voisin de 8 mm afin que l'on puisse les utiliser aussi sur l'appareillage de mesure de couples.

VII — Performances et limitations de l'appareillage.

L'appareillage que nous avons réalisé et dont le but principal est la mesure des contantes d'anisotropie de l'aimantation nous a permis de constater qu'un certain nombre de difficultés, autres que l'ordre de grandeur du signal lui-même, se posaient. Parmi ces difficultés, celles d'origine mécanique sont les plus délicates à surmonter. Nous citerons, par ordre d'importance croissante, les vibrations mécaniques de l'échantillon, le centrage de l'échantillon par rapport aux bobines et la précision du mouvement de rotation. Ce dernier point est la source d'erreur la plut courante dans les résultats. En effet, si la trajectoire décrite par le centre de l'échantillon, au cours de la rotation, n'est pas

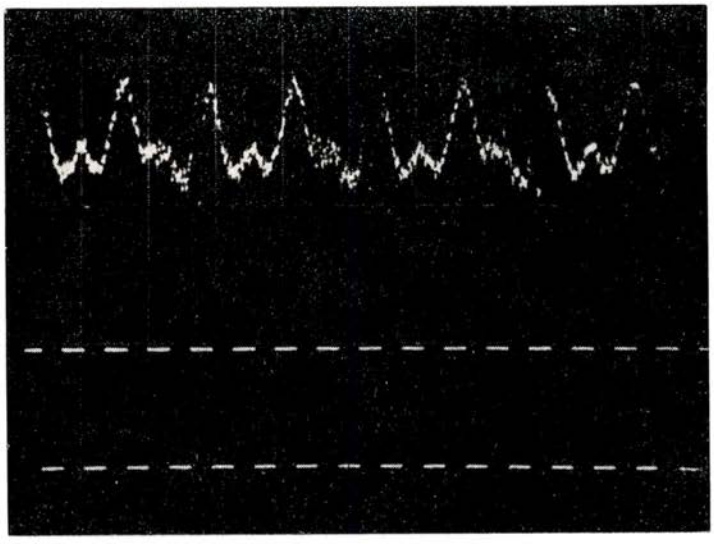


Fig. 18

un point mais s'approche d'un cercle ou d'une ellipse, pour ne considérer qu'un cas simple, un signal de période moitié de la période de rotation est généré, d'où l'apparition d'un terme en 2θ. La figure 18 représente le signal dans ces circonstances, après amplification par 10^5. On remarquera la présence d'un fort terme en 2θ, qui masque le terme en 4θ, à peine visible. Afin

de déterminer l'amplitude relative des différentes harmoniques présentes dans ce cas, nous avons enregistré le signal au magnétophone et procédé par autocorrélation au laboratoire du LETI. On a ainsi pu obtenir des spectres d'amplitude, dont la figure 19 représente un des plus caractéristiques.

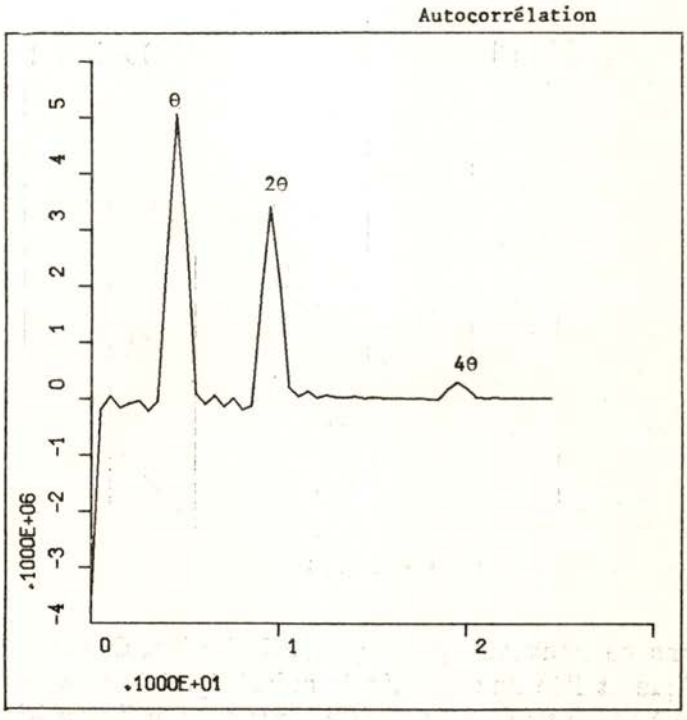


Fig. 19

Un décentrage de l'échantillon et une non concentricité de la rotation expliquent l'apparition de ces termes comme le montre schématiquement la figure 20.

On notera l'ordre de grandeur des termes en θ et 2θ, comparés au terme en 4θ. Le cas que nous venons de décrire correspond à l'utilisation du système de bobines 1.

Expérimentalement, nous avons constaté que chaque fois que deux harmoniques voisines étaient présentes, l'une ayant une amplitude beaucoup plus grande que l'autre, la mesure de l'harmonique de plus faible amplitude était perturbée, voire impossible.

Cette limitation est liée à la non linéarité des amplificateurs quand l'harmonique de plus grande amplitude commence à les saturer.

Le guidage de la rotation de l'échantillon ainsi que le soin apporté à l'usinage du porte-éhantillon ont permis d'éliminer dans le système de bobines de petite surface 2, ces causes d'erreur.

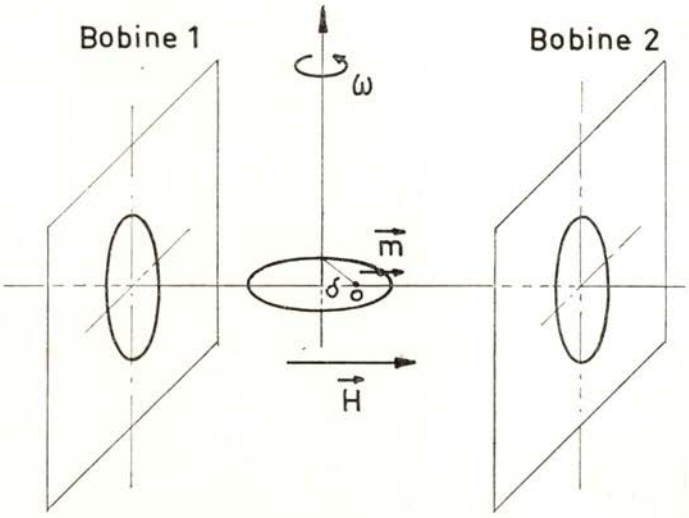


Fig. 20

Dans ce nouveau système, une limitation, de caractère non mécanique et liée aux propriétés anisotropes du matériau, a été observé à basse température. Elle correspond à l'apparition d'importants termes en 6θ et 8θ, provenant de la forte augmentation des constantes K_2 et K_3, dont les valeurs à l'ambiante sont négligeables par rapport à K_1. A nouveau le phénomène de saturation des amplificateurs a limité la gamme de température de nos mesures.

A cet effet, il faut ajouter celui provenant des courants de Foucault dans l'échantillon comme nous le montrerons au chapitre III.

En conclusion, nous pouvons dire que l'appareillage qu'on vient de décrire est adapté à une mesure rapide et précise à mieux que le 1 % des constantes d'anisotropie magnétocristalline entre l'ambiante et 4° K. Pour les mesures d'anisotropie de l'aimantation, il est adapté à des mesures entre l'ambiante et — 50° C.

CHAPITRE III

Determination des constantes d'anisotropie magnetocristalline et d'anisotropie de l'aimantation par la methode du magnetometre a echantillon tournant

I — Anisotropie magnetique et magnetométre a echantillon tournant.

On fait tourner une sphère monocristalline d'un matériau ferromagnétique à vitesse constante autour d'un axe cristallographique $[h,k,l]$ déterminé. Un champ magnétique suffisant pour saturer le matériau est appliqué perpendiculairement à l'axe de rotation. Une force électromotrice est induite dans un système de bobines dont l'axe est situé dans le plan (h,k,l) provenant des variations au cours de la rotation du flux magnétique qui les traverse. Cette force électromotrice présentera une périodicité déterminée par la symétrie du cristal. L'orientation des bobines est repérée par l'angle que fait leur axe avec la direction du champ $\vec{H}$. Parmi les orientations possibles, nous distinguerons celle où l'axe des bobines est parallèle à la direction du champ $\vec{H}$ et celle où l'axe prend une direction perpendiculaire à $\vec{H}$.

On désignera dorénavant par position parallèle (//, en indice supérieure dans les formules) et par position perpendiculaire ($\perp$ en indice supérieure dans les formules), les deux orientations particulières des bobines décrites précédemment. La figure 21 représente le cas où il existe un angle α entre l'axe des bobines et la direction du champ, ω étant la vitesse angulaire de rotation de l'échantillon. Dans le cas de la figure, l'axe de rotation est [001]. φ et θ sont les angles que font le champ $\vec{H}$ et l'aimantation $\vec{M}$, définis par rapport à l'axe [100] du cristal, avec $\varphi = \omega t$.

A l'instant t, la composante du vecteur aimantation dans la direction du champ, $M^{//}$, est donnée par

$$M^{//} = M\cos(\varphi - \theta) \tag{26}$$

où M désigne le module du vecteur aimantation.

Sa composante dans la direction perpendiculaire, $M^{\perp}$, est donnée par

$$M^{\perp} = M\sin(\varphi - \theta). \tag{27}$$

La composante de l'aimantation suivant l'axe des bobines M^b est

$$M^b = M\cos(\varphi - \theta)\cdot\cos\alpha + M\cdot\sin(\varphi - \theta)\cdot\sin\alpha. \tag{28}$$

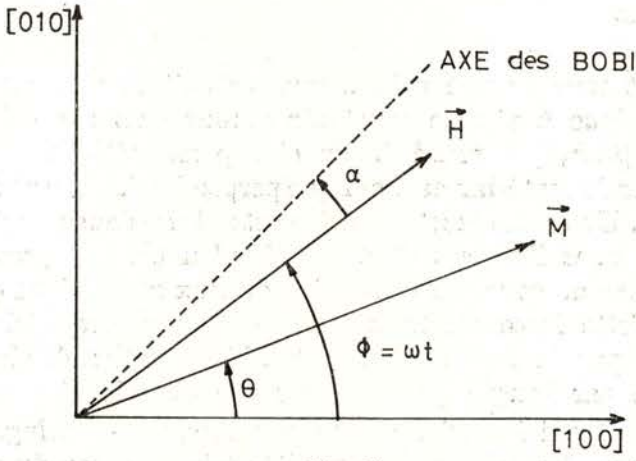


Fig. 21

La force électromotrice induite dans le système est porportionnelle à

$$e = \frac{dM^b}{dt}. \tag{29}$$

Soit $\vec{\Gamma}_a$ le couple d'anisotropie et Γ_{as} la composante de $\vec{\Gamma}_a$ dans la direction de l'axe de rotation

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{M} \times \vec{H} \quad \text{et} \quad \Gamma_{as} = M\cdot H\cdot\sin(\varphi - \theta). \tag{30}$$

En substituant (30) dans (28), on obtient:

$$M^b = M \cdot \cos(\varphi - \theta) \cdot \cos\alpha + \frac{\Gamma_{az}}{H} \cdot \sin\alpha \,. \tag{31}$$

L'expression (31) suggère l'emploi d'une méthode où l'on puisse faire varier α, afin de pouvoir séparer les deux termes intervenant dans cette expression et pouvoir ainsi les mesurer. Le développement de M et de Γ_{az} permet d'exprimer M^b en fonction des constantes d'anisotropie magnétocristalline et d'anisotropie de l'aimantation.

Il importe, pour pouvoir exploiter les expressions (26) et (27), de connaître le développement de M et Γ_{az} en fonction de φ, seul paramètre que nous connaissons expérimentalement, puisqu'on connaît sa loi de variation en fonction du temps.

Considérons le cas où le vecteur aimantation tourne dans le plan (001). Dans ce cas, M et Γ_{az} s'expriment sous la forme:

$$M = M_0 - \left(\frac{M_1}{8} + \frac{M_3}{32}\right) \cdot \cos 4\theta + \frac{M_3}{128} \cos 8\theta + \cdots \tag{32}$$

$$\Gamma_{az} = \left(\frac{K_1'}{2} + \frac{K_3'}{8}\right) \cdot \sin 4\theta - \frac{K_3'}{16} \sin 8\theta + \cdots \tag{33}$$

en développant jusqu'à l'harmonique d'ordre 8.

Le calcul du couple en fonction de l'angle φ, a été fait par Aubert [2] pour les plans {001} {110} et {111}.

Pour le plan (001), et en se limitant aux termes prépondérants Γ_{az} devient:

$$\begin{aligned} \Gamma_z(\varphi) &= MH \sin(\varphi - \theta) = \\ &= \sin 4\varphi \left[\left(\frac{K_1'}{2} + \frac{K_3'}{8}\right) - \frac{1}{HM} \cdot \left(\frac{K_1' K_3'}{16}\right) + \cdots\right] + \\ &+ \sin 8\varphi \left[-\frac{K_3'}{16} - \frac{1}{HM} \cdot \left(\frac{K_1'^2}{2} + \frac{K_1' K_3'}{4}\right) + \cdots\right] + \cdots \end{aligned} \tag{34}$$

Le calcul de l'expression du module de l'aimantation en fonction de φ se fait en substituant dans (32) θ par $\varphi - \varepsilon$ où ε est l'angle entre les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{M}$ et variable au cours de

la rotation. L'expression générale de $M(\varphi)$, pour le cas où l'aimantation tourne dans un plan de symétrie, ainsi que la méthode de calcul pour le passage de θ en φ sont données en Appendice III. Pour le plan (001), et en limitant le développement jusqu'à l'harmonique d'ordre 8, on obtient:

$$M = M_0 - \left(\frac{M_1}{8} + \frac{M_3}{32}\right)\cos 4\varphi + \tag{35}$$
$$+ \left(\frac{M_3}{128} + \frac{K_1'^2}{16\,H^2 M_0}\right)\cos 8\varphi + \cdots$$

M_0 étant la partie isotrope de l'aimantation, M_1 et M_3 les première et troisième constantes d'anisotropie de l'aimantation.

Expérimentalement, même avec un système de réglage pour α, il faut considérer l'existence d'une éventuelle désorientation de l'axe des bobines. Dans la position parallèle, et compte-tenu des dispositions expérimentales réalisées, un écart de α, inférieur à 30′ est toujours envisageable. Dans ce cas, (31) devient:

$$M^{II} = M\cos(\varphi - \theta) + \frac{\Gamma}{H}\cdot\alpha$$

avec l'approximation: $\cos\alpha = 1$ et $\sin\alpha = \alpha$.

On obtient pour M^{II} une expression contenant des termes en $\sin 4\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\sin 8\varphi$, $\cos 8\varphi$, etc.

Le signal induit dans les bobines, dans le cas du plan (001) sera donné par:

$$S^{II} = -kV\omega\left[\left(\frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{8}\right)\sin 4\varphi + \right. \tag{36}$$
$$\left. + 2\alpha\frac{K_1'}{H}\cos 4\varphi - \left(\frac{M_3}{16} + \frac{K_1'^2}{2\,H^2 M_0}\right)\sin 8\varphi + \cdots\right]$$

où k est la constante d'étalonnage et V le volume de l'échantillon. Pour déterminer k, nous avons procédé de deux façons distinctes. Tout d'abord, nous avons opéré par extraction d'un échantillon de nickel, connaissant la valeur de l'aimantation à saturation de celui-ci. Cette méthode nous a permis de tirer deux

conclusions en ce qui concerne le comportement des systèmes de bobines que nous avons utilisées:

a) le système de bobines 1 est sensible aux effets d'images magnétiques, ce qui rend la valeur de k dépendante de H, tandis que dans le système 2 k est indépendante de H.

b) le positionnement en hauteur de l'échantillon doit être fait avec beaucoup de précision (1/10 mm), dans le cas des bobines 2. Dans le cas du système 1, une erreur de 1 mm n'entraîne pas de variations sensibles (10^{-3}) sur les résultats.

La deuxième méthode pour déterminer la constante d'étalonnage k consiste à faire la mesure en position perpendiculaire et à utiliser les valeurs des constantes K_i' intervenant dans l'expression de S^1 obtenue à partir des mesures de couples. Cette dernière méthode présente l'avantage de ne pas nécessiter la correction de chaque point obtenu pour une valeur déterminée du champ. De plus, elle élimine le risque d'erreur introduit par une position de l'échantillon légèrement différente de celle qui a servi à l'étalonnage.

Les mesures par extraction ont permis de montrer qu'on obtenait des écarts sur k de l'ordre de 10^{-3} par rapport à ceux obtenus à partir des mesures effectuées en position perpendiculaire.

II — Effet des courants de Foucault dans l'échantillon.

Aubert [2] a calculé, dans l'approximation des états quasi-stationnaires les courants de Foucault induits dans un échantillon sphérique au cours de sa rotation, dans un champ appliqué $\vec{H}$. Le moment équivalent de ces courants est donné par

$$\vec{M}^* = -\frac{\pi}{15} 10^{-11} \frac{R^5}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{H} + \frac{8\pi}{3} \vec{M} \right) \tag{37}$$

où R est le rayon de l'échantillon sphérique et ρ sa résistivité, exprimée en $\Omega \cdot m$. Toutes les autres quantités entrant dans le calcul de (37) sont exprimées en u. e. m. C. G. S.

L'expression de la force électromotrice induite au cours de la rotation, par les courants de Foucault est donc:

$$S_F^{//} = k \frac{\pi 10^{-11}}{15} \frac{R^5}{\rho} \omega^2 \left\{ \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2K_1'}{H} \cos 4\varphi - \frac{8K_1'^2}{H^2 M} \cos 8\varphi \right) - \right.$$

(38)

$$\left. - \alpha \left(\frac{8\pi}{3} \cdot \frac{8K_1'}{H} \sin 4\varphi \right) \right\}$$

dans le cas où l'axe des bobines fait un angle α avec la direction du champ. Cette expression est à comparer à l'expression (36) donnant la force électromotrice induite due aux propriétés anisotropes du matériau.

Sur la figure 22, nous montrons comment varie le rapport des harmoniques d'ordre 4, dues aux courants de Foucault et à l'anisotropie de l'aimantation, pour une sphère de nickel de 8mm

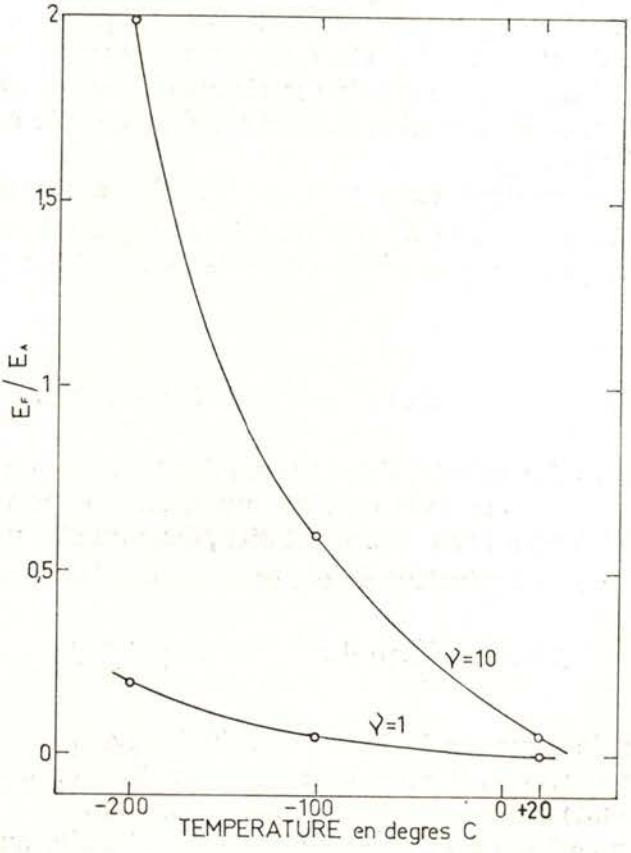


Fig. 22

de diamètre tournant dans un champ de $10\,k0e$, à des fréquences de $\nu_r = 1\,Hz$ et $\nu_r = 10\,Hz$ respectivement. La courbe inférieure correspond aux conditions expérimentales que nous avons utilisées.

On peut constater l'augmentation très rapide de ce rapport, quand la température décroît, ce qui limite les possibilités de mesures à basse température. Cette augmentation est due à la décroissance de la résistivité et à l'augmentation de la constante K_1.

Afin de limiter l'influence des courants de Foucault, il faut soit:

a) limiter la gamme de température et ne pas descendre en dessous de $-100°$ C;

b) diminuer la fréquence de rotation, à quelques dizièmes de Hz, ce qui entraîne l'impossibilité d'employer la méthode de détection synchrone;

c) réduire le diamètre de l'échantillon mais ceci réduit aussi le signal induit par les propriétés anisotropes et diminue le rapport signal sur bruit;

d) diminuer le moment des courants de Foucault par l'utilisation de disques très aplatis.

Si on examine le Tableau III reproduisant les résultats obtenus par différents auteurs qui ont utilisé la méthode du magnétomètre à échantillon tournant, on constate que tous ont

TABLEAU III

Auteur	Fréquence Rotation en Hz	Matériau	Forme
Hagedorn, 1967 [18]	500	Permalloy	Disques
Flanders, 1968 [19]	90	Fe, Ni	Disques et fils
Gessinger et Kronmüller, 1970 [20]	150	Ni	Disques
Gessinger, 1970 [21]	150	Ni	Disques

travaillé avec des fréquences de rotation supérieures à 90 Hz, cherchant un compromis entre de bonnes conditions d'utilisation de la détection synchrone et l'effet des courants de Foucault.

Les désavantages des disques, liés à la non-uniformité de l'aimantation, ont déjà été discutés; du point de vue des courants de Foucault, s'il est compréhensible que pour des disques très aplatis leur effet soit négligeable, l'extrapolation devient difficile dans le cas de disques d'épaisseur de l'ordre de quelques millimètres (Gessinser et al. [21] utilisent des diques de nickel de diamètre 9,8 mm et d'épaisseur 2,5 mm). Une estimation de l'effet des courants de Foucault dans un disque de rayon R et d'épaisseur $2a$ donne un moment équivalent:

$$\vec{M}^* = -\frac{R^4 a^3}{a^2 + R^2} \cdot \frac{1}{\varrho} 10^{-11} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}) \tag{39}$$

et permet de comparer les résultats avec ceux obtenus avec une spère de rayon R. Cette expression montre qu'il faut être très prudent dans l'utilisation de disques, surtout si on les fait tourner à des fréquences «élevées» ($> 10\,Hz$).

III — Les mesures par detection synchrone

Dans les expériences réalisées, nous nous sommes limités à l'étude des plans (100) et (110) du nickel. L'analyse des résultats obtenus dans le plan (111) s'est en effet révélée très difficile car le vecteur aimantation sort de ce plan au cours de la rotation.

Nous allons écrire les expressions utilisées pour ces deux plans. Pour cela, nous avons eu recours au développement de l'aimantation $M(\varphi)$ présenté en Appendice III, en le simplifiant considérablement par élimination de termes d'ordre supérieur. Ce développement a été nécessaire afin de permettre d'apprécier si la recombinaison d'harmoniques d'ordre supérieur à 8 intervenant dans le passage de $M(\theta)$ à $(M(\varphi)$ pouvait entraîner l'apparition de termes supplémentaires dans les développements jusqu'à l'ordre 8 des expressions à analyser.

Nous avons pu constater que ces termes intervenaient d'une façon négligeable, dans le cas du nickel, lorsque la température restait au voisinage de l'ambiante; par contre, en-dessous de la température de l'azote liquide, nous avons dénombré une vingtaine de termes de l'ordre du pourcent du terme principal.

Expressions dans le plan <100> :

$$(40)\qquad S^{//}_{(100)} = -kV\frac{\partial}{\partial t}M^{//}_{(100)} =$$

$$= kV\omega\left\{\left[\left(\frac{M_1}{2}+\frac{M_3}{8}\right)-\frac{1}{HM_0}\frac{1}{16}K'_1M_3-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(HM)^2}\frac{19}{8}\left(\frac{M_1}{8}+\frac{M_3}{32}\right)\right]\sin 4\varphi+$$

$$\left.+\left[-\frac{M_3}{16}-\frac{K'^2_1}{2H^2M_0}-\left(M_1+\frac{M_3}{4}\right)\frac{K'_1}{HM}\right]\sin 8\varphi+\cdots\right\}$$

$$(41)\qquad S^{\perp}_{(100)} = -kV\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Gamma a(100)}{H}\right) =$$

$$= -kV\omega\left\{\left[\left(2K'_1+\frac{K'_3}{2}\right)\frac{1}{H}-\left(\frac{K'_1K'_3}{4}+\frac{K'^2_3}{16}\right)\frac{1}{H^2M}\right]\cos 4\varphi+\right.$$

$$\left.+\left[-\frac{K'_3}{2}\frac{1}{H}-\frac{1}{H^2M}\left(4K'^2_1+2K'_1K'_2+\frac{K'^2_3}{4}\right)\right]\cos 8+\cdots\right\}.$$

A partir des expressions (40) et (41) on obtient pour chacune des harmoniques analysées, et en se limitant aux termes prépondérants:

$$(42)\qquad S^{//}_4 = -kV\omega\left(\frac{M_1}{2}+\frac{M_3}{8}\right)$$

$$(43)\qquad S^{//}_8 = kV\omega\left[-\frac{M_3}{16}-\frac{K^2_1}{2H^2M_0}\right]$$

$$(44)\qquad S^{\perp}_4 = -kV\omega\left[-\left(2M_1+\frac{M_3}{2}\right)+\left(2K_1+\frac{K_3}{2}\right)\frac{1}{H}\right]$$

$$(45)\qquad S^{\perp}_8 = -kV\omega\left[\frac{M_3}{2}-\frac{K_3}{2}\frac{1}{H}-\left(4K^2_1+2K_1K_2\right)\frac{1}{H^2M}\right].$$

Expressions dans le plan <110> :

$$(46)\qquad S^{//}_{(110)} = -kV\frac{\partial}{\partial t}(M^{//}_{(100)}) =$$

$$= -kV\omega\left\{\left[\left(\frac{M_1}{4}+\frac{M_2}{64}+\frac{7M_3}{128}\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{HM}\left(\frac{3K_1'M_1}{16}\right)-\frac{1}{H^2M}\frac{3K_1'^2}{32}\left.\right]\sin 2\varphi+$$

$$+\left[\left(\frac{3M_1}{8}+\frac{M_2}{16}+\frac{M_3}{128}\right)-\frac{1}{HM}\left(\frac{M_1K_1'}{4}\right)+\frac{1}{H^2M}\frac{K_1'^2}{4}\right]\sin 4\varphi+$$

$$+\left[\left(-\frac{3M_2}{64}+\frac{3M_3}{128}\right)+\frac{1}{H^2M}\frac{9K_1'^2}{32}\right]\sin 6\varphi+$$

$$+\left[-\frac{9M_3}{256}+\frac{1}{H^2M}\frac{9K_1'^2}{32}\right]\sin 8\varphi+\cdots\Bigg\}$$

$$(47)\qquad S^{\perp}_{(110)} = -kV\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Gamma a(100)}{H}\right) =$$

$$= -kV\omega\left\{\left[\left(\frac{K_1'}{2}+\frac{K_2'}{32}+\frac{K_3'}{64}\right)\frac{1}{H}-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{H^2M}\left(\frac{3K_1'^2}{16}-\frac{K_1'K_2'}{128}\right)\left.\right]\sin 2\varphi+$$

$$+\left[\left(\frac{3K_1'}{2}+\frac{K_2'}{4}+\frac{K_3'}{32}\right)\frac{1}{H}-\frac{1}{MH^2}\left(\frac{K_1'^2}{4}+\frac{K_1'K_3'}{8}\right)\right]\sin 4\varphi+$$

$$+\left[-\frac{9K_2'}{32}\cdot\frac{1}{H}-\frac{27}{16}\cdot\frac{K_1'^2}{H^2M}\right]\sin 6\varphi+$$

$$+\left[\left(-\frac{9}{32}\frac{K_3'}{H}-\frac{9}{4}\frac{K_1'^2}{H^2M}\right)\right]\sin 8\varphi\Bigg\}.$$

A partir des expressions (46) et (47) on écrit pour les harmoniques analysées dans (110):

$$(48)\qquad S^{//}_4 = kV\omega\left(\frac{3M_1}{8}+\frac{M_2}{16}+\frac{M_3}{128}\right)$$

$$(49)\qquad S^{\perp}_4 = -kV\omega\left[-\frac{3M_1}{2}+\frac{3K_1}{2}\frac{1}{H}-\frac{K_1^2}{4}\frac{1}{H^2M}\right].$$

Pour déterminer la position parallèle de l'axe des bobines, et ainsi pouvoir utiliser les expressions (40) et (46), nous avons eu recours à la méthode suivante:

Pour chaque valeur du champ extérieur H_0, on trace la courbe de variation de l'harmonique du signal à analyser, en fonction de la position angulaire des bobines; le minimum de la courbe définit la position parallèle. En outre, cette position correspond à un point d'inflexion de la courbe de phase comme le montre la figure 23.

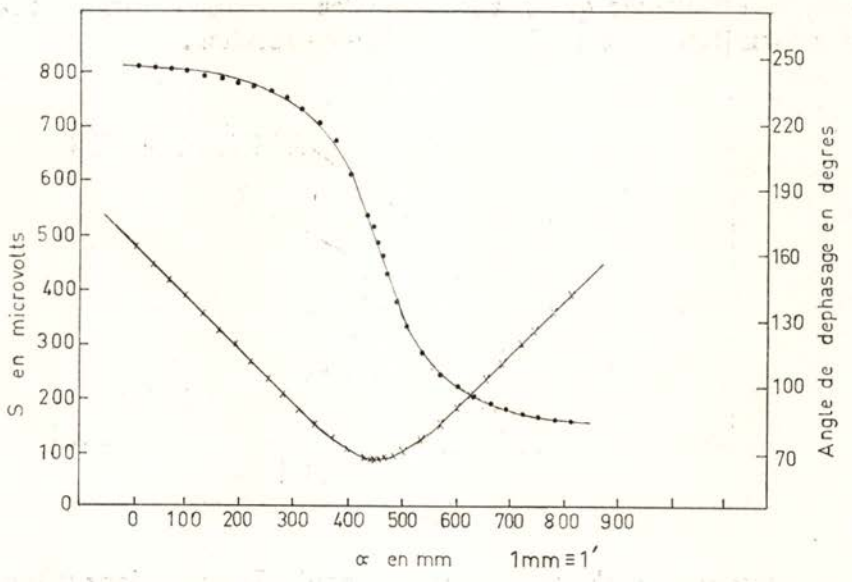


Fig. 23

La figure montre qu'une désorientation de quelques minutes sur α donne une contribution perpendiculaire non négligeable. La position perpendiculaire permettant la mesure de la quantité $\frac{K_1}{2} + \frac{K_3}{8}$ est obtenue par rotation de 90° à partir de la position paralèlle. Par contre, une désorientation de 1° sur l'orientation de la position perpendiculaire entraînerait une erreur sur le résultat inférieure à la limite de sensibilité de notre appareillage.

IV — Les mesures par correlation.

Après avoir présenté au chapitre II la méthode de corrélation et son analyse mathématique en Appendice III, on va illustrer le fonctionnement du corrélateur en considérant un exemple simple d'application. Les deux fonctions périodiques en présence seront d'une part le signal en provenance des bobines et d'autre part la fonction carrée de référence. La figure 24 représente le cas d'un monocristal dont l'axe de rotation est [001], le champ $\vec{H}_0$ étant appliqué dans le plan perpendiculaire à cet axe, β est l'angle que fait l'origine des déclenchements avec la direction [100] du cristal, ω la vitesse de rotation.

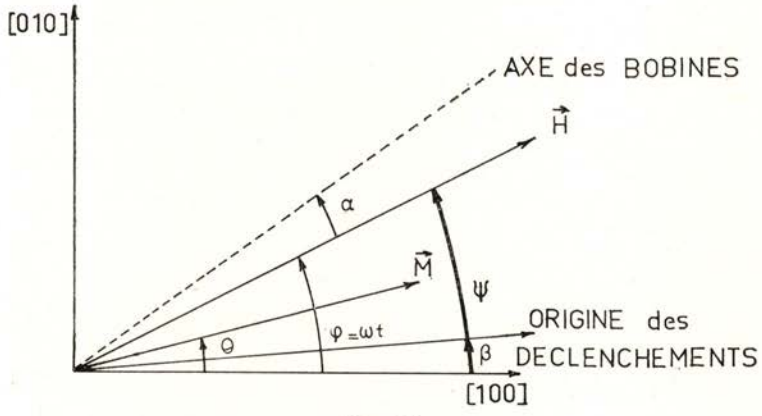


Fig. 24

Comme nous l'avons vu au paragraphe I, expressions (28) et (29), la force électromotrice induite sera:

$$e = kV\left[\frac{dM^{II}}{dt}\cos\alpha + \frac{dM^{\perp}}{dt}\sin\alpha\right]. \tag{50}$$

Dans le plan (100), $\frac{dM^{II}}{dt}$ et $\frac{dM^{\perp}}{dt}$ sont:

$$\begin{aligned}\frac{dM^{II}}{dt} &= A\omega\sin 4\varphi + B\omega\sin 8\varphi + \cdots \\ \frac{dM^{\perp}}{dt} &= A^*\omega\cos 4\varphi + B^*\omega\cos 8\varphi + \cdots.\end{aligned} \tag{51}$$

Les expressions A, B, A^*, B^*, en fonction des constantes d'anisotropie magnétocristalline et d'anisotropie de l'aimantation seront données en fin de calcul, afin de ne pas allonger les formules.

On obtient en reportant (51) dans (50):

$$(52) \qquad e = -kV\omega[(A\sin 4\varphi + B\sin 8\varphi)\cos\alpha + (A^*\cos 4\varphi + B^*\cos 8\varphi)\sin\alpha].$$

Comme $\varphi = \omega t = \psi + \beta$,

$$(53) \quad \begin{aligned} e = -kV\omega[&(A\cos 4\beta\cos\alpha - A^*\sin 4\beta\sin\alpha)\sin 4\psi + \\ &+ (A\sin 4\beta\cos\alpha + A^*\cos 4\beta\sin\alpha)\cos 4\psi + \\ &+ (B\cos 8\beta\cos\alpha + B^*\sin 8\beta\sin\alpha)\sin 8\psi + \\ &+ (B\sin 8\beta\cos\alpha + B^*\cos 8\beta\sin\alpha)\cos 8\psi]. \end{aligned}$$

L'inversion de cette fonction tous les $\frac{\pi}{4}$ — obtenue en effectuant la multiplication par la fonction carrée de référence de même périodicité que l'harmonique 4 — et l'intégration sur un tour complet conduisent comme nous l'avons montré en Appendice II à l'élimination des termes contenant des harmoniques 8, ainsi que du terme en $\cos 4\psi$.

D'où, à la sortie de l'intégrateur, un signal:

$$(54) \qquad S = \frac{2}{\pi}kV\omega[A\cos 4\beta\cos\alpha - A^*\sin 4\beta\sin\alpha].$$

En substituant A et A^* par leur expression lorsque M est dans le plan (100) et en se limitant aux termes prépondérants, on obtient:

$$(55) \qquad S_1 = k'\left(\Delta M\cos 4\beta\cos\alpha - \frac{\Delta K}{H}\sin 4\beta\sin\alpha\right)$$

où

$$\Delta M = -\left(\frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{8}\right) \quad \text{et} \quad \Delta K = \frac{2K_1'}{H}.$$

k' est une constante de l'appareillage.

Cette expression montre que par la méthode de corrélation, on dispose de deux variables indépendantes, α et β, que nous pouvons faire varier mécaniquement. Nous allons considérer les cas expérimentaux plus intéressants, en suivant l'ordre dans lequel se déroule une expérience.

1 — *Mesure de la composante perpendiculaire :*

Cette position sera définie par $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$

$$\beta = \frac{\pi}{8} - \delta$$

ε et δ étant les erreurs comises dans le positionnement de α et β.

Une préorientation de la position perpendiculaire des bobines permet de nous ramener suffisamment près de la position perpendiculaire pour faire l'approximation :

$$\cos\alpha = \varepsilon \qquad \sin\alpha = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Dans ce cas :

$$S_4^1 = k'\left[\Delta M \cos 4\beta \cdot \varepsilon - \frac{\Delta K}{H}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\sin 4\beta\right] \tag{56}$$

avec

$$\beta = \frac{\pi}{8} - \delta \qquad \cos 4\beta = 4\delta \qquad \sin 4\beta = 1 - 8\delta^2$$

(56) devient au premier ordre :

$$S_4^1 = k'\left(4\Delta M \cdot \delta \cdot \varepsilon - \frac{\Delta K}{H}\right). \tag{57}$$

Etant donné l'ordre de grandeur de $\frac{\Delta K}{H}$ par raport à ΔM (100/1 dans le cas de Ni) et en considérant une erreur maximale de 1° sur ε, les deux termes sont dans un rapport (1/1 000).

Ceci permet de déterminer facilement la position perpendiculaire et en même temps de s'affranchir d'une éventuelle erreur sur δ.

2 — *Annulation de la composante perpendiculaire:*

Avant de passer à la composante parallèle, une rotation de $\frac{\pi}{8}$ est effecttée sur β.

$\beta = \delta'$, α restante inchangé.

La condition d'annulation de S_4^1 est donnée par:

$$S_4^1 = 0 = k' \left[\Delta M \cdot \varepsilon - \Delta M \cdot 8\, \delta'^2 \varepsilon - \frac{\Delta K}{H} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) 4\, \delta' \right] \tag{58}$$

soit:

$$\delta' = \frac{\Delta M \cdot H \cdot \varepsilon}{4 \Delta K}. \tag{59}$$

En annulant S_4^1, on est sûr d'avoir β très voisin de zéro.

3 — *Mesure du signal parallèle:*

Pour passer en position parallèle, on fait:

$$\beta = \delta' \quad \text{et} \quad \alpha = \varepsilon'$$

d'où

$$S_4'' = k' \left[\Delta M - \frac{\Delta K}{H} 4\, \delta' \varepsilon' \right] \tag{60}$$

soit, pour la valeur (59) de δ':

$$S_4'' = k' [\Delta M - \Delta M \cdot \varepsilon' \cdot \varepsilon]. \tag{61}$$

Ces expressions suggèrent une méthode de détermination de la position parallèle et constitue en même temps un test du bon fonctionnement du corrélateur.

On donne à δ' la valeur obtenue en 2 (expression (59)) et on mesure le signal obtenu en fonction de ε' dans une gamme suffisamment proche de la position parallèle pour que les approximations effectuées restent valables.

On donne à ∂' d'autres valeurs voisines de la précédente et l'on recommence la mesure du signal en fonction de ε'. On obtient ainsi des droites dont le point commun détermine la position parallèle et l'amplitude de ΔM dans cette position, comme le montre la figure 25.

L'emploi de cette méthode nous a permis de vérifier que la position supposée parallèle déterminée par le minimum du signal

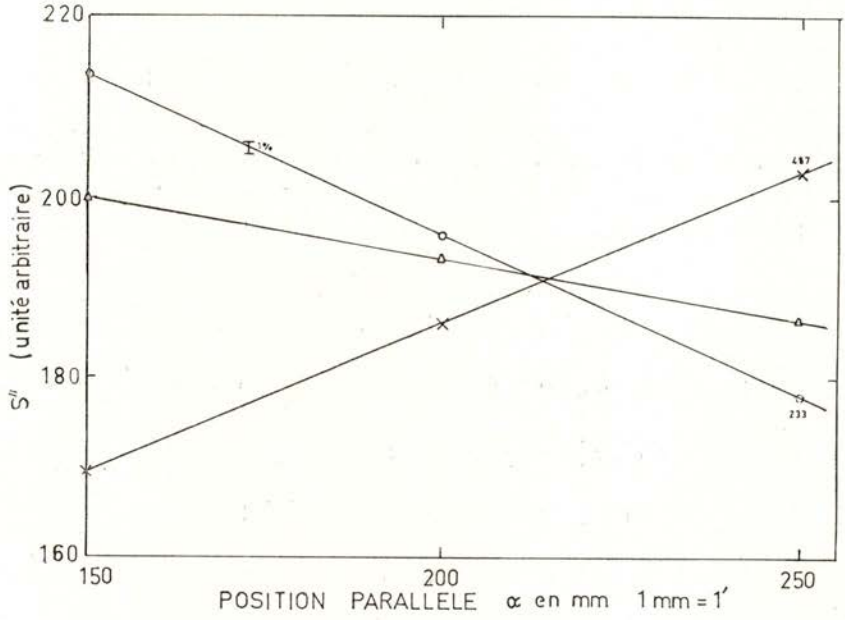


Fig. 25

obtenu en détection synchrone s'écartait de celle trouvée par corrélation d'une valeur qui n'a jamais dépassé deux minutes d'arc. Tous les positionnements angulaires aussi bien de α que de β ont été repérés par des méthodes optiques.

V — Resultats obtenus sur le nickel.

Les résultats qui vont être présentés ont été obtenus sur des sphères d'un diamètre compris entre 7,5 et 8 mm, taillées dans différents monocristaux.

Le processus de fabrication a été le suivant: la matière première utilisée est la poudre de nickel ex-carbonyle 99,95°/₀, fritée sous H_2 à 1000° C, et ensuite coulée sous vide — 10^{-5} torr en lingotière refroidie.

L' analyse chimique, après ce traitement, donne:

C	20 à 30 p. p. m.
Fe	0,02°/₀
Co, Si, S	traces

La cristallisation se fait par la méthode de Bridgmann en creusets de O_3Al_2 avec une vitesse de croissance de 1 cm/heure. Le découpage de l'échantillon a été effectué par électroérosion et le polissage, quand il a lieu, par la méthode dite des lapidaires.

L'excellente qualité des monocristaux obtenus est bien démontrée par le cliché de rayons X de la figure 26.

Nous allons commencer la description des résultats obtenus par l'analyse d'une expérience effectuée sur le plan (100) avec le système de bobines 1. Si le résultat numérique obtenue pour les constantes d'anisotropie de l' aimantation ne présente pas un grand intérêt, par contre, l'allure générale de la variation de $S_4^{//2}$, en fonction de H^{-2} (figure 27), ainsi que la variation de phase avec le champ, mesurée avec la détection synchrone, mettent en évidence:

a) Une variation linéaire de $S_4^{//2}$ en fonction de H^{-2} pour des champs allant de 5 kOe à 12 kOe. Au-delà de 12 kOe apparaît une nette courbure;

b) une variation de phase de 10°, entre le signal et la référence, a été obtenue, pour toute la gamme de champ. Cette variation de phase n'est pas imputable à un décalage entre l'axe des bobines et la direction du champ puisqu'elle ne varie pas pour de faibles désorientations de l'axe des bobines autour de la position parallèle;

c) pour des orientations nettement écartées de la position parallèle ($> 3°$), la loi de variation est bien celle de l'expression

$$S_4^{//2} = (kV\omega)^2 \left[\left(\frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{8} \right)^2 + 4\varepsilon^2 \frac{K_1^2}{H^2} \right]$$

aussi bien en variation d'amplitude que de phase.

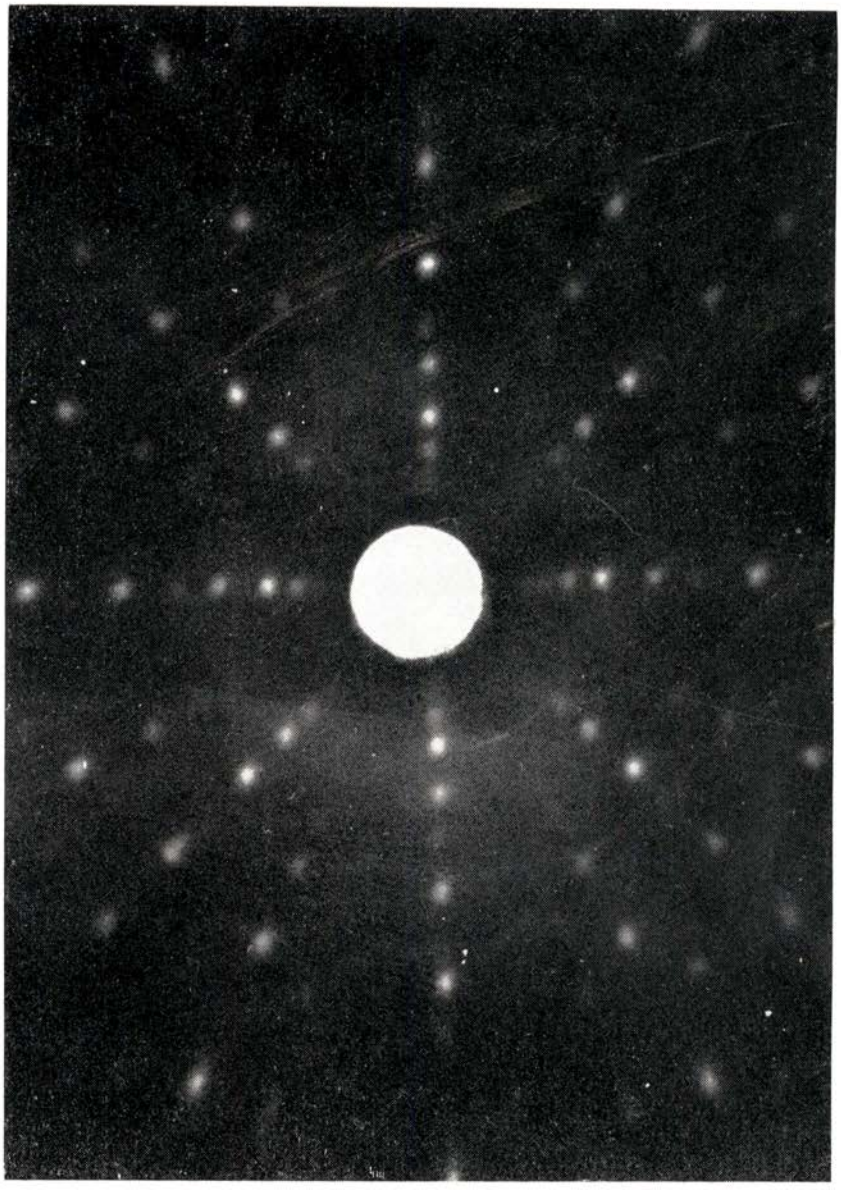


Fig. 26

d) l'ajustement de la courbe expérimentale par une fonction du type

$$S_4^2 = A + BH + CH^{-2} \tag{62}$$

donne pour ΔM tiré de A en supposant ΔM indépendant du champ une valeur de 0,12 u. e. m./cm³.

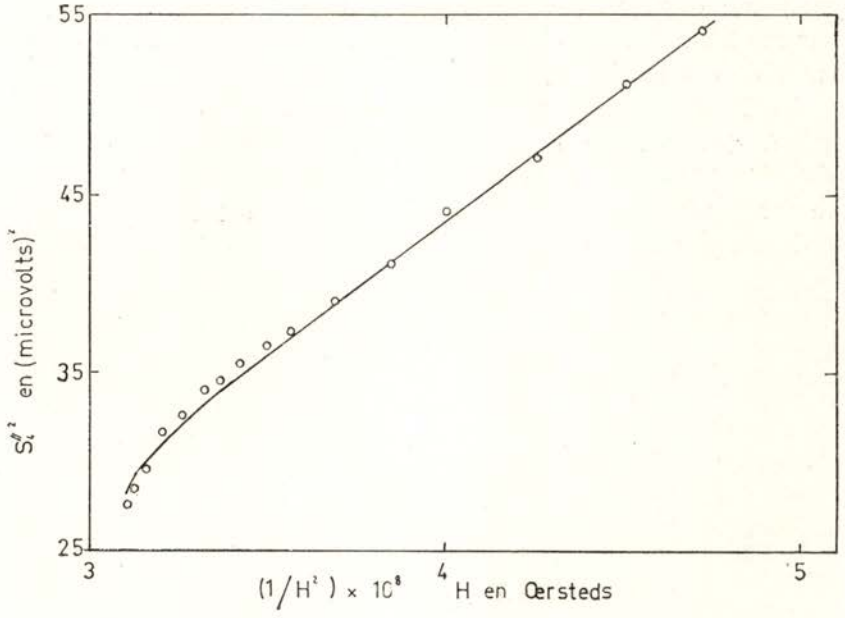


Fig. 27

Cette valeur qui était à comparer avec $\Delta M = 0{,}13$ u. e. m./cm³ obtenue par mesures de couples a constitué notre première mesure de ΔM.

La suite des expériences réalisées nous a montré que l'allure de cette variation était indépendante du cristal utilisé et que la majeure partie de la variation de phase observée correspondait aux valeurs du champ situées en-dessous de 14 kOe.

Les difficultés d'interprétation de ces variations et les problèmes mécaniques de réglage de la position parallèle nous ont fait abandonner ce système de bobines et passer au système 2.

De plus, par la suite, nous n'avons plus utilisé que des valeurs de champ supérieures à 14 kOe.

Etude du plan (100) du nickel:

Les mesures ont été faites sur des échantillons rodés, de 8 mm de diamètre, à des températures situées entre $-55°$ C et $+40°$ C, à l'exception de quelques expériences à la température de l'azote liquide.

Comme nous l'avons décrit au paragraphe V — B du Chapitre II, les mesures s'effectuent simultanément par la détection synchrone et par corrélation. Dans la suite de l'exposé, nous donnons les résultats obtenus indépendamment par l'une ou par l'autre de ces méthodes d'analyse.

Le Tableau IV reproduit les résultats d'une expérience effectuée à $+10°$ C. On remarquera qu'aucune variation de phase n'est détectée dans la variation du terme perpendiculaire, tandis que sur le terme parallèle elle est inférieure à 2°.

Les figures 28 et 29 représentent les variations des compo-

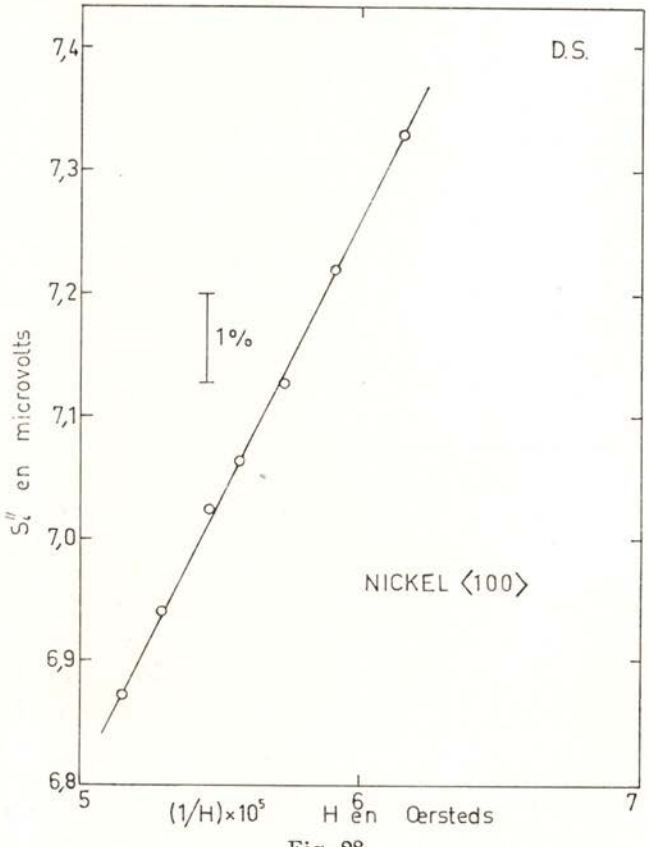


Fig. 28

TABLEAU IV

Date: 26.04.71 LOCK-IN

MESURES EN PARALLELE

$S_4^{//}$ Nickel $< 100 >$

POTENTIOMETRE	VOLTMETRE	PHASE	TEMPERATURE (Ω)	SIGNAL EN μV
CALIBRAGE	1324/3	9° 1		
1000	906/9	$\frac{\pi}{2} + 19° 8$	103,65	6,8730
900	915/8	$\frac{\pi}{2} + 19° 5$	103,65	6,9402
800	929/31	$\frac{\pi}{2} + 20° 4$	103,65	7,0226
750	934/5	$\frac{\pi}{2} + 20° 4$	103,65	7,0627
700	942/7	$\frac{\pi}{2} + 20° 4$	103,64	7,1262
650	949/52	$\frac{\pi}{2} + 21°$	103,64	7,2191
600	969/71	$\frac{\pi}{2} + 21° 5$	103,64	7,3265
1000	906/9	$\frac{\pi}{2} + 19° 8$	103,63	6,8759
CALIBRAGE	1322/7	9° 1		

Position 330 $\begin{cases} T_c = 10\ \mu V \\ S_L = 10\ \mu V \end{cases}$

MESURES EN PERPENDICULAIRE

$S_4^{\perp}$

1000	680.6/1.0	21° 4	103,62	259,489
900	698.8/ .9	21° 4	103,62	266,349
800	722.0/ .3	21° 4	103,62	275,191
750	737.3/ .6	21° 4	103,62	281,059
700	758.8/ .9	21° 4	103,62	289,177
650	784.9/5.0	21° 4	103,62	299,199
600	817.0/ .3	21° 4	103,62	311,414
1000	680.2	21° 4	103,62	259,224
CALIBRAGE	1319.7	9° 5		

Position 90 $\begin{cases} T_c = 500\ \mu V \\ S_L = 500\ \mu V \end{cases}$

santes parallèle et perpendiculaire, avec le champ, correspondant aux valeurs décrites au tableau précédent. La loi de variation du terme perpendiculaire obéit bien à une loi de variation en H^{-2}, comme le prévoit l'expression (44).

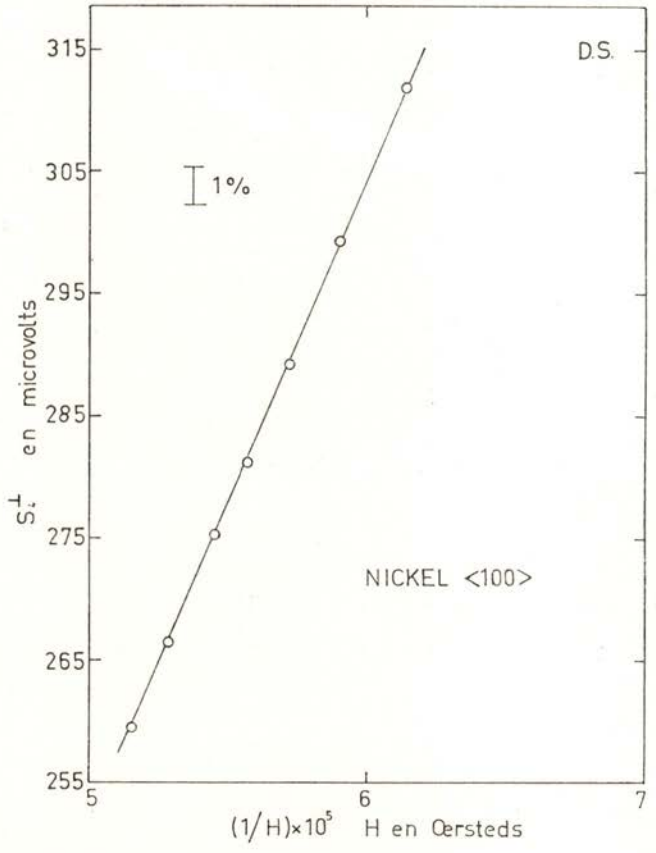


Fig. 29

En ce qui concerne la variation du terme parallèle, nous avons choisi de porter en abcisses H^{-1}. Ce choix est justifié par la linéairité des courbes que l'on obtient. Le résultat pour $\Delta M = \frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{8}$ obtenus par extrapolation à champ infini de cette loi est celui qui s'approche le plus de celui obtenu par mesures de couples. Il est important de signaler que, compte-tenu

de la faible gamme de champ dont nous disposons, la loi de variation du terme parallèle peut aussi bien être donnée par H_i^{-1}. L'écart obtenu sur ΔM, en utilisant ces deux lois d'extrapolation, est inférieur à la précision de nos mesures.

La figure 30 représente la variation de $\Delta K = \frac{K_1}{2} + \frac{K_3}{8}$ avec la température.

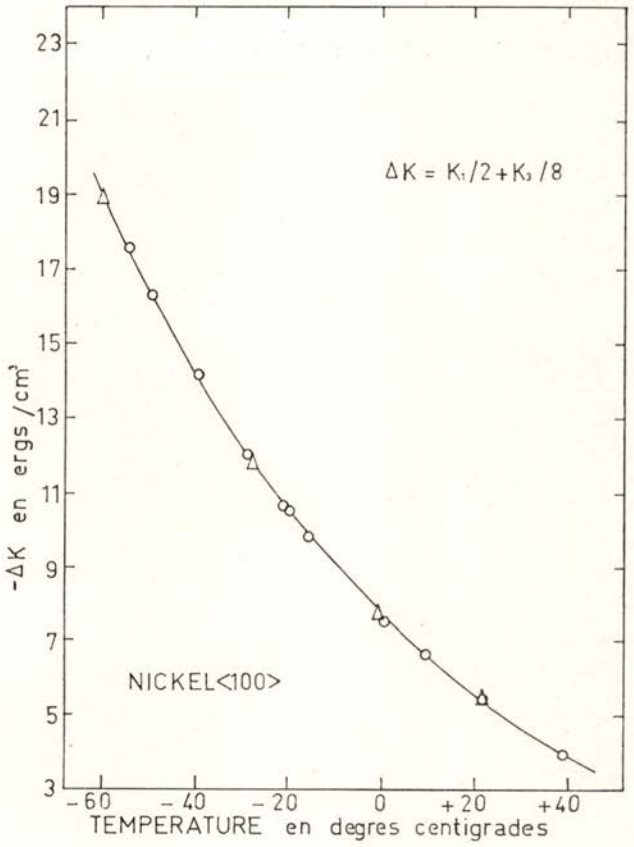


Fig. 30

Les points expérimentaux de mesures par la méthode du magnétomètre à échantillon tournant sont représentés par des cercles, les triangles correspondant aux mesures effectuées par Escudier [7], avec une balance de torsion. L'accord se fait à mieux que 1%. Il faut remarquer que les résultats obtenus par mesures

de couples donnent directement une différence d'énergie entre deux directions cristallographiques. Dans le cas présent $\Delta E = E_{110} - E_{100}$.

Le développement de ΔE en fonction des constantes d'anisotropie magnétocristalline comprend non seulement un terme en $\frac{K_1}{2} + \frac{K_3}{8}$ mais encore d'autres.

L'accord obtenu avec nos mesures permet de vérifier que la contribution à l'énergie des autres termes est au moins inférieure à 1 % dans la gamme de température décrite.

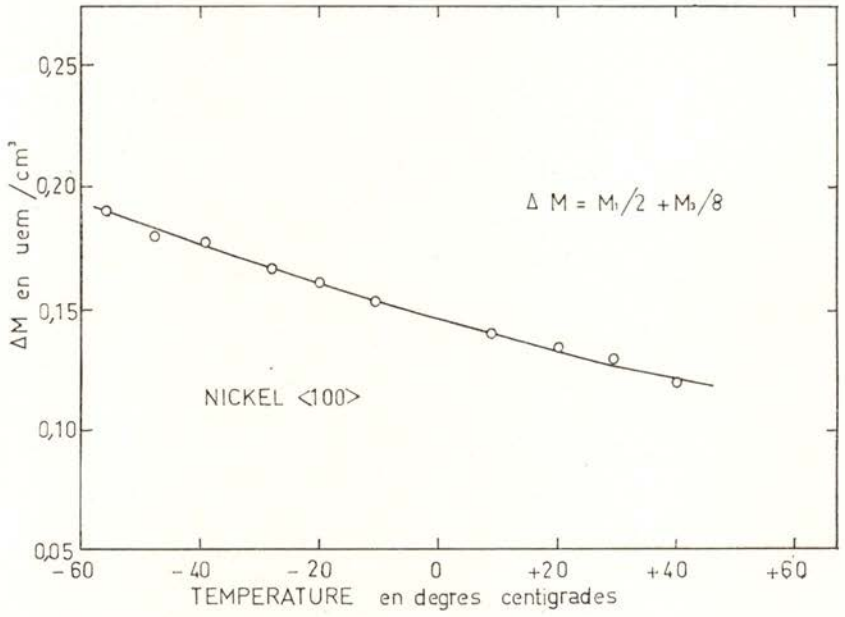


Fig. 31

La figure 31 montre la variation de $\Delta M = \frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{8}$ avec la température. Nos résultats sont sensiblement différents de ceux obtenus par Escudier. Nous essayerons de donner une interprétation de ce désaccord, au paragraphe suivant, après avoir décrit l'influence de l'état de surface des échantillons sur nos résultats. Nous pensons en effet que l'état de surface joue un rôle important dans nos mesures.

Malgré les difficultés expérimentales que nous avons signalées au chapitre II, en ce qui concerne les mesures d'anisotropie de l'aimantation à basse température, il nous a paru nécessaire de faire ces mesures afin de vérifier le comportement mécanique du système porte-échantillon et porte-bobines. Les expériences effectuées nous ont permis de tirer les conclusions suivantes:

a) la constante des bobines reste inchangée (à mieux que 1%) dans la gamme de température de 77° à 300 K°.

b) les mesures effectuées en perpendiculaire (figure 32) pour l'harmonique 4 donnent une valeur de ΔK en accord avec celle

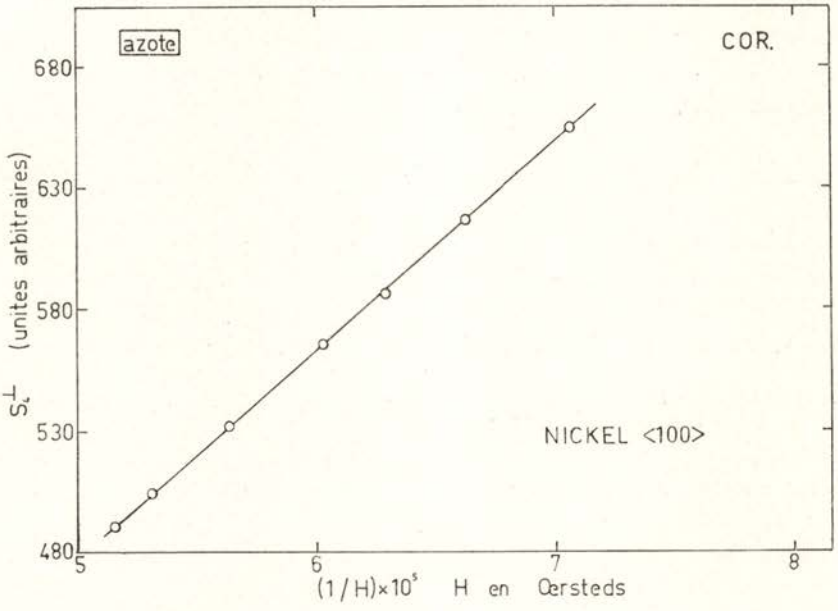


Fig. 32

obtenue par mesures de couples. L'écart subsistant (2%) est facilement justifiable par la contribution à ΔE, de termes qui, à température ambiante, sont de l'ordre de 10^{-3} des termes prépondérants. A la température de l'azote liquide, en raison de l'augmentation des constantes K_2 et K_3, ces termes deviennent de l'ordre de 10^{-2} des termes prépondérants.

c) les mesures effectuées au parallèle sont fortement perturbées par l'apparition du terme en 8θ, d'amplitude double du terme em 4θ. Le résultat obtenu est présenté sur la figure 33.

Une extrapolation en H^{-1} et H^{-2} semble nécessaire, mais donne pour ΔM une valeur très différente de celle obtenue par les mesures de couples. L'ordre de grandeur des coefficients des termes en H^{-1} et H^{-2} n'est pas justifiable par la contribution de termes qui étaient négligeables à températures voisines de l'ambiante.

d) nous avons mesuré le terme en 8θ parallèle (figure 34). L'expression pour la variation en fonction du champ est donnée par l'expression (43).

Etant donné l'ordre de grandeur de $\frac{M_s}{16}$, nous n'avons pu le mesurer. Par contre, la pente de la droite donne une valeur de $K_1 = -8{,}6 \cdot 10^5$ erg/cm^3 à comparer à $-8{,}4 \cdot 10^5$ erg/cm^3 obtenue par Escudier.

Etude du plan (110) du nickel:

L'étude pour le plan (110) ne présentant aucun trait original par rapport à celle décrite pour le plan (100), nous nous limitons à présenter quelques courbes caractéristiques (figures 35, 36, 37 et 38), ainsi que la variation de $\Delta' K$ en fonction de la température avec $\Delta' K = \frac{3K_1'}{2} + \frac{K_2'}{4} + \frac{K_3'}{32}$. L'étude de ce plan, d'analyse plus complexe que celle du plan (100) a été effectuée pour confirmer les résultats obtenus précédemment. Les triangles sur la figure 37 représentant les obtenus par mesure de couples.

VI — Etat de surface de l'echantillon; son influence sur les mesures d'anisotropie de l'aimantation.

Au cours de l'étude que nous avons effectuée sur le nickel, on a pu constater que les traitements mécaniques, chimiques et thermiques effectués sur l'échantillon lors des processus de fabrication intervenaient dans les résultats obtenus [22].

Nous avons dès lors entrepris une étude systèmatique de l'influence de l'état de surface de l'échantillon sur l'anisotropie de l'aimantation. Nous allons décrire les différents traitements correspondant aux courbes représentées sur la figure 39. Ces

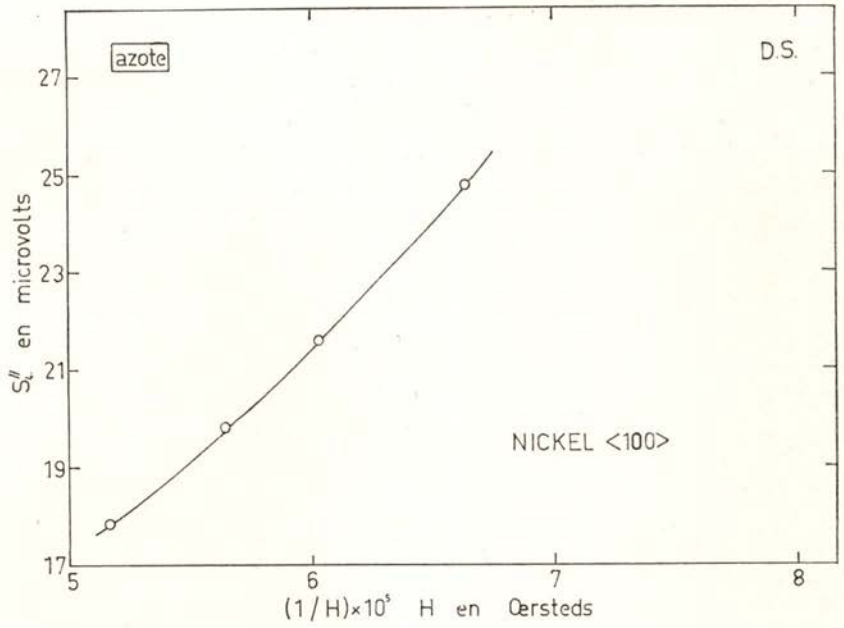

azote
D.S.
27
25
23
21
19
17
S_t'' en microvolts
NICKEL <100>
5
6
7
8
$(1/H)\times10^5$ H en Œrsteds

Fig. 33

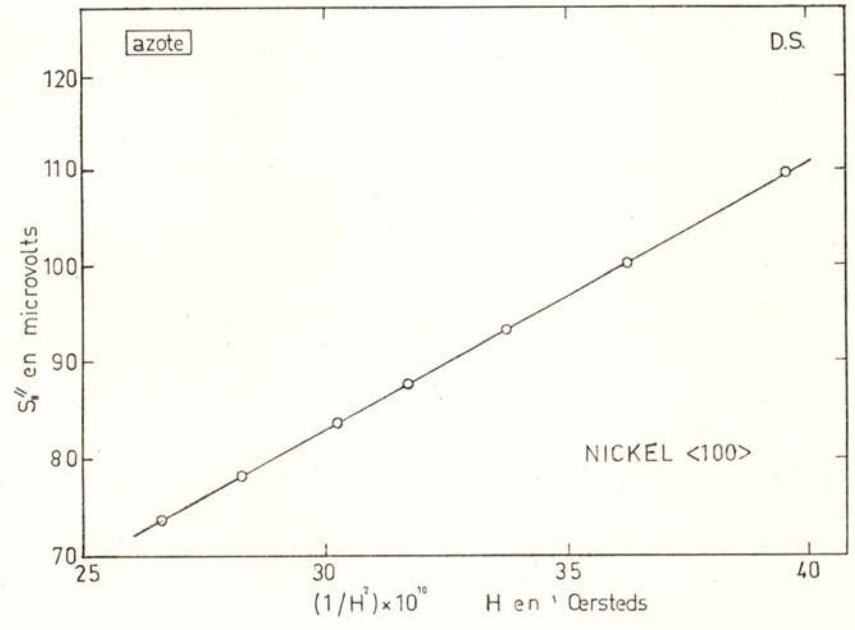

azote
D.S.
120
110
100
90
80
70
S_t'' en microvolts
NICKEL <100>
25
30
35
40
$(1/H^2)\times10^{10}$ H en Œrsteds

Fig. 34

résultats ont été obtenus avec le même échantillon qui a subi des traitements successifs. Comme état de départ, nous avons pris celui qui est obtenu directement après découpage par électroérosion, sans aucun recuit ou polissage. Nous analyserons les variations de la composante $S_4^{//}$ en fonction du champ, à une température de 20° C et pour le plan (100).

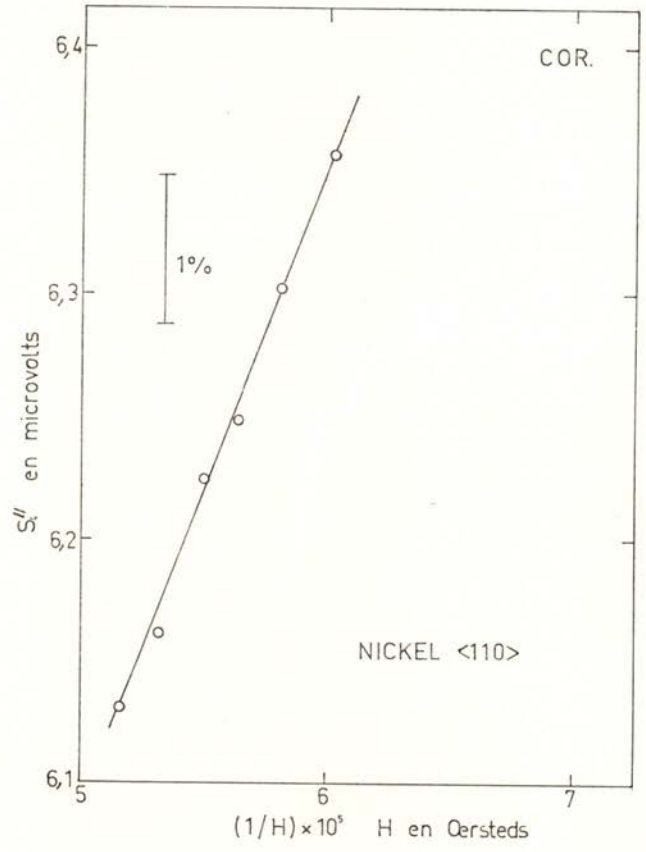


Fig. 35

Le champ extérieur prenait des valeurs comprises entre 5 et 20 kOe.

Sur la courbe 1, dans toute la gamme de champ disponible, on constate une variation linéaire de $S_4^{//}$ avec l'inverse du champ extérieur corrigé du champ démagnétisant. Comme nous le verrons par la suite, nous avons tracé la variation de $S_4^{//}$ en fonction de

H_i^{-1} afin de vérifier sa possible interprétation par le modèle de Brown [23] d'approche à la saturation. Les différences obtenues avec la courbe de variation $S_4^{//}(H^{-1})$ sont négligeables.

La courbe 2 a été obtenue après rodage de l'échantillon avec de la pâte émeri de $8\,\mu$.

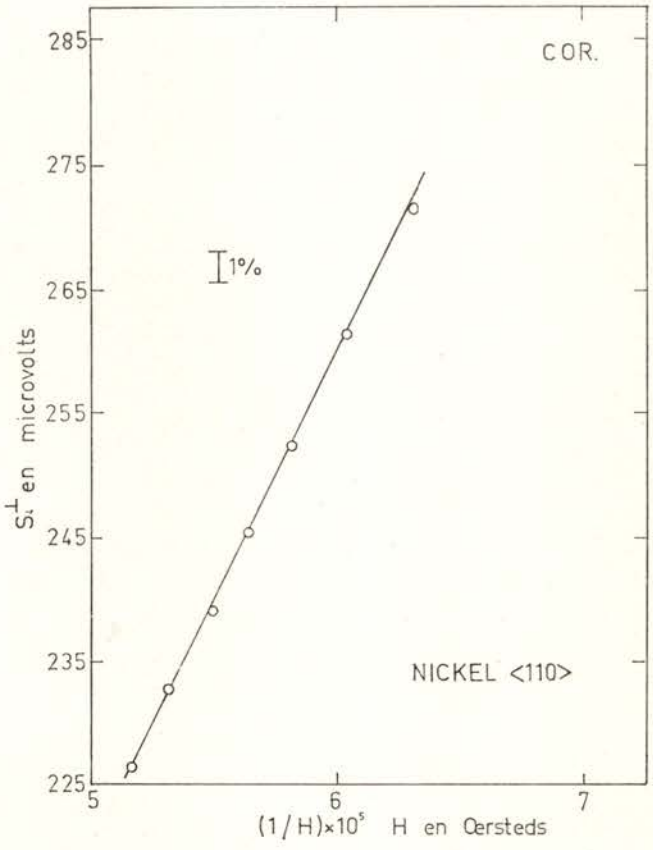


Fig. 36

La courbe 3 a été obtenue après un nouveau rodage avec de la pâte diamant de $0{,}5\,\mu$.

Ces deux courbes font apparaître nettement la superposition d'un terme en H_i^{-2} au terme en H_i^{-1} déjà existant.

L'extrapolation à champ infini, effectuée par moindres carrés, avec un expression du type $S_4^{//} = A + B\,H_i^{-1} + C\,H_i^{-2}$ done pour

$\Delta M = \frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{8}$ des valeurs variant jusqu'à 10% en-dessus de la valeur correspondante obtenue par électroérosion.

Des rodages sucessifs, effectués à la pâte diamant de 0,5 μ, ont donné des courbes intermédiaires entre la courbe 3 et la courbe 4, celle-ci constituant en quelque sorte une «courbe limite».

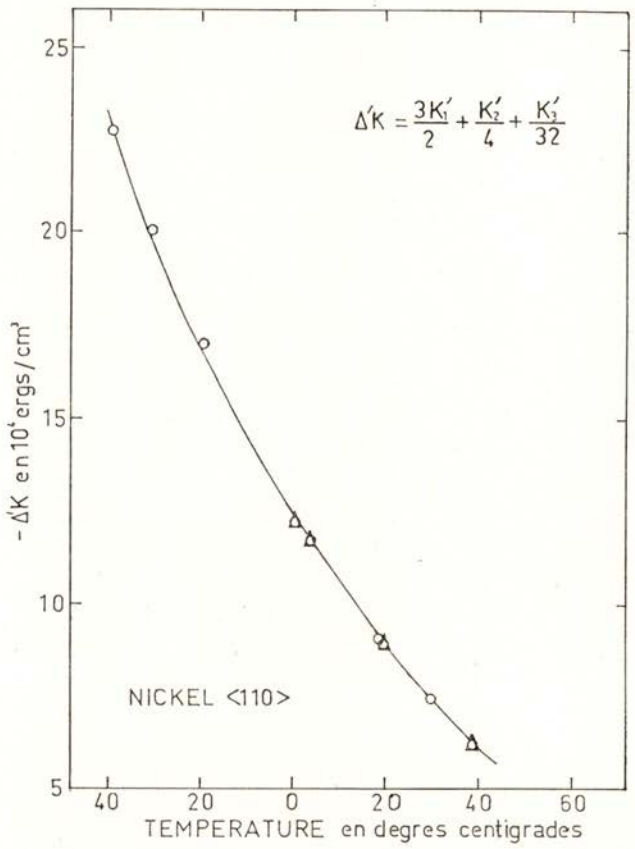


Fig. 37

Au cours des mesures précédentes, aucune variation de phase significative du signal à mesurer par rapport au signal de référence n'a été enregistrée.

Un recuit sous hélium, à une température de 600° C, a fait apparaître, comme le montre le cliché Rayons X de la figure 16, un grand nombre de petites tâches, de même symétrie que le

cristal, mais désorientées par rapport à celui-ci. Les resultats obtenues apârement donnt un l'orde variation non interputable pour le moment. Les courbes 2, 3 et 4, de la figure 39 semblent suivre une loi du type $S_4(H_i) = S_4(0) + a H_i^{-1} + b H_i^{-2}$ et peuvent être interprétées par la théorie d'approche à la saturation de Brown [23]. Cet auteur montre que des concentrations ponctuelle,

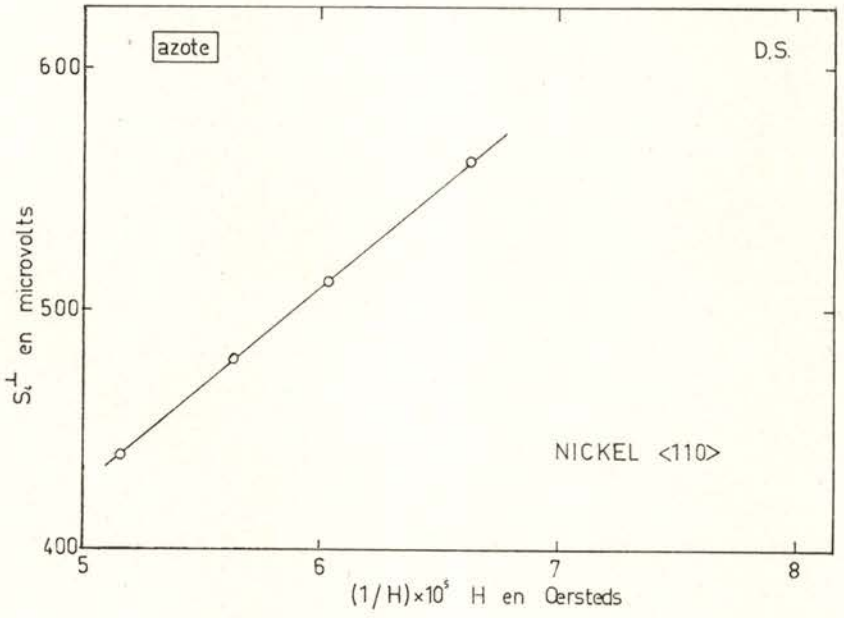


Fig. 38

linéaire ou plane de forces (par exemple: dislocations) font apparaître une loi du type:

$$\frac{M}{M_s} = 1 - a H^{-\frac{1}{2}n}$$

avec $n = 1, 2, 3$ respectivement.

Une extension de ce modèle aux cas des mesures d'anisotropie permet ainsi de justifier l'apparition d'une terme en H_i^{-1}.

Il est en effet très probable que les traitements mécaniques qui perturbent à un degré plus ou moins important la surface de l'échantillon fassent apparaître une distribution de dislocations

qui seront à l'origine du terme $a H_i^{-1}$. De même, le terme $b H_i^{-2}$ peut s'interpréter par l'existence de cristallites désorientées localement.

De nombreuses études ont été consacrées à l'approche à la saturation sur des monocristaux déformés. Une étude particulièrement détaillée a été faite par les chercheurs du Max-Planck-

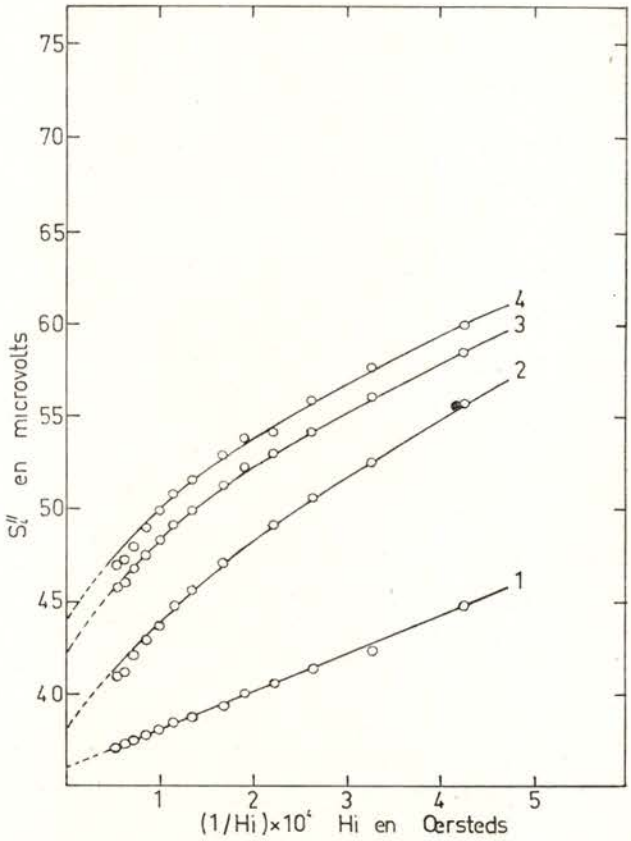


Fig. 39

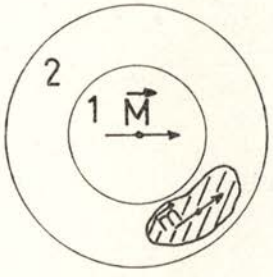
-Institut de Stuttgart [24, 25, 26, 27]. Par contre, trop peu d'études ont été effectuées sur la variation des constantes d'anisotropie avec le degré de déformation plastique de l'échantillon.

Cependant, Baatacharyya et al. [28] ont observé une variation maximale de 6,5 % de la constante K_1 sur des disques de nickel ayant subi une tension ε de 0,17. La tension ε est définie par

le rapport entre la variation d'épaisseur après déformation et l'épaisseur initiale.

Les déformations subies par nos échantillons en cours de rodage apparaissent comme nettement moins importantes que celles décrites par ces auteurs. Ceci confirmerait l'indépendance des mesures des constantes d'anisotropie magnétocristalline des traitements que nous avons effectués.

Une interprétation des résultats obtenus, et en particulier du comportement du signal en parallèle, ainsi que celui obtenu en perpendiculaire, est indiquée sur le schéma ci-contre. On y représente une sphère décomposée en deux régions: la région 1 caractérisée par une aimantation uniforme $\vec{M}$ et comprenant tout le volume de l'échantillon à l'exception d'une mince couche superficielle, la région 2, perturbée par les différents traitements subis et dans laquelle on peut considérer plusieurs «zones», dont une est représentée en hachuré. Cette zone sera caractérisée par son aimantation $\vec{m}$, non colinéaire avec $\vec{M}$. $\vec{M}$ et $\vec{m}$ sont des aimantations par unité de volume.



L'aimantation résultante de la région 1 peut être représentée par un dipôle unique, placé au centre de l'échantillon, et le signal induit par cette région sera proportionnel à l'anisotropie de l'aimantation. Par contre, le signal induit par les différentes zones de la région 2 sera donné par une fonction vraisemblablement compliquée mais qui en tout état de cause sera proportionnelle à l'aimantation totale $\vec{m}$. De plus, la constante des bobines intervenant pour le calcul de la force électromotrice induite pour cette région sera différente de celle qui intervient pour le calcul du dipôle. On peut ainsi concevoir une contribution non négligeable d'un petit élément de volume perturbé par rapport à la contribution de tout le reste de l'échantillon.

Dans la mesure en perpendiculaire, la contribution de la région 1 est proportionnelle à $\vec{M}$, tandis que celle de 2 à $\vec{m}$. Compte tenu du rapport des volumes, il apparaît une très faible contribution des régions perturbées.

VII — Resultats obtenus sur l'alliage CoFe (8 % Fe).

Une fois la mise au point de l'appareillage terminée, avec l'étude du nickel, nous avons étudié l'alliage CoFe avec 8 % de Fer, de structure cubique. Le cristal taillé en sphère de 8 mm de diamètre a été fourni par Monsieur Nowicki, de l'Institut de Physique, à Poznam, Pologne.

Nous nous sommes surtout intéressés à la variation de l'harmonique d'ordre 4 du signal induit dans les bobines, en fonction du champ extérieur et de la température.

Etude du plan (110):

a) mesure en parallèle: la caractéristique principale des résultats obtenus en parallèle réside dans la très petite variation

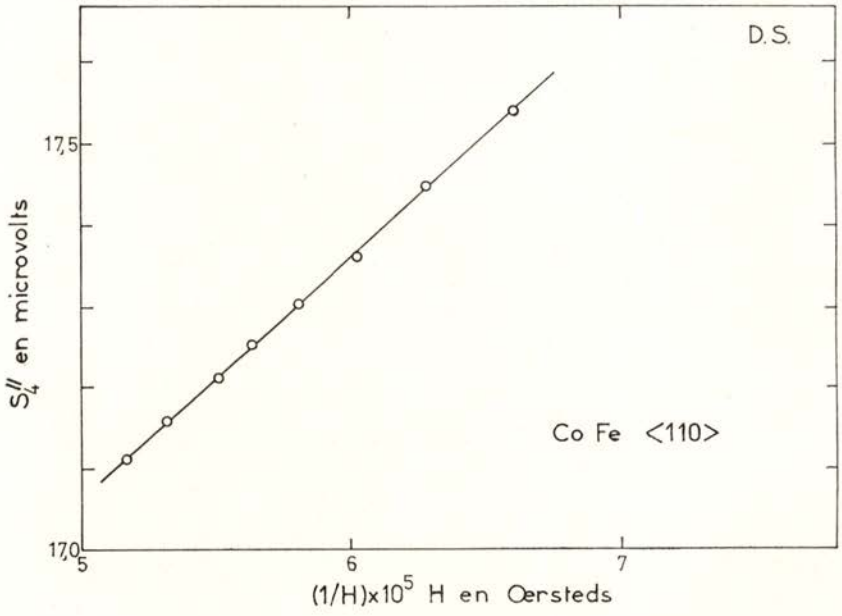


Fig. 40

du signal $S_4^{//}$ en fonction du champ, comme le montre la figure 40, accompagnée d'une absence de variation de phase du signal par rapport au signal de référence. Par extrapolation linéaire en

H^{-1}, nous avons pu déterminer ΔM_{110}, dont la variation avec la température este donnée sur la figure 41.

b) mesure en perpendiculaire: S_4^1 varie linéairement avec l'inverse du champ appliqué, en accord avec l'expression (49), figure 42, et d'après la pente de la droite, on obtient

$$\Delta' K = \frac{3 K_1}{2} + \frac{K_2}{4}$$

dont la variation avec la température est donnée sur la figure 43.

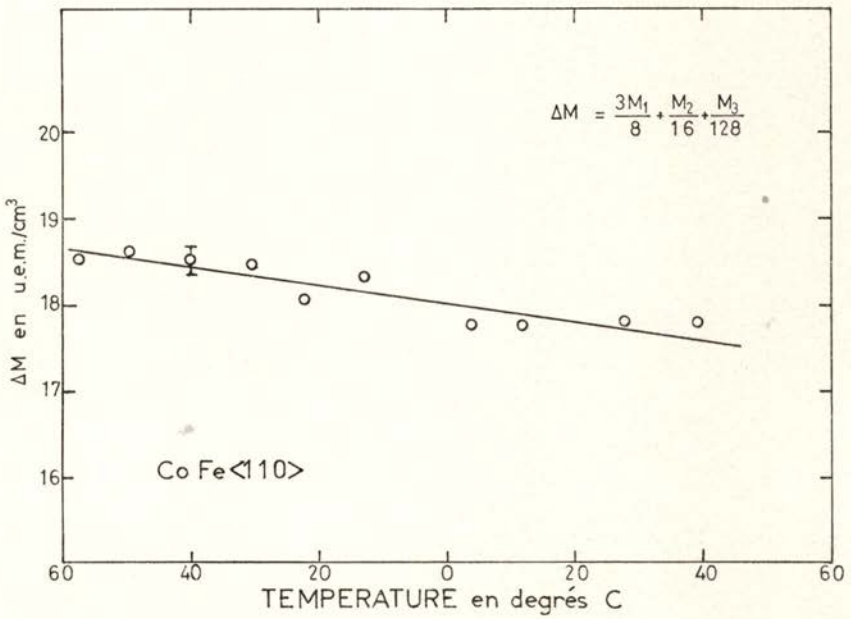


Fig. 41

Etude du plan (100):

Lors de l'orientation du cristal, une mosaïque de quelques degrés, (3' à 4°), a été observée dans les directions (100).

Nous avons fait quelques mesures dans cette direction, afin de vérifier l'influence de ces désorientations sur les mesures d'anisotropie de l'aimantation.

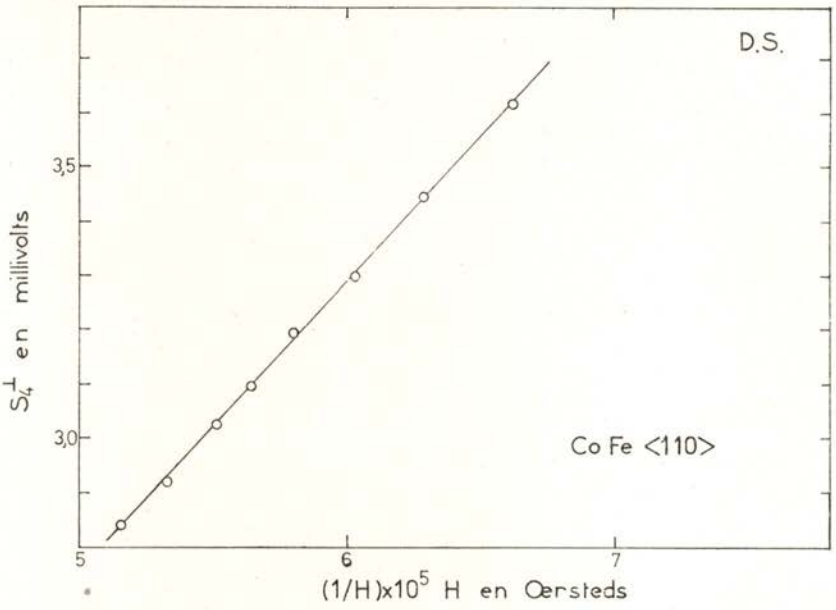

D.S.
3,5
3,0
$S_4^{\perp}$ en millivolts
Co Fe <110>
5
6
7
(1/H)x10^5 H en Oersteds

Fig. 42

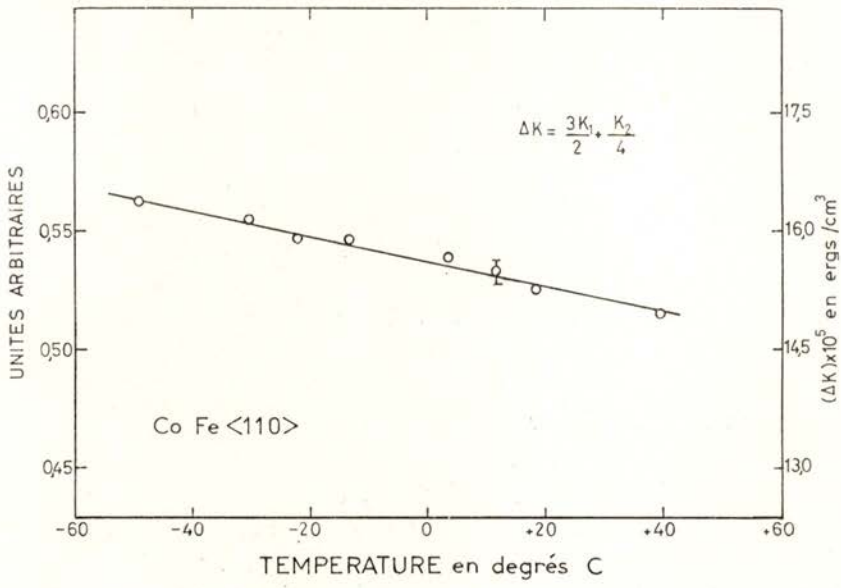

$\Delta K = \frac{3K_1}{2} + \frac{K_2}{4}$
0,60
0,55
0,50
0,45
UNITES ARBITRAIRES
Co Fe <110>
17,5
16,0
14,5
13,0
$(\Delta K)x10^5$ en ergs/cm^3
-60
-40
-20
0
+20
+40
+60
TEMPERATURE en degrés C

Fig. 43

Comme on peut le constater sur la figure 44, la variation en fonction de H^{-1} est toujours linéaire mais elle est plus importante que celle trouvée dans le plan (110).

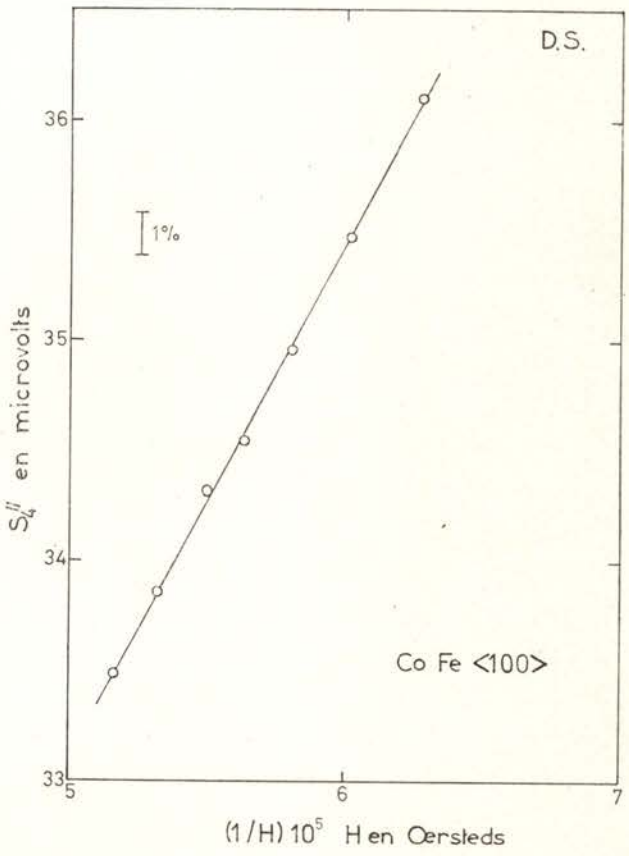


Fig. 44

La mesure en perpendiculaire nous donne la valeur de $\Delta K = \frac{K_1}{2} + \frac{K_3}{8}$. La comparaison de ΔK_{100} et $\Delta' K_{110}$ à l'ambiante montre que à 1 % près on peut négliger dans les deux expressions les contributions de K_2 et K_3 et on obtient par exemple à 20° C, $K_1 \simeq 10^6$ ergs/cm^3.

CHAPITRE IV

Quelques considerations theoriques

Conte premier: où Candide rencontre la loi en puissance 10 et ce qu'il en advient.

En parcourant la très abondante littérature consacrée à l'anisotropie des ferromagnétiques, on constate que se sont les variations thermiques des constantes d'anisotropie magnétocristalline qui ont été les plus étudiées. On a cherché à vérifier l'accord entre les résultats expérimentaux et la loi en puissance dix.

L'origine de celle-ci remonte à 1936; on la trouve dans un travail d'Akulov [29] intitulé «contribution à la théorie quantique de la variation thermique de la courbe d'aimantation». L'idée qui est à la base de cette étude est de considérer chaque spin comme indépendant. Son énergie, indépendante de la température, ne dépend que de son orientation par rapport aux axes cristallographiques et provient de l'interaction avec le champ cristallin.

Cette énergie peut s'écrire:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + K_1(0)\,[\nu_1^2\,\nu_2^2 + \nu_2^2\,\nu_3^2 + \nu_3^2\,\nu_1^2] + \cdots \tag{63}$$

où ν_1, ν_2, ν_3 sont les cosinus directeurs du spin considéré.

L'énergie libre du cristal, en effectuant un calcul de perturbation au premier ordre, sera donnée par:

$$F = F_0 + K_1(0) < \nu_1^2\,\nu_2^2 + \cdots + \nu_3^2\,\nu_1^2 > . \tag{64}$$

Le résultat de ce calcul sera à comparer à l'expression:

$$F = K_0(T) + K_1(T)\,(\alpha_1^2\,\alpha_2^2 + \alpha_2^2\,\alpha_3^2 + \alpha_3^2\,\alpha_1^2)\cdots \tag{65}$$

On obtient ainsi:

$$K_1(T) = K_1(0)\left(1 - 10\,\frac{M_s(0) - M_s(T)}{M_s(0)}\right). \tag{66}$$

Dans la gamme de température pour laquelle:

$$\frac{M_s(0) - M_s(T)}{M_s(0)} \ll 1$$

(66) devient:

$$\frac{K_1(T)}{K_1(0)} = \left[\frac{M_s(T)}{M_s(0)}\right]^{10}. \tag{67}$$

Cette expression est connue sous le nom de loi en puissance 10 de la première constante d'anisotropie magnétocristalline.

Il faut bien remarquer que le facteur 10 dans cette expression ne provient pas de l'emploi d'un modèle déterminé, mais uniquement de la combinaison des cosinus directeurs intervenant dans l'équation (63). Dans certains développements ultérieurs de cette loi, on trouve une variation en puissance $\frac{l(l+1)}{2}$; en particulier pour $l=4$, on retrouve la loi en puissance 10 d'Akulov. Cette variation $\frac{l(l+1)}{2}$ provient de considérations de symétrie avec un développement des polynômes de Legendre sous la forme:

$$P_l(\cos\theta) = 1 - \frac{l(l+1)}{2}\,\frac{\theta^2}{2} + \cdots \simeq (\cos\theta)^{\frac{l(l+1)}{2}}$$

l'approximation restant valable pour θ petit, ce qui limite son application aux basses températures.

Par la suite, et pendant vingt ans, le théorème d'Akulov a subi une série de succès et de revers, allant de l'accord le plus complet obtenu pour des échantillons de fer jusqu'à un flagrant désaccord pour le nickel.

Pourtant, déjà en 1937, Van Vleck [30] se penchait sur un problème plus fondamental «... we shall confine our attention to the theoretical explanation of the existence of nonvanishing constants K_1, K_2 of the proper order of magnitude, in other words, the origin of the anisotropy on the basis of atomic theory ...».

Ce modèle a permis de montrer comment l'anisotropie peut être interprétée à partir d'un modèle d'électrons localisés.

L'Hamiltonien d'Heisenberg, $-2J\sum_{i>j}\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j$ où i et j sont les sites atomiques des moments $\vec{S}_i$ et $\vec{S}_j$, est invariant par rotation; il ne peut donc contribuer par un terme anisotrope à l'énergie du cristal. Par contre, Van Vleck a montré qu'en raison du couplage spin-orbite, dont déjà Bloch et Gentile [31] ont suggéré l'importance pour l'anisotropie, il existe un couplage pseudo-dipolaire de la forme:

$$C_{ij}(\vec{r}_{ij})\left\{\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j-\frac{3(\vec{S}_i\cdot\vec{r}_{ij})(\vec{S}_j\cdot\vec{r}_{ij})}{r_{ij}^2}\right\} \tag{68}$$

entre deux spins dans les sites i et j, séparés par le vecteur $\vec{r}_{ij}$.

Il existe aussi un couplage pseudo-quadrupolaire:

$$D_{ij}(\vec{S}_i\cdot\vec{r}_{ij})^2(\vec{S}_j\cdot\vec{r}_{ij})^2\cdot r_{ij}^{-4}. \tag{69}$$

Les constantes de couplage C_{ij} et D_{ij} sont indépendantes de la température.

La constante d'anisotropie K_1 pour les cristaux cubiques est alors obtenue par un calcul de perturbations au deuxième ordre sur les termes de couplage dipolaire et au premier ordre sur les termes quadrupolaires. Le calcul poussé à un ordre plus élevé fait apparaître la constante K_2.

La principale difficulté avec ce modèle est qu'il prévoit une valeur du rapport K_2/K_1 trop petite, les deux constantes étant obtenues par des calculs de perturbations poussés à des ordres différents. Zener [32] a étendu jusqu'au point de Curie la gamme de température où le modèle d'Akulov et Van Vleck était applicable et il a généralisé la loi en puissance 10 sous la forme:

$$k_l(T)=m^{\frac{l(l+1)}{2}}$$

où $k_l(T)$ est le coefficient d'ordre l du développement en harmoniques sphériques et m est l'aimantation réduite $M_s(T)/M_s(0)$.

Par la suite, le modèle de Van Vleck a fait l'objet de plusieurs développements. Les calculs de la loi de variation thermique ont

alors donné une loi en puissance 16, Kasuya [33]; corrigée par Charap et Weiss [34], cette loi est alors devenue une loi en puissance 8; enfin l'introduction de certains termes manquants a donné à nouveau la loi en puissance 10.

Il a fallu attendre 1959 pour que Van Vleck [35] mette tous les adeptes du modèle localisé d'accord. Cet auteur a montré que la validité de la loi en puissance 10 était liée au fait qu'il existe entre deux spins à basse température une corrélation rigide. L'hypothèse de cette corrélation à basse température est justifiée par la théorie des ondes de spins, amenant à considérer le complexe de deux ions de spin S comme un seul ion de spin $2S$. Il a également montré que la loi en puissance 10 est restreinte aux matériaux dont les propriétés magnétiques étaient interprétables par un modèle de spins localisés, ce qui exclut tout naturellement les métaux $3d$.

«Ce dernier paragraphe fit dire très sagement à Candide qu'il devait exister un autre modèle et il remonta ainsi le cours du temps à sa recherche».

Conte deuxieme: coment Candide reussit a se debarrasser du modele localise et devint le defenseur du modèle itinerant.

En 1936, avec les travaux de Slater [36], Stoner [37] et Wohlfarth [38], apparaît le modèle des électrons itinérants ou modèle collectif du ferromagnétisme.

Cette théorie, qui s'est développée parallèlement à celle qui s'appui sur un modèle d'électrons localisés, a été appliquée en particulier aux métaux $3d$.

Ces deux modèles ont évolué au cours du temps, chacun prenant certaines caractéristiques de l'autre et perdant ainsi son caractère propre initial.

Il existe néanmoins certains résultats expérimentaux qui ont tendance à favoriser le modèle itinérant. Parmi ceux-ci, Herring [39] cite:

a) l'ordre de grandeur de la chaleur spécifique électronique du nickel qui met en évidence la participation des électrons aux phénomènes de condution [39];

b) la valeur non entière du moment à saturation du nickel [39] $\mu = 0{,}615\,\mu_B$/atome. Toutefois, Van Vleck [40], en 1953, a suggéré

que cela pouvait provenir de l'existence de deux configurations possibles pour les atomes de nickel d^9 et d^{10}; l'état moyen donné par $d^{9,4}$ correspond ainsi à un nombre non entier de magnétons de Bohr. Ce modèle n'est plus un modèle strictement localisé et devrait plutôt être appelé: modèle itinérant corrélé;

c) enfin, les expériences faisant intervenir les propriétés de la surface de Fermi du nickel [41] démontrent clairement le caractère itinérant des électrons d.

La première application du modèle itinérant à l'anisotropie des ferromagnétiques est due à Brooks [42], en 1940. «···At Professor Van Vleck's suggestion, we have treated ferromagnetic anisotropy from the standpoint of the «itinerant» or «collective» electron model of Bloch, Stoner and Slater, in which each electron is treated as belonging to the metal as a whole and as moving independently of the other electrons in a self-consistent field determined by the potential of the ions and the «time exposure» field of the other electrons...».

Pour Brooks, c'est le couplage spin-orbite qui, en perturbant la structure de bandes, est à l'origine de l'anisotropie magnétique.

Les progrès effectués depuis le premier calcul de Brooks résultent surtout d'une meilleure description des états de base intervenant pour le calcul des bandes.

Fletcher [43] utilise des états de base obtenus par combinaison linéaire des orbitales atomiques (LCAO). Ce modèle présente déjà un avantage par rapport à celui de Brooks qui ne considérait que des orbitales t_{2g} et négligeait ainsi les deux orbitales e_g.

La principale limitation de ces modèles est qu'ils négligent l'hybridation entre les électrons des bandes s et des bandes d.

Parmi les travaux récents sur l'anisotropie dans le cadre d'un modèle itinérant citons celui de Furey [44] qui a calculé l'anisotropie du nickel utilisant le schéma d'interpolation de bandes de Hodges, Ehrenreich et Lang [45]. Il utilise comme fonction de base les cinq LCAO plus les quatre OPW, incluant l'hybridation entre deux électrons. Furey met en évidence la contribution des états dégénérés, comme le montre la figure 45 représentant la surface de quelques bandes d près du point X pour deux directions d'aimantation. Les écarts d'énergie sont plus grands près de X et n'ont pas tous le même signe. En faisant varier la température, l'occupation des états les plus

importants change et l'énergie totale peut aussi varier rapidement. Ce modèle présent l'avantage d'expliquer une variation rapide de l'énergie avec la température en identifiant cette variation à celle des niveaux d'énergie des états près du point X. La figure 46

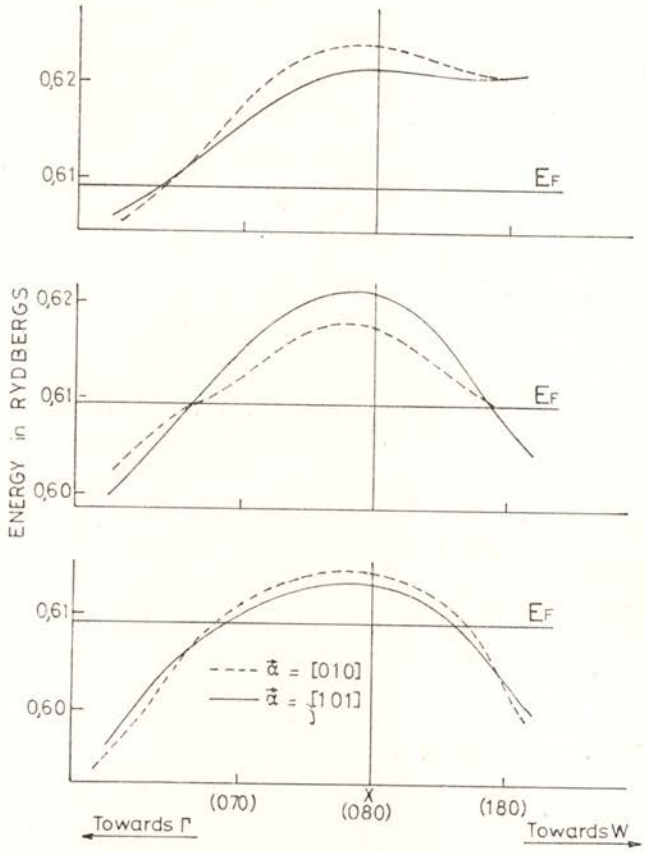


Fig. 45

permet de comparer les résultats expérimentaux obtenus plus tard par Franse [46] à la courbe théorique de Furey. L'accord est excellent. Cet auteur suggère que le calcul de l'anisotropie de l'aimantation soit fait par l'emploi du modèle de Furey.

Conte troisieme: Candide fait connaissance avec l'anisotropie de l'aimantation.

L'existence d'une anisotropie de l'aimantation a été proposée par Callen et Callen en 1960. Pour ces auteurs, l'anisotropie de

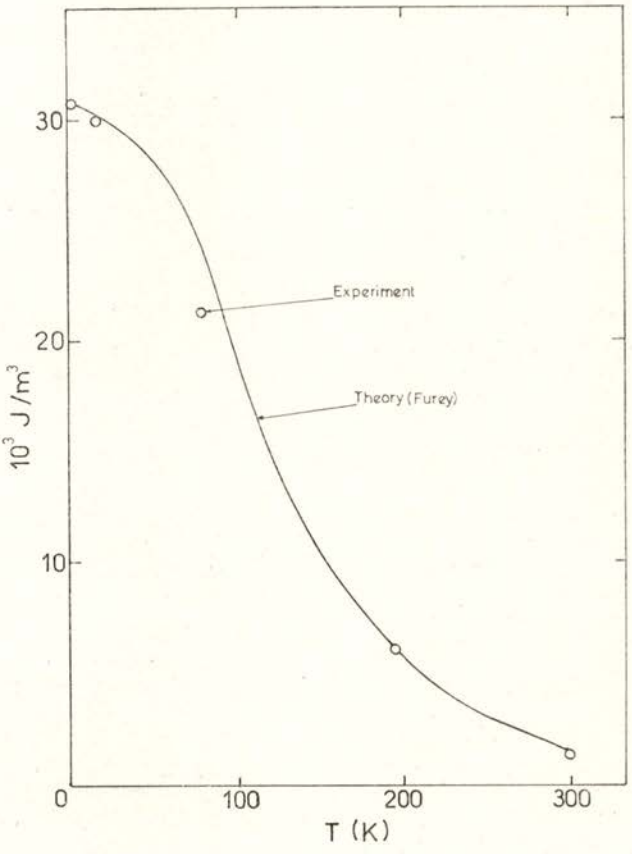


Fig. 46

l'aimantation résulte directement de l'anisotropie de l'énergie. Le calcul des coefficients d'anisotropie de l'aimantation, intervenant dans le développement du module du vecteur aimantation en fonctions sphériques, utilise un modèle localisé dans lequel on attribue à chaque spin une énergie d'anisotropie. L'énergie

d'échange est représentée par un champ moléculaire. Ceci donne:

$$M_l(T) = -\frac{l(l+1)}{2\,M_0(0)} \cdot k_l^0 \cdot C \cdot T^{1.2} \tag{70}$$

où M_l est la constante d'anisotropie de l'aimantation d'ordre l et k_l^0 est le coefficient d'anisotropie d'ordre l et provient du développement de l'énergie libre du cristal sous la forme

$$F = \Sigma k_l(T, H) \sum_{m=-l}^{+l} C_l^m\, Y_l^m\,. \tag{71}$$

Cette expression prévoit que tous les M_l seront nuls à 0°K, l'aimantion à saturation à cette température se réduisant à la partie isotrope de M.

L'ordre de grandeur des M_l prévu par cette théorie est en désaccord avec les résultats expérimentaux obtenus pour le nickel.

Pour tenter d'expliquer ces divergences, Aubert [2] suggère un modèle où l'on considère, en première approximation, que le système de spins est isotrope et que la partie principale de l'anisotropie de l'aimantation est due à une contribution orbitale.

Pour cela, il considère le métal comme étant constitué de deux système couplé entre eux, à savoir le système des spins et le système des moments orbitaux, et où:

spins échange isotrope	couplage ⟶ ⟵ spin-orbite	moments orbitaux blocage cristallin

a) le système des spins, couplés entre eux par les interactions d'échange est responsable du ferromagnétisme. Ce système possède une aimantation isotrope M_s.

b) le sistème des moments orbitaux est bloqué dans certaines directions du cristal par l'intermédiaire du champ cristallin.

c) l'interaction entre les deux sistèmes se fait par l'intermédiaire du couplage spin-orbite. On suppose pouvoir représenter cette interaction par un champ magnétique H_s de même direction que M_s et agissant sur le système orbital.

d) ce modèle présente l'avantage d'interpréter la variation très rapide avec la température de l'énergie d'anisotropie du

nickel, ainsi que de mettre en évidence le rôle que joue l'aimantation orbitale dans l'anisotropie de l'aimantation. Il prévoit une augmentation régulière de l'anisotropie de l'aimantation au fur et à mesure que la température décroît. Cette théorie était en accord avec les résultats disponibles sur le nickel (jusqu'à 100°K) au moment où elle fut formulée. Dernièrement, Aubert et Escudier [7] on étudié la variation de l'anisotropie jusqu'à 4°K. Leurs résultats sont représentés sur la figure 47. On notera, vers 100° K, un maximum pour la courbe et en-dessous de cette température, une décroissance de ΔM.

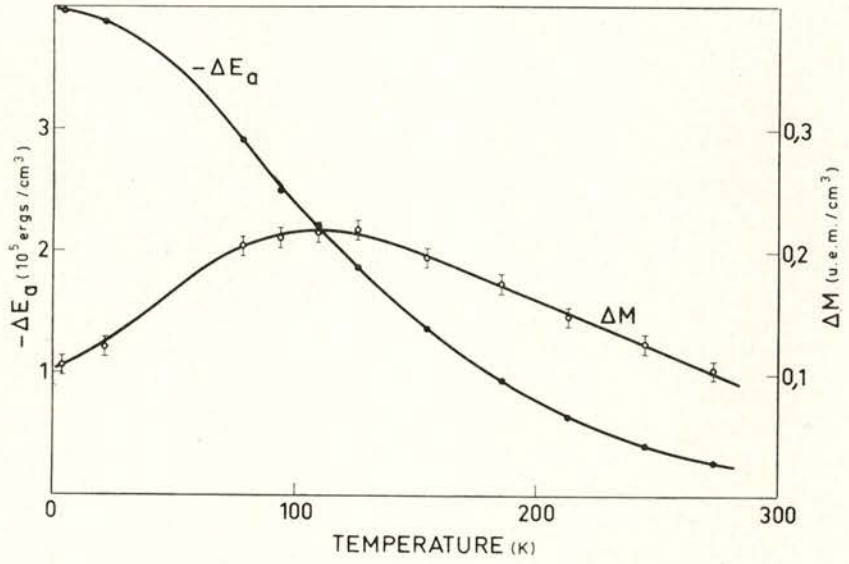


Fig. 47

Il est intéressant de constater que si le modèle de Callen et Callen prévoit un maximum dans la courbe de variation de ΔM avec la température, mais avec annulation à 0° K, le modèle d'Aubert donne le bon ordre de grandeur et justifie la loi de variation de ΔM jusqu'à 100° K; par contre, il ne prévoit pas de maximum sur cette courbe. Il paraît raisonnable d'admettre que seulement une partie de l'anisotropie de l'aimantation est d'origine orbitale, la partie restante provenant du système de spins.

Conte quatrieme: le reve de Candide.

Les récents propès effectués sur la structure des bandes des ferromagnétiques, ainsi que les possibilités de calcul offertes par les ordinateurs, permettront probablement une approche de plus en plus rigoureuse du problème de l'anisotropie des ferromagnétiques.

En plus, les résultats expérimentaux extrêmement précis obtenus surtout par les balances de torsion seront en mesure de faciliter la tâche des théoriciens.

«*Ce jour-là, Candide fit un beau rêve ...*».

CONCLUSION

Le montage expérimental réalisé et que nous venons de décrire était initialemente destiné aux mesures d'anisotropie de l'aimantation entre la température ambiante et 4,2° K. Les difficultés expérimentales rencontrées et en particulier celles qui sont liées aux propriétés intrinsèques du matériau — effet des courants de Foucalt, ordres de grandeur relatifs des harmoniques à analyser, etc... — nous ont empêché d'étendre notre étude de l'anisotropie de l'aimantation en-dessous de — 50° C. Au-dessus de cette température, et jusqu'à + 50° C, nous avons pu mesurer une contribution anisotrope à l'aimantation du nickel de l'ordre de 5.10^{-4} de la partie principale isotrope. Les valeurs ainsi déterminées sont en bon accord avec celles obtenues indirectement à partir des mesures de couples. Nous avons pu aussi montrer l'importance de l'état de surface de l'échantillon dans ce type d'expériences. Par ailleurs, notre appareillage permet de mesurer les constantes d'anisotropie magnétocristalline. La méthode que nous avons mise au point pour ce faire est extrêmement rapide. La précision obtenue n'est dépassée que par les deux balances de torsion actuellement existantes mais dont le maniement est beaucoup plus pénible et le prix de revient largement supérieur. Les mesures de couples resteront néanmoins la méthode la plus précise pour la détermination de l'anisotropie de l'énergie et de l'aimantation. Le magnétomètre à échantillon tournant, par sa commodité de maniement et la rapidité des mesures, semble être l'appareil le plus intéressant pour l'étude de l'anisotropie magnétocristalline quand on ne recherche pas de précisions extrêmes. Enfin, nous avons été amenés à réaliser un ensemble de traitement du signal par corrélation, de performances, à très basse fréquence, comparables sinon meilleures à celles des amplificateurs à détection de phase actuellement commercialisés.

APPENDICE I

Analyse de la detection synchrone [47]

Une détection synchrone peut se ramener à un inverseur double, commandé par le générateur pilote à la fréquence ν_s du signal à étudier. A l'entrée de l'inverseur double (figure 15-3), nous appliquons le signal $V_s = V_0 \sin(2\pi\nu_s \cdot t + \varphi)$. Le passage de la position 1 à la position 2, commandé par la référence à la fréquence ν_s, inverse le signal en sortie. Ceci revient à dire que l'inverseur effectue successivement les multiplications par $+1$ et -1 (figures 15-4 et 15-5). Le signal en sortie se caractérise par sa valeur moyenne:

$$V_{0s} = \frac{1}{\pi}\int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \sin\omega t\, dt = \frac{2}{\pi} V_0 \cos\varphi . \tag{I-1}$$

Ceci est valable pour un signal cohérent à la fréquence ν_s avec le générateur pilote.

Pour un signal non cohérent, à la fréquence ν_s, le terme $\cos\varphi$ fluctuera entre $+1$ et -1 et l'intégrale tend vers zéro lorsque le temps augmente:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \cos\varphi(t) \cdot dt = 0 . \tag{I-2}$$

On voit l'intérêt d'un amplificateur moyenneur à grande constante de temps.

Le signal carré peut être décomposé sous la forme:

$$u = \frac{4}{\pi}\left[\cos 2\pi\nu_s t - \frac{1}{3}\cos 2\pi 3\nu_s t + \frac{1}{5}\cos 2\pi 5\nu_s t \cdots\right] \tag{I-3}$$

ne contenant que les harmoniques impaires du signal.

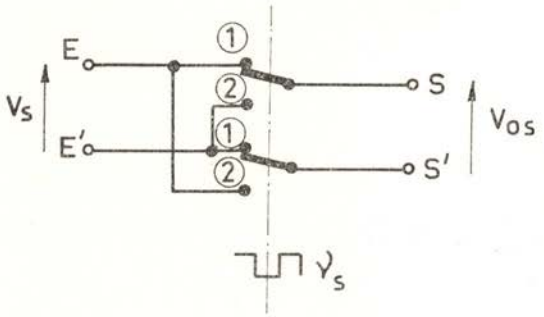


Fig. 15-3

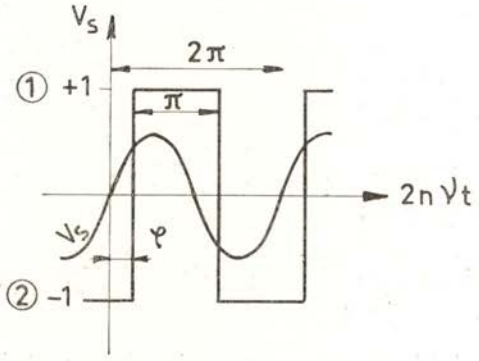


Fig. 15-4

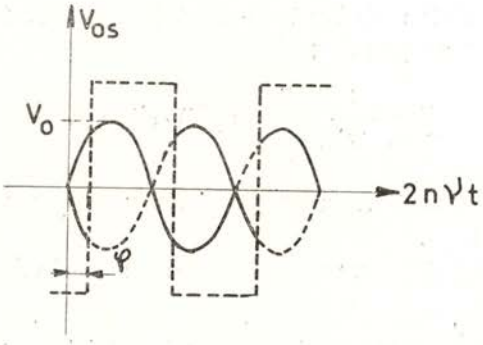


Fig. 15-5

(I-4) $$\nu = \nu_s,\ 3\nu_s,\ 5\nu_s,\ 7\nu_s \cdots, \qquad (2k-1)\nu_s \cdots$$

avec k entier.

La multiplication par le signal carré (figure 15-6) du signal d'entrée de fréquences ν_s fera intervenir des fréquences ν_r, telles que:

(I-5) $$\nu_r = \nu_s \pm (2k-1)\nu_s$$

ces fréquences étant celles qui composeront le signal de sortie.

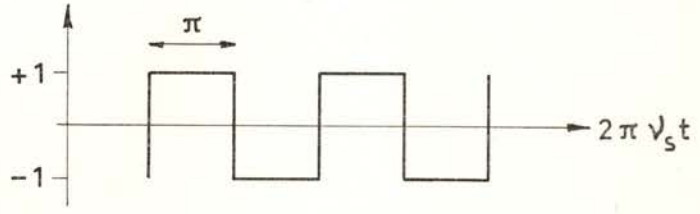


Fig. 15-6

Ce signal sera à valeur moyenne non nulle:

(I-6) $$\nu_r = \nu_s - (2k-1)\nu_s = 0$$

ce qui ne pourra être obtenu que pour des termes en $\nu_s - (2k-1)\nu_s$.

On peut voir que les fréquences se présentant à l'entrée de la détection donneront un signal de sortie à valeur moyenne non nulle chaque fois que:

(I-7) $$\nu_i - (2k-1)\nu_s = 0$$

$\nu_i = \nu_s,\ 3\nu_s,\ 5\nu_s \cdots$.

Les harmoniques impaires de ν_s seront transmises avec des affaiblissements de $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots$.

Les figures 15-7 et 15-8 montrent la composition d'une harmonique impaire et d'une harmonique paire respectivement.

La détection synchrone effectue une transposition autour de zéro des fréquences qui sont cohérentes avec ν_s et leurs harmoniques impaires (figure 15-9). La sortie contiendra des signaux à

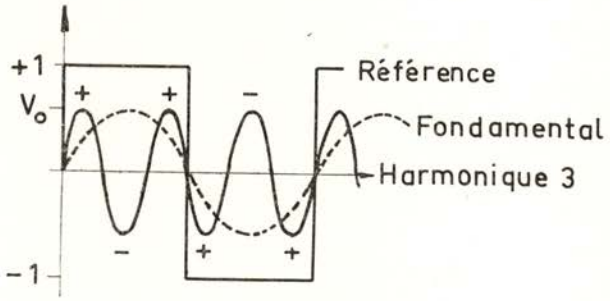


Fig. 15-7

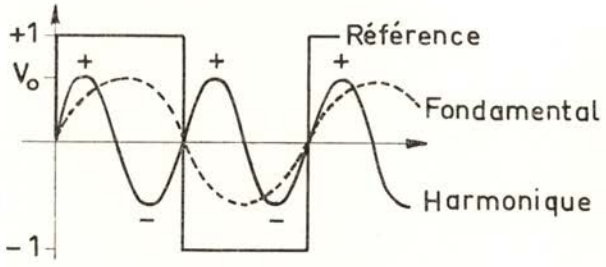


Fig. 15-8

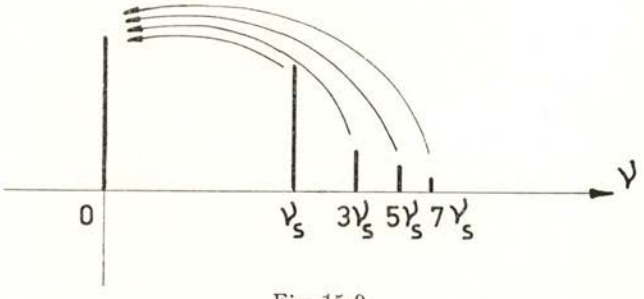


Fig. 15-9

valeur moyenne nulle, résultant d'un signal de battement avec des harmoniques impaires, de toutes les autres fréquences. On voit l'intérêt de placer en sortie un circuit moyenneur (RC parallèle). On aura alors que des signaux de valeur moyenne non nulle avec une bande passante d'autant plus étroite que la constante de temps est grande (figure 15-10).

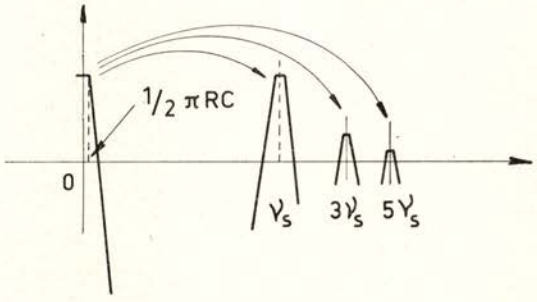


Fig. 15-10

Pour parfaire la réduction de bande, il suffit de ne transmettre à la détection synchrone que des fréquences voisines de ν_s. C'est le rôle de l'amplificateur sélectif qui précède la détection (figure 15-11).

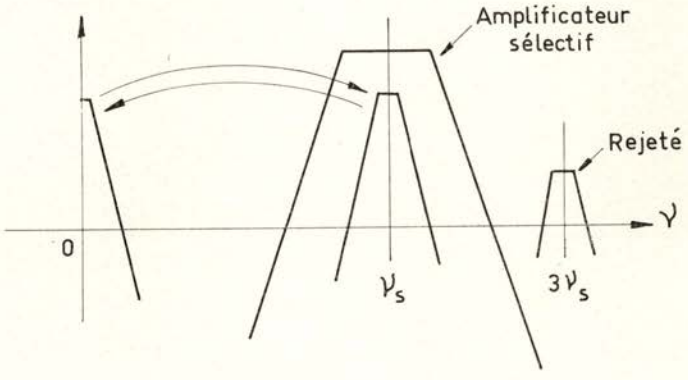


Fig. 15-11

Les amplificateurs à détection synchrone, appelés «amplificateurs-lock-in», utilisent comme fonction de multiplication, non pas la fonction carrée de référence mais une fonction sinusoïdale

obtenue à partir de celle-ci. Nous allons décrire rapidement les simplifications qui découlent de l'emploi de cette variante.

L'harmonique d'ordre n de la fonction à analyser sera représentée sous la forme $\cos(n\omega t + \varphi) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$ où ω est sa pulsation et n un nombre entier.

La fonction de référence sera $\cos(\Omega t)$ où Ω est sa pulsation.

L'opération effectuée par le lock-in est représentée mathématiquement par:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \cos(n\omega t)\cos\Omega t \cdot dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^\infty \cos[(n\omega + \Omega)t + \varphi]\,dt + \tag{I-8}$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \int_0^T \cos[(n\omega - \Omega)t + \varphi]\,dt.$$

Cette limite sera nulle sauf pour les valeurs de Ω telles que $\Omega = n\omega$.

Cette expression démontre la nécessité pour la fonction de référence d'avoir la même pulsation que l'harmonique à analyser.

Si on introduit le déphasage ψ, entre la fonction de référence et le signal, on obtient:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T A\cos(n\omega t + \varphi)\cos(n\omega t + \psi)\,dt. \tag{I-9}$$

Le signal de sortie sera proportionnel à:

$$S = A\cos(\varphi - \psi). \tag{I-10}$$

Le réglage sur ψ permet d'obtenir soit l'annulation de S soit l'amplitude A.

APPENDICE II

La correlation: autocorrelation, intercorrelation

On définit «la fonction de corrélation» de deux fonctions périodiques $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de même période fondamentale T_1 par:

$$\frac{1}{T_1}\int_{-T_{1/2}}^{T_{1/2}} f_1(t)\cdot f_2(t-\tau)\,dt. \tag{II-1}$$

On établit aisément en décomposant $f_1(t)$ et $f_2(t)$ en série de Fourier sous la forme

$$f_1(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} F_1(n)\,e^{jn\omega_1 t} \tag{II-2}$$

$$f_2(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} F_2(n)\,e^{jn\omega_1 t} \tag{II-3}$$

avec

$$F_1(n)=\frac{1}{T_1}\int_{-T_{1/2}}^{T_{1/2}} f_1(t)\,e^{-jn\omega_1 t}\,dt \tag{II-4}$$

et

$$F_2(n)=\frac{1}{T_1}\int_{-T_{1/2}}^{T_{1/2}} f_2(t)\,e^{-jn\omega_1 t}\,dt. \tag{II-5}$$

$F_1(n)$ et $F_2(n)$ étant les transformées de Fourier de $f_1(t)$ et $f_2(t)$

que la fonction de corrélation (II-1) a comme transformée de Fourier $F_1^*(n)\cdot F_2(n)$ ($*$ indiquant le complexe conjugué):

$$\frac{1}{T_1}\int_{-T_{1/2}}^{T_{1/2}} f_1(t)\,f_2(t-\tau)\,dt \rightleftarrows F_1^*(n)\,F_2(n) \tag{II-6}$$

l'expression exacte qui les lie étant:

$$\text{(II-7)} \qquad \frac{1}{T_1}\int_{-T_{1/2}}^{T_{1/2}} f_1(t)\cdot f_2(t+\tau)\,dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(n)\cdot F_2(n)\cdot e^{jn\omega_1\tau}.$$

Cette relation est connue sous le nom de théorème de corrélation des fonctions périodiques.

Du point de vue physique, il faut remarquer que la transformee de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est une représentation de cette fonction dans le domaine des fréquences.

Afin de monter que toutes les informations concernant les amplitudes et les phases sont contenues dans $F(n)$, il suffit de passer de

$$\text{(II-8)} \qquad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

à

$$\text{(II-9)} \qquad f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F(n)\, e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(n) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad \text{pour} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

ce qui peut s'écrire sous la forme:

$$\text{(II-10)} \qquad F(n) = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\, e^{j\cdot \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)}$$

afin de séparer les caractéristiques d'amplitude et de phase

$$\text{(II-11)} \qquad f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |F(n)|\, e^{j(n\omega_1 t + \Theta n)}$$

$F(n)$ étant en général une fonction complexe est appelée spectre complexe de $f(t)$.

Autocorrélation :

Dans le cas où $f_2(t) = f_1(t)$, II-1 devient:

$$\text{(II-12)} \qquad \frac{1}{T_1}\int_{-T_{1/2}}^{T_{1/2}} f_1(t) f_1(t-\tau)\, dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |F_1(n)|^2 e^{jn\omega_1\tau}$$

pour tout $-\infty < \tau < \infty$.

Le premier membre de (II-12) est appelé «fonction d'autocorrélation» de $f_1(t)$ et sera désigné par $\varphi_{11}(\tau)$

$$\text{(II-13)} \qquad \varphi_{11}(\tau) = \frac{1}{T_1}\int_{-T_{1/2}}^{T_{1/2}} f_1(t) f_1(t-\tau)\, dt.$$

A partir de l'expression

$$\text{(II-14)} \qquad \varphi_{11}(\tau) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)\cos n\omega_1\tau$$

on voit que:

a) la fonction d'autocorrélation d'une fonction périodique a la même période fondamentale que le signal périodique lui-même et contient toutes les fréquences de ce signal et celles-ci seulement;

b) la fonction d'autocorrélation conserve l'information fréquence, mais perd l'information phase, le spectre de phase étant identiquement nul.

Si on écrit $\varphi_{11}(\tau)$ sous la forme

$$\text{(II-15)} \qquad \varphi_{11}(\tau) = \sum_{0}^{\infty} c_n^2 \cos n\omega_1\tau$$

avec

$$c_0^2 = \frac{a_0^2}{4} \quad \text{et} \quad c_n^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

on conclut que la fonction d'autocorrélation s'exprime sous la forme d'une série de cosinus avec des phases initiales nulles pour

toutes les harmoniques représentées et dont les coefficients sont les valeurs quadratiques moyennes correspondantes de la fonction $f_1(t)$.

Intercorrélation :

Pour deux fonctions périodiques $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de même période fondamentale, on définit la «fonction d'intercorrélation» de $f_1(t)$ et $f_2(t)$ par

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_{1/2}}^{T_{1/2}} f_1(t) f_2(t-\tau)\, dt \,. \tag{II-16}$$

La transformée de Fourier de (II-16) sera notée

$$\Psi_{12}(n) = F_1^*(n) F_2(n) \,. \tag{II-17}$$

L'expression générale de la fonction d'intercorrélation, exprimée en fonction des coefficients du développement en série de Fourier des fonctions périodiques $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sera

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{a_{10}\, a_{20}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} c_{1n}\, c_{2n} \cos(n\omega_1 \tau + \theta_{2n} - \theta_{1n}) \tag{II-18}$$

où

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \theta_n = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

sous une forme plus simplifiée

$$\varphi_{12}(\tau) = \sum_{0}^{\infty} C_{1n} \cdot C_{2n} \cos(n\omega_1 \tau + \theta_{2n} - \theta_{1n}) \tag{II-19}$$

avec

$$C_{1n} = \frac{c_{1n}}{\sqrt{2}} \qquad C_{2n} = \frac{c_{2n}}{\sqrt{2}}$$

et

$$c_{10} = \frac{a_{10}}{\sqrt{2}} \qquad c_{20} = \frac{a_{20}}{\sqrt{2}} \,.$$

L'expression (II-19) nous permet de constater que:

a) les coefficients des harmoniques de la fonction d'intercorrélation sont le produit des valeurs correspondantes des fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$;

b) la fonction d'intercorrélation retient les différences de de phase entre les harmoniques présentes tandis que la fonction d'autocorrélation perd tout renseignement sur les phases.

C'est cette dernière particularité de la fonction d'intercorrélation qui a décidé notre choix, l'information phase étant en effet essentielle pour l'interprétation des résultats.

Nous allons illustrer ce qu'est le fonctionnement d'un intercorrélateur en prenant comme exemple le problème physique réel que nous avons eu à résoudre.

Soit une fonction périodique, que l'on peut exprimer sous la forme

$$(\text{II-20}) \qquad f_1(t) = \sum_n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad \text{où} \quad \theta = \omega t$$

ω étant la vitesse angulaire de rotation de notre système et $f_1(t)$ la fonction générée dans les bobines.

$f_2(t)$ est une fonction carré qui prenda la valeur $+1$, -1, et que l'on exprime sous la forme

$$(\text{II-21}) \qquad f_2(t) = (-1)^k$$

et où au cours d'une période de rotation T, k prend les valeurs $0, 1, \cdots, 2p-1$; ce qui peut s'exprimer autrement en disant qu'il y a inversion de $f_1(t)$ tous les $\frac{\pi}{p}$.

Au cours de la rotation, le corrélateur effectuera deux opérations: l'inversion périodique suivie d'intégration.

Examinons quel est le résultat de ces deux opérations, sur les termes en $\sin\theta$ et $\cos\theta$, ce qui revient à calculer les deux expressions suivantes:

$$(\text{II-22}) \qquad S_1 = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \int_{k\frac{\pi}{p}}^{(k+1)\frac{\pi}{p}} \cos n\theta \cdot d\theta$$

et

$$S_2 = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \int_{k\frac{\pi}{p}}^{(k+1)\frac{\pi}{p}} \sin n\theta \cdot d\theta \tag{II-23}$$

$$S_1 + i \cdot S_2 = \frac{i}{n}(1 - e^{in\frac{\pi}{p}}) \cdot \frac{1 - e^{in2\pi}}{1 + e^{in\frac{\pi}{p}}} \tag{II-24}$$

sera nulle pout toute n autre que

$$n = (2q + 1) \cdot p . \tag{II-25}$$

Pour ces valeurs de n, $S_1 = 0$ et $S_2 = \frac{4p}{n}$.

En conclusion, avec une inversion tous les $\frac{\pi}{p}$, suivie d'intégration sur un nombre entier de tours, les termes en $\cos n\theta$ s'annuleront ainsi que les termes en $\sin n\theta$, sauf ceux dont n vérifie l'équation (II-25).

Par exemple, pour $p = 4$:

La première harmonique présente sera l'harmonique 4 avec un coefficient $4a_4$.

La deuxième harmonique présente sera l'harmonique 12 avec un coefficient $\frac{4a_{12}}{3}$.

La troisième harmonique présente sera l'harmonique 20 avec un coefficient $\frac{4a_{20}}{5}$.

Ce que nous venons de dire s'exprime facilement à l'aide de la figure II-1 qui représente le découpage d'un certain nombre

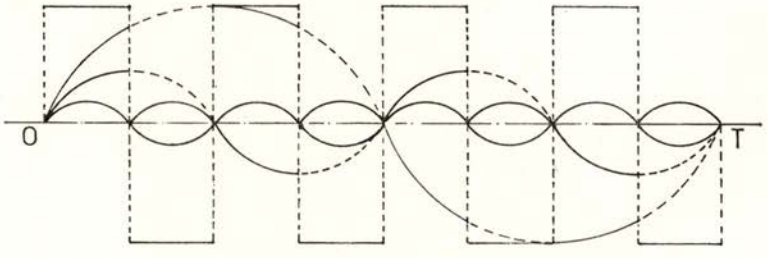


Fig. II-1

d'harmoniques par une fonction carrée de référence. La moyenne sur θ et 2θ s'annule tandis que 4θ ressortira. Le schéma permet de comprendre l'importance du réglage de l'origine des déclenchements par rapport au signal à mesurer, un léger déphasage pouvant introduire des termes supplémentaires non négligeables.

Les expressions II-22 jusqu'à II-25 supposent le cas où la fonction de référence est synchrone avec le signal, mais aussi avec une différence de phase nulle. Nous avons choisi ce cas particulièrement simple étant donné que c'est celui qui en pratique se présente lors de la mesure d'un terme parallèle. Au cours du Chapitre III, nous considérons le cas plus général, où il existe un déphasage β entre $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

APPENDICE III

Expression du module de l'aimantation et de sa composante dans la direction du champ, en fonction de l'angle φ.

Considérons l'expression de M sous la forme:

$$M = M_0 + a\cos 2\theta + b\cos 4\theta + c\cos 6\theta + d\cos 8\theta . \tag{III-1}$$

Comme $\theta = \varphi - \varepsilon$, le développement de M en fonction de φ se réduit au calcul des expressions du type $\sin n\varepsilon$ et $\cos n\varepsilon$ avec n entier.

L'expression du couple d'anisotropie

$$\Gamma = MH\sin\varepsilon = A\sin 2\varphi + B\sin 4\varphi + C\sin 6\varphi + D\sin 8\varphi \tag{III-2}$$

permet de calculer ces expressions.

En utilisant les notations suivantes:

$$M^* = A\sin 2\varphi + B\sin 4\varphi + C\sin 6\varphi + D\sin 8\varphi \tag{III-3}$$

et

$$A^* = (M^*)^2 = m + \alpha\cos 2\varphi + \beta\cos 4\varphi + \delta\cos 6\varphi + \rho\cos 8\varphi \tag{III-4}$$

où

$$m = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{2} \qquad \alpha = \frac{AB + BC + CD}{2}$$

$$\beta = \frac{AC + BD - A^2}{2} \qquad \delta = \frac{AD - AB}{2}$$

$$\rho = -\frac{B^2 + AC}{2} \qquad \text{et} \qquad k = HM$$

on obtient en négligeant les termes en k^{-3}:

$$\begin{aligned} &\sin 2\varepsilon = 2k^{-1}M^* \qquad &&\cos 2\varepsilon = 1 - \ 2k^{-2}A^* \\ &\sin 4\varepsilon = 4k^{-1}M^* \qquad &&\cos 4\varepsilon = 1 - \ 8k^{-2}A^* \\ &\sin 6\varepsilon = 6k^{-1}M^* \qquad &&\cos 6\varepsilon = 1 - 18k^{-2}A^* \\ &\sin 8\varepsilon = 8k^{-1}M^* \qquad &&\cos 8\varepsilon = 1 - 32k^{-2}A^* \end{aligned} \tag{III-5}$$

En substituant III-5 en III-1, et effectuant la recombinaison des harmoniques, on obtient pour M:

$$\begin{aligned} M = M_0 &+ k^{-1}(aA+2bB+3cC+4dD) - k^{-2}(a\alpha+4b\beta+9c\delta+16d\rho) \\ &+ \cos 2\varphi\,[a + k^{-1}(aB+2bA+2bC+3cB+3cD+4dC) - \\ &\qquad - k^{-2}(a\beta+2am+4b\alpha+4b\delta+9c\beta+9c\rho+16d\delta)] + \\ &+ \cos 4\varphi\,[b + k^{-1}(-aA+aC+2bD+3cA+4dB) - \\ &\qquad - k^{-2}(a\alpha+a\delta+8bm+4b\rho+9c\alpha+16d\beta)] + \\ &+ \cos 6\varphi\,[c + k^{-1}(-aB+aD-2bA+4dA) - \\ &\qquad - k^{-2}(a\beta+a\rho+4b\alpha+18cm+16d\alpha)] + \\ &+ \cos 8\varphi\,[d + k^{-1}(-aC-2bB-3cA) - \\ &\qquad - k^{-2}(a\delta+4b\beta+9c\alpha+32dm)] \end{aligned} \tag{III-6}$$

ou sous une forme simplifiée:

$$M = M_0' + M_2'\cos 2\varphi + M_4'\cos 4\varphi + M_6'\cos 6\varphi + M_8'\cos 8\varphi$$

d'où

$$M^{II} = M\cos\varepsilon$$

$$M^{II} = M_0 + k^{-1}(aA+2bB+3cC+4dD) - k^{-2}\left[a\alpha+4b\beta+9c\delta+16d\rho + \frac{m}{2}(M_0+a+b+c+d)\right] +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \cos 2\varphi \Big\{ a + k^{-1}(aB + 2bA + 2bC + 3cB + 3cD + 4dC) - \\
&\quad - k^{-2}\Big[a\beta + 2am + 4b\alpha + 4b\vartheta + 9c\beta + 9c\varrho + 16d\vartheta + \\
&\quad + \frac{1}{2}\alpha (M_0 + a + b + c + d)\Big]\Big\} + \\
&+ \cos 4\varphi \Big\{ b + k^{-1}(-aA + aC + 2bD + 3cA + 4dB) - \\
&\quad - k^{-2}\Big[a\alpha + a\vartheta + 8bm + 4b\varrho + 9c\alpha + 16d\beta + \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta (M_0 + a + b + c + d)\Big]\Big\} + \\
&+ \cos 6\varphi \Big\{ c + k^{-1}(-aB + aD - 2bA + 4dA) - \\
&\quad - k^{-2}\Big[a\beta + a\varrho + 4b\alpha + 18cm + 16d\alpha + \\
&\quad + \frac{1}{2}\vartheta (M_0 + a + b + c + d)\Big]\Big\} + \\
&+ \cos 8\varphi \Big\{ d + k^{-1}(-aC - 2bB - 3cA) - \\
&\quad - k^{-2}\Big[a\vartheta + 4b\beta + 9c\alpha + 32dm + \\
&\quad + \frac{1}{2}\varrho (M_0 + a + b + c + d)\Big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{III-7}
$$

REFERENCES

[1] E. R. CALLEN et H. B. CALLEN
J. Phys. Chem. Solids, **16**, 310 (1960).

[2] G. G. AUBERT
Thèse, Grenoble (1966).

[3] KRAUSE et PATZ
Z. Angew. Phys., **21**, 342 (1966)

[4] KRAUSE, LUDWIG et PATZ
Z. Angew. Phys., **26**, 1, 76 (1969)

[5] G. G. AUBERT
J. Appl. Phys., **39**, 504 (1968).

[6] J. P. REBOUILLAT
Communication privée

[7] G. G. AUBERT et P. ESCUDIER
Journ. de Physique, Colloque C1, **32**, 543 (1971).

[8] G. T. RADO et H. SUHL
Magnetism (1963), Vol. 1 (Academic Press).

[9] D. S. RODBELL
Physics **1**, 279 (1965).

[10] INFANTES
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Grenoble (1969).

[11] FRAIT
Journ. de Physique, Colloque C1, **32** (1971).

[12] GENGNAGEL et HOFMANN
Phys. Stat. Sol., **29**, 91 (1968).

[13] COLE et HONEYCUTT
J. Appl. Phys., **30**, 2 505 (1959).

[14] R. COLLETE
Rev. Sci. Instr., **33**, 450 (1962).

[15] J. BONNEFOUS
Compt. Rend. Acad. Sci., **255**, 1 706 (1962)

[16] P. J. FLANDERS
J. Appl. Phys., **38**, 1 293 (1967)

[17] Y. W. LEE
Statistical Theory of Communication (1967) (John Wiley).

[18] B. HAGEDORN
Rev. of Sci. Instr., **38**, n.º 5, 591 (1967).

[19] P. J. FLANDERS
J. Appl. Phys. (U. S. A.), **39**, nº 2, 1 345 (1968).

[20] GESSINGER, KRONMÜLLER, BUNDSCHUH
Journal of Physics E, **3**, 468 (1970).

[21] H. GESSINGER
Phys. Stat. Sol., **38**, 277 (1970).

[22] G. G. AUBERT et L. FRAZAO
Phys. Letters, **31 A**, nº 2, 54 (1970).

[23] W. F. BROWN
Phys. Rev., **58**, 736 (1940).

[24] A. SEEGER et KRONMÜLLER
J. Phys. Chem. Sol., **12**, 258 (1960) et **18**, 2/3, 93 (1961).

[25] H. GESSINGER
Phys. Stat. Solidi, **39**, 581 (1970).

[26] H. KRONMÜLLER
Zeit. für Phys., **154**, 574 (1959).

[27] H. TRAÜBLE et A. SEEGER
Z. Angew. Phys., **21**, 4, 299 (1966).

[28] BHATTACHARYYA, POLLACK et MADDIN
J. of Appl. Phys., **37**, 12 (1966)

[29] N. AKULOV
Z. Phys., **100**, 197 (1936).

[30] J. H. VAN VLECK
Phys. Rev., **52**, 1 178 (1937).

[31] BLOCH et GENTILLE
Z. Physik, **70**, 395 (1931).

[32] C. ZENER
Phys. Rev., **96**, 5, 1 335 (1954).

[33] T. KASUYA
J. Phys. Soc. Japan, **11**, 944 (1956).

[34] CHARAP et WEISS
Phys. Rev., **116**, 6, 1 372 (1959).

[35] J. H. VAN VLECK
J. Phys. Radium, Paris, **20**, 124 (1959).

[36] J. C. SLATER
Phys. Rev., **49**, 537, 931 (1936).

[37] E. C. STONER
Proc. Roy. Soc. (London), **A 165**, 372 (1938).

[38] E. P. WOHLFARTH
Rev. Mod. Phys., **25**, 211 (1953).

[39] E. HERRING
Magnetism, Vol. IV, edited by Rado and Shull (Academic Press).

[40] J. H. VAN VLECK
Rev. Mod. Physics, **25**, 220 (1953).

[41] E. FAWCET et N. A. REED
Phys. Rev. Letters, **9**, 336 (1962).
Phys. Rev., **131**, 2 463 (1963).

[42] H. BROOKS
Phys. Rev., **58**, 909 (1940).

[43] G. C. FLETCHER
Proc. Phys. Sci., (London) **A 65**, 192 (1952), **A67**, 505 (1954), **A78**, 145 (1961).

[44] FUREY
Thesis, Harvard University (1967).

[45] HODGES, EHRENREICH et LANG
Phys. Rev., **152**, 505 (1966).

[46] FRANSE
Thesis, Amsterdam (1969).

[47] J. MAX
Rapport C. E. A., R-4018 (1970).

REMERCIEMENTS

Le travail faisant l'objet de cet exposé a été effectué au Laboratoire d'Electrostatique et de Physique du Métal, à Grenoble, laboratoire dirigé par Monsieur le Professeur Néel, Membre de l'Institut, Prix Nobel.

A Monsieur le Professeur Néel qui a bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et qui me fait l'honneur de présider le Jury, je tiens à exprimer ma profonde et respectueuse gratitude.

C'est à Monsieur le Professeur Aubert que je dois la possibilité d'avoir réalisé ce travail. Il a guidé mes débuts dans la recherche et pendant cinq ans, il a dirigé avec le plus grand intérêt et beaucoup de patience mon activité. Je lui en suis profondément reconnaissant.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Winter, Adjoint au Chef de Service de Physique du Solide et de Résonance Magnétique, au C. E. A. Saclay, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et me fait l'honneur de faire partie du Jury.

Monsieur le Professeur Everett, avec qui j'ai eu de très intéressantes discussions, me fait aussi l'honneur de participer au Jury. Qu'il soit assuré de ma sincère reconnaissance.

A tous les membres de l'équipe Anisotropie, et tout particulièrement à Messieurs Escudier et Nowicki dont l'aide m'a été précieuse pour la réalisation de ce travail, vont mes remerciements les plus sincères.

Je remercie également Messieurs Perrier de la Bathie et Bouvier pour leur collaboration technique et pour la bonne volonté dont ils ont toujours fait preuve à mon égard.

Les nombreuses difficultés expérimentales ont pu être résolues grâce à la compétence des Services Techniques Centraux et à l'aide toute particulière de Messieurs Trévisson et Faurin.

Ma gratitude va aussi à tous les Services du Laboratoire qui ont mis du matériel à ma disposition et tout particulièrement à l'équipe Dilatométrie, qui en a été la principale «victime».

Je remercie vivement Mademoiselle Chabre pour la frappe du manuscrit.

A tous mes camarades et amis du Laboratoire vont mes sincères remerciements.

LISTE DES PUBLICATIONS REÇUES ACTUELLEMENT EN ENCHANGE AVEC PORTUGALIAE PHYSICA

ALEMANHA — *Physikertagung (Physikalisch-Technische Bundesanstalt)*
— *Physikertagung-Plenarvortrage (Physikatisch-Technische Bundesanstalt)*
— *Physikertagung-Voradbrucke der Fachberichte (Physikalisch--Technische Bundesanstal)*
— *Sitzungberichte der Sachsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*
— *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*

ARGENTINA — *Anales de la Sociedad Cientifica Argentina*
— *Mathematicae Notae (Boletin del Instituto de Matematica «Beppo Levi»)*
— *Revista de la Union Matematica Argentina*

AUSTRÁLIA — *Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales*

BÉLGICA — *Annuaire de l'Académie Royale de Belgique*
— *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Bélgique*
— *Mededelingen uit het Natuurkundig Laboratorium der Universiteit te Gent*
— *Recueil de Travaux de Laboratoire de Physique de l'Université de Louvain*
— *Scientific Report (Centre d'Etude de l'Energie Nucleaire)*

BRASIL — *Boletim do Gabinete Português de Leitura de Porto Alegre*
— *Noticia (Centro Latino Americano de Física)*

BULGÁRIA — *Annuaire de l'Université de Sofia*

CANADÁ — *Canadian Journal of Physics*

E. U. A. — *Bulletin of the Scripps Institution of Oceanography (University of California*
— *Bulletin of the Seismographic (University of California)*
— *Journal of the Franklin Institute*
— *Report of the publications and Theses (Mass. Institute of Technology)*
— *Research in Materials (Mass. Institute of Technology)*
— *Solid-State and Molecular Theory Group (Mass. Institute of Techuology)*
— *The General Radio Experimenter*

EQUADOR — *Anales de la Universidad Central del Ecuador*

ESPANHA — *Revista de Geofísica (Instituto Nacional de Geofísica)*

FINLANDIA — *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*
— *Commentationes Physico-Mathematicae (Societas Scientiarum Fennica)*

FRANÇA — *Annales de Physique*
— *Bulletin de la Société Scientifique de Bretagne*
— *Cours de l'École Polytechnique*

HOLANDA — *Communications from the Kamerlingh Onnes Laboratory of the University of Leiden*

HUNGRIA — *Atomki Közlemények (Inst. of Nuclear Research of the Hung. Acad. of Sciences)*

ÍNDIA — *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*

INGLATERRA — *Asta (The Assoc. of Short Circuit Testing Authorities-Inc)*
— *Comments on Solid State Physics*
— *Contributions from the Cambridge Observatories*
— *Educations in Science* (*Ass. for Science Education*)
— *Electrical Review*
— *Electrical Times*
— *Journal of Science & Technology*
— *Notes on Applied Science* (*National Physical Laboratory*)
— *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*
— *Report* (*National Physical Laboratory*)
— *Revue de la Société English Electric*
— *Thin Films*
— *The School Science Review* (*Ass. for Science Education*)

IRLANDA — *Procedings of the Royal Irish Academy*
— *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society*

ITÁLIA — *Annali dell'Istituto Superiore di Sanità*
— *Congressi, Convegni e Simposi Scientifici* (*Consiglio Nazionale delle Richerche*)
— *La Ricerca Scientifica* (*Consiglio Nazionalle delle Richerche*)
— *La Scienza del Pensare* (*UTEP*)
— *Quaderni de «La Ricerca Scientifica»*
— *Raporti dei Laboratori di Fisica dell'Istituto Superiore di Sanità*
— *Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università de Cagliari*

JUGOSLÁVIA — *Fizika* (*Editorial Office*)
— *Glasnik Matenaticko-Fizicki i Astronomski*
— *Publikacije Elektrotehnickog Fakulteta Univerziteta u Beogradu*
— *Radovi Zavoda za Fiziku*
— *Reports* — (*Nuklearni Institut Jozef Stefan*)

NORUEGA — *Arkiv for det Fysiske Seminar i Trondheim* (*Institutt for Teoretisk Fysikk*)

POLÓNIA — *Acta Physica Polonica*
— *Prace Komisji Nauk Techniczych* (*Académie Polonaise des Sciences*)

PORTUGAL	— *Agronomia Lusitana*
	— *Arquivo do Instituto Gulbenkian de Ciência*
	— *Cursos e Seminários do Instituto Gulbenkian de Ciência*
	— *Estudos de Programação e Análise Numérica do Instituto Gulbenkian de Ciência*
	— *Gazeta de Fisica*
	— *Gazeta de Matemática*
	— *Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra*
	— *Revista Portuguesa de Química*
ROMÉNIA	— *Buletinul (Institutului Politehnic din Iasi)*
RÚSSIA	— *Referativnyi Zhurnal Fizika (Institut de l'Information Scientifique de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.)*
SUÉCIA	— *Arkiv för Fysik*
SUIÇA	— *Information Bulletin (International Union of Pure and Applied Chemistry)*
TURQUIA	— *Bulletin of the Turkish Physical Society*
	— *Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara*
	Fen Fakültesi Mecmuasi (İstanbul Üniversitesi)

PORTUGALIAE PHYSICA

Instructions pour les auteurs

PORTUGALIAE PHYSICA est la seule publication périodique portugaise consacrée exclusivement à la divulgation des recherches dans le domaine des Sciences Physiques. Les travaux pourront être présentés sous forme d'articles ou de brèves communications. Des articles de mise au point seront encore publiés, par invitation. Les travaux à publier devront être rédigés soit en Français, soit en Anglais, et avoir un résumé dans les deux langues. Ils seront dactylographiés à deux espacements sur une seule face du papier, l'original étant envoyé à la rédaction accompagné d'une copie.

Les figures et les tableaux devront être présentés sur des feuilles séparées Les dessins devront être soigneusement faits à l'encre de Chine et avoir au moins le double des dimensions définitives. Les photographies seront faites sur du papier blanc brillant.

Les références bibliographiques seront indiquées dans le texte par un numéro entre parenthèses, en exposant, et groupées à la fin de l'article par l'ordre de citation. Les références à des articles dans des publications périodiques devront préciser les noms des auteurs, le titre abrégé de la revue selon le code international d'abréviation de titres de périodiques, le numéro du volume, le numéro de la première page de l'article en référence et l'année de publication. En ce qui concerne les livres, il faut indiquer les auteurs, le titre de l'ouvrage, le lieu d'impression, l'éditeur, l'année de l'édition et la page.

Les auteurs devront vérifier soigneusement le texte et les figures de leurs travaux car la rédaction ne peut pas accepter des altérations ou additions au texte original.

L'auteur d'un article ou communication recevra gratuitement 50 tirages à part. Ce nombre est réduit à 25 par auteur lorsque le même article aura l'intervention de plusieurs auteurs.

Toute correspondance doit être addressée à

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
Lisboa-2 (PORTUGAL)

PORTUGALIAE PHYSICA

Instructions to the authors

PORTUGALIAE PHYSICA is the only Portuguese review exclusively dedicated to the publication of research papers concerning the Physical Sciences. The papers may be presented under the form of articles or research notes. Review articles will also be published, by invitation.

The papers to be published may be written in French or in English with abstracts in both languages. They should be typed with two spaces, on one side of the page only, and the original and one copy must be submitted.

The figures and tables must be presented in separate sheets. Drawings should be carefully done in Indian ink and be at least double the definitive size. Fhotographs must be executed in white, glossy paper.

Bibliographical references should be indicated in the text by a number between brackets, in exponent, and grouped at the end of the article in the order they are mentioned. References to articles published in periodical publications should include the names of the authors, the abbreviated title of the publication according to the international code of abbreviation of the titles of periodicals, the issue number, the number of the first page of the article mentioned, and the year of publication. As for books, the authors, title of the work, place of the edition, editor, year of the edition, and page should be indicated.

The authors should carefully check their text and figures before submitting them, as the editor cannot accept any changes or additions to the original text.

The author of an article or research note is entitled to 50 free reprints. This number is reduced to 25 per author whenever more than one author intervene in a paper.

All mail to be addressed to

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
Lisboa-2 (PORTUGAL)

Toute la correspondance concernant la rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Prix de l'abonnement:	250 escudos (US $8.50) par volume
Prix des volumes déjà parus:	300 escudos (US $10)
Prix du fascicule:	75 escudos (US $2.50)

Les membres de la «Sociedade Portuguesa de Química e Física» ont une réduction de 50 % sur les prix indiqués.

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Scientifiques et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu detaillé de tous les ouvrages soumis à la rédaction en deux exemplaires.

All mail concerning PORTUGALIAE PHYSICA to be addressed to:

PORTUGALIAE PHYSICA
Laboratório de Física da Faculdade de Ciências
LISBOA-2 (Portugal)

Subscription rates:	250 escudos (US $8.50) per volume
Price of past volumes:	300 escudos (US $10)
Price of copy:	75 escudos (US $2.50)

Members of the «Sociedade Portuguesa de Química e Física» may obtain *Portugaliae Physica* at a reduced price (50 %).

Universities, Physics Laboratories, Academies, Scientific Societies and Physics Publications are invited to receive this review in exchange for their publications.

PORTUGALIAE PHYSICA will give a detailed report of any book if two copies have been submitted

Composto e impresso na Tip. Matemática, Lda. — R. Diário de Notícias, 134-1.º-Esq. — Lisboa