

ÉTUDE SEMI-CLASSIQUE DE LA DIFFUSION ÉLASTIQUE D'IONS LOURDS (*)

R. DA SILVEIRA

Institut de Physique Nucléaire, Division de Physique Théorique (**)
91406, Orsay, France

RESUMÉ — Nous analysons de façon semi-classique la diffusion élastique d'ions lourds. Nous montrons que la section efficace différentielle peut être décrite en termes de diffusion «arc en ciel». Nous donnons aussi un moyen direct d'extraire des résultats expérimentaux une valeur approchée du moment angulaire de forte absorption.

ABSTRACT — We give a semi classical analysis of heavy ion elastic scattering. We show that the whole behaviour of differential cross section is well described in terms of rainbow scattering. A direct way to extract from experimental results an approximate value for the angular momentum of strong absorption is also given.

(*) Reçu le 12 Avril 1973.

(**) Laboratoire associé au C. N. R. S.

1. INTRODUCTION

L'utilisation de l'approximation semi-classique en théorie des collisions nucléaires connaît actuellement un regain d'intérêt lié au développement de la physique expérimentale des ions lourds. L'intérêt d'un tel type d'approche est double; d'une part il permet de s'affranchir des difficultés numériques posées par les situations où les noyaux en collision sont très lourds, d'autre part il permet une compréhension physique des différents aspects du phénomène, extrêmement claire et instructive. Les applications de la théorie semi-classique à la diffusion élastique, dans le domaine nucléaire, datent de 1959 (Ford et Wheeler) [1]. La situation très importante où la fonction de déflexion classique possède des points stationnaires y est examinée de façon analogue à celle utilisée en optique pour traiter le cas où la diffusion de la lumière par des gouttelettes d'eau, donne origine au phénomène de l'arc en ciel: c'est l'approximation de Airy [2]. Mais l'approximation de Airy n'est valable qu'au voisinage de l'angle pour lequel la fonction de déflexion est stationnaire, de sorte que, son application est restée très limitée [1,3].

Enfin, le développement des programmes de calcul numérique permettant l'évaluation des déphasages lorsqu'on se donne le potentiel, a fortement contribué à un certain désintérêt pour l'approximation semi classique, en diffusion élastique.

Avec le développement de la physique expérimentale des ions lourds, les situations où les conditions semi classiques sont largement satisfaites, sont devenues extrêmement courantes.

Il faut aussi remarquer que pour des collisions entre noyaux très lourds, le calcul numérique conventionnel pose actuellement des problèmes non encore résolus.

Mais, si pendant longtemps l'approximation semi-classique de la diffusion élastique fût absente en physique nucléaire, elle a par contre connue d'importants développements dans le cadre des collisions atomiques.

Des exemples typiques de la diffusion «arc en ciel» (rainbow scattering) sont depuis quelques années bien connus en physique atomique où la mise au point de faisceaux atomiques et moléculaires a connu d'importants progrès. Les développements théo-

riques qui ont accompagné le progrès expérimental ont conduit à réexaminer certains aspects de l'approximation semi classique.

Le cas où la fonction de déflexion passe par un point stationnaire a été reformulé en s'affranchissant des conditions conduisant à l'approximation de Airy. Cette reformulation, due à Berry [4], et qui complète le traitement de Ford et Wheeler, sera reprise ici dans le contexte des collisions nucléaires. Nous verrons qu'elle permet une analyse à la fois quantitative et qualitative, très simple, de la diffusion d'ions lourds [5].

Nous commencerons par passer en revue brièvement — partie 2 — les aspects essentiels de l'approximation classique elle même. Les effets d'interférence ainsi que la diffusion « arc en ciel » et la diffusion en spiralle, seront discutés dans la partie 3. Dans la partie 4 nous comparerons entre elles les collisions atomiques et nucléaires qui satisfont les conditions semi-classiques.

Le traitement quantitatif [5] de la diffusion élastique d'ions lourds, ainsi que la comparaison avec l'expérience, sera donné dans la partie 5. Dans la partie 6 nous exploiterons qualitativement la théorie semi classique et nous donnerons un moyen simple d'extraire des résultats expérimentaux une valeur approchée du moment angulaire d'absorption [5]. Enfin, perspectives et conclusions seront resumées dans la partie 7.

2. L'APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE

Nous rappellerons ici brièvement quelques résultats de la théorie semi-classique qui nous seront utiles par la suite. Pour plus de détails le lecteur est renvoyé aux références 1, 6 et 7.

Considérons la diffusion d'une particule de masse réduite m et nombre d'ondes réduit k , par un potentiel central $V(r)$. La section efficace différentielle de diffusion $\sigma(\theta)$ s'écrit

$$(2.1) \quad \sigma(\theta) = |f(\theta)|^2$$

où l'amplitude de diffusion $f(\theta)$ peut s'exprimer par le développement habituel

$$(2.2) \quad f(\theta) = \frac{1}{2ki} \sum_{l=0}^{l=\infty} (2l+1)(e^{2i\eta_l} - 1) P_l(\cos \theta)$$

où η_l est le déphasage de l'onde partielle d'indice l .

Maintenant, ce qui est convenu d'appeler approximation semi-classique, est l'expression $f_{s.c.}(\theta)$ que l'on obtient lorsqu'on introduit dans le calcul de $f(\theta)$ donné par (2.1), un certain nombre d'approximations. Ces approximations, au nombre de quatre, sont:

1. Les déphasages η_l sont remplacés par leurs expressions en approximation B. K. W.:

$$\eta_l \rightarrow \eta_l^{\text{BKW}}.$$

Les déphasages η_l^{BKW} satisfont une relation importante qui nous sera utile par la suite: on a

$$(2.3) \quad 2 \frac{d \eta_l^{\text{BKW}}}{d l} = \Theta(l),$$

$$(2.4) \quad \Theta(l) = \pi - 2 \int_{r_{mi}}^{\infty} \frac{\frac{(l+1/2)\hbar}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \left[\frac{(l+1/2)\hbar}{r} \right]^2}}$$

$\Theta(l)$ est la fonction de déflexion classique. r_{mi} est la distance minimum d'approche pour la trajectoire de moment angulaire $L = (l + 1/2)\hbar$.

Il est important de signaler que les quatre approximations conduisant à $f_{s.c.}(\theta)$, seule la présente contient, à strictement parler, l'approximation classique elle-même, qui se traduit par la condition d'une lente variation du potentiel $V(r)$ dans un domaine grand comparé à la longueur d'onde du mouvement relatif. Nous pouvons donc dès maintenant introduire dans (2.2) les déphasages B. K. W. et obtenir l'amplitude de diffusion en évaluant numériquement la somme sur l .

Nous allons toutefois introduire trois approximations supplémentaires qui s'avèreront très avantageuses. D'une part elles permettront de voir de façon très claire comment le résultat semi-classique modifie le résultat purement classique, d'autre part, elles conduisent à des expressions facilement maniables, ne nécessitant pas de calculs numériques très lourds.

2. Les polynômes de Legendre sont remplacés par leurs expressions asymptotiques.

Pour $l \gg 1$, $\sin \theta \gtrsim 1/l$, on a

$$(2.5) \quad P_l(\cos \theta) \sim \left[\frac{1}{2} (l+1/2) \pi \sin \theta \right]^{-1/2} \sin [(l+1/2)\theta + \pi/4]$$

on remarquera que $l \gg 1$ est cohérent avec la limite classique de la mécanique quantique.

3. Si un grand nombre d'ondes partielles intervient dans (2.2) [$l \gg 1$] on peut remplacer la somme \sum_l par une intégrale:

$$\sum_l \rightarrow \int dl.$$

Compte tenu de 1., 2. et 3. on obtient pour $f(\theta)$, $\theta \neq 0$:

$$(2.6) \quad f(\theta) \sim - \frac{(2\pi \sin \theta)^{1/2}}{k} \int_0^\infty (l+1/2)^{1/2} [e^{i\Phi_+} - e^{i\Phi_-}] dl$$

où les phases Φ_\pm sont données par

$$(2.7) \quad \Phi_\pm = 2\eta_l \pm (l+1/2)\Phi \pm \pi/4.$$

4. L'intégrale (2.6) est évaluée de façon approchée en utilisant la méthode des phases stationnaires.

La valeur de l qui rend maximum l'une ou l'autre des phases Φ_\pm étant $l = l_\theta$, on obtient [$l_\theta \gg 1$, $l_\theta + 1/2 \sim l_\theta$]

$$(2.8) \quad f(\theta) \sim f_{s.c.}(\theta) = \sqrt{\sigma_{cl}(\theta)} e^{i\beta}$$

où

$$(2.9) \quad \sigma_{cl}(\theta) = \frac{1}{k^2 \sin \theta} \left| \frac{d\Theta/dl}{d\Theta/dl} \right|$$

est la section efficace différentielle classique et β est donné par

$$(2.10) \quad \beta = 2\eta_l - 2l\eta'_l - (2 - \eta''/|\eta''| - \eta'/|\eta'|) \frac{\pi}{4}$$

où il est sous-entendu que la valeur de l' , comme dans (2.9), est la valeur $l = l_0$. Celle-ci est reliée à l'angle de diffusion θ par la relation classique

$$(2.11) \quad \Theta(l) = \pm \theta, \quad l = l_0$$

dans cette expression, θ étant l'angle de diffusion, par convention positif; le signe dans (2.11) doit être choisi en conséquence.

3. EFFETS D'INTERFÉRENCE, DIFFUSION «ARC EN CIEL» ET DIFFUSION EN SPIRALE.

3.1 Effets d'interférence

L'expression (2.8) n'est valable que si la relation entre θ et l est biunivoque, auquel cas on a, compte tenu de (2.1) et (2.8),

$$\sigma_{s.c.}(\theta) = |f_{s.c.}(\theta)|^2 = \sigma_{cl}(\theta).$$

C'est en particulier le cas du potentiel de Coulomb, $V(r) = -Z_1 Z_2 e^2/r$, pour lequel la fonction de déflexion s'écrit

$$(3.1) \quad \Theta_R(l) = \pi - 2 \operatorname{arc} \cotg \frac{\eta}{l}$$

où η est le paramètre de Sommerfeld $\eta = Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v$. Dans la plupart des cas d'intérêt pratique il se trouve que le potentiel diffuseur est tel que deux ou plus de trajectoires de moment angulaire différent, sont déviées suivant le même angle. Du point de vue classique, si

$$(\sigma_{cl})_1, \dots, (\sigma_{cl})_j,$$

sont les sections efficaces qui correspondent aux trajectoires de moment angulaire (en unités \hbar), $l_1(\theta), \dots, l_j(\theta)$; on a, pour la section efficace totale en θ :

$$(3.2) \quad \sigma_{cl}(\theta) = (\sigma_{cl})_1 + \dots + (\sigma_{cl})_j.$$

Par contre le résultat semi-classique s'écrit lui

$$(3.3) \quad \sigma_{s.c.}(\theta) = |f_1(\theta) + \dots + f_j(\theta)|^2,$$

$$f_i(\theta) = \sqrt{(\sigma_{cl})_i} e^{i\beta_i}$$

les β_i étant définies par (2.10). Si $\Theta(l)$ n'a que deux branches, figure 1, on a le résultat très simple

$$(3.4) \quad \sigma_{s.c.}(\theta) = \frac{(\sigma_{cl})_1 + (\sigma_{cl})_2}{\sigma_{cl}(\theta)} + 2\sqrt{(\sigma_{cl})_1(\sigma_{cl})_2} \sin \delta$$

avec, compte tenu de (2.3) (2.10) et (3.3),

$$(3.5) \quad \delta = \int_{l_1(\theta)}^{l_2(\theta)} |\Theta(l) - \theta| dl.$$

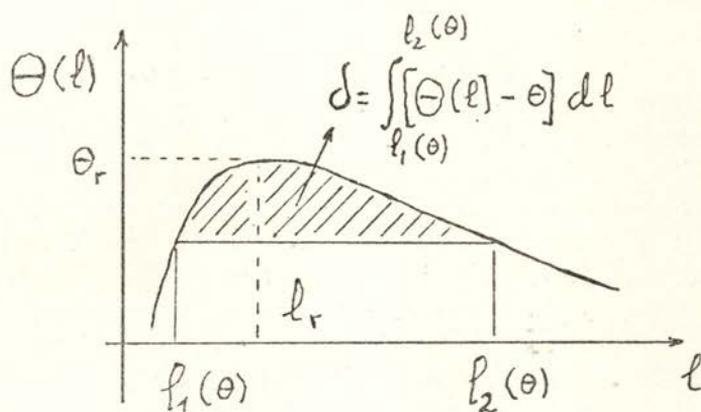


Fig. 1 — Fonction de déflexion $\Theta(l)$. Les trajectoires de moment angulaire $l_1(\theta)$ et $l_2(\theta)$ sont diffusées suivant le même angle θ .

Les deux premiers termes dans (3.4) constituent le résultat classique pur. Le troisième terme est le terme d'interférence, quantique. L'examen de (3.4) montre que le résultat classique est modulé par une figure d'interférence. La «longueur d'onde» des oscillations de cette figure d'interférence (separation angulaire entre deux maxima) est donnée par

$$(3.6) \quad \Delta \theta \sim \frac{2\pi}{|\bar{l}_1 - \bar{l}_2|}$$

où \bar{l}_1 et \bar{l}_2 sont les valeurs moyennes de $l_1(\theta)$ et $l_2(\theta)$ en θ et $\theta + \Delta \theta$. Pour que la figure d'interférence soit perceptible lors

d'une expérience de diffusion, il faut que les deux moments angulaires conduisant au même angle de diffusion ne soient différents d'un très grand nombre d'unités; autrement, le système de comptage va donner comme résultat une moyenne sur une certaine plage d'angle et la section efficace mesurée sera la section efficace classique. Celle ci correspondant, par conséquent, au résultat à faible résolution.

3.2. La diffusion «arc en ciel»

L'examen des expressions (3.2) et (3.4) montre que lorsque $\Theta(l)$ passe par un point stationnaire, $\Theta'(l)=0$, les sections efficaces classique et semi-classique deviennent infinies. La figure 1 montre un cas où $\Theta'(l)$ passe par un maximum à $l=l_r$. L'angle de diffusion correspondant est $\theta = \theta_r$.

Une situation analogue se rencontre en optique lorsqu'on étudie la diffusion de la lumière par des gouttelettes d'eau [7]. Si l'on repère le «rayon» incident sur la gouttelette par la donnée de l'angle d'incidence γ , l'intensité de la lumière, lorsque calculée à la limite de l'optique géométrique, est infinie dans la direction $\theta = \theta_r$ pour laquelle $d\theta/d\gamma = 0$.

La situation en théorie des collisions est tout à fait analogue sauf que le potentiel $V(r)$ varie de façon continue, tandis que l'indice de réfraction du milieu dans lequel se propage la lumière, varie brusquement sur la surface de la gouttelette. C'est cette analogie qui a suggéré à Ford et Wheeler [1] de donner le nom diffusion «arc en ciel» (rainbow scattering) à la même situation lorsqu'on la rencontre dans un problème de collisions.

L'expression (3.4) n'est valable que dans la région où les deux branches de $\Theta(l)$, émergeant de $\theta = \theta_r$, sont nettement séparées.

Berry [4] (voir cette référence pour plus de détails) a reformulé le problème de l'évaluation de l'intégrale (2.6) en vue d'obtenir un résultat valable au voisinage de $\theta = \theta_r$ et qui se comporte comme (3.4) dans la région $\theta \ll \theta_r$.

Dans la région $\theta < \theta_r$, la région «éclairée» (the lit region) le résultat est

$$(3.7) \quad \sigma_{s.c.}(\theta) = \pi \left\{ [(\sigma_{cl})_1 + (\sigma_{cl})_2 + 2\sqrt{(\sigma_{cl})_1(\sigma_{cl})_2}] Z_L^{1/2} A^2 i(-Z_L) + \right. \\ \left. + [(\sigma_{cl})_1 + (\sigma_{cl})_2 - 2\sqrt{(\sigma_{cl})_1(\sigma_{cl})_2}] A'^2 i(-Z_L) \right\}, \quad \theta < \theta_r.$$

Dans la région $\theta > \theta_r$, la région «d'ombre» (the shadow region), $l_1(\theta)$ et $l_2(\theta)$ ainsi que $\Theta'(l_1)$ et $\Theta'(l_2)$ sont complexes conjugués. En posant

$$l_{1,2}(\theta) = |l(\theta)| e^{\pm i\alpha(\theta)}$$

$$\Theta'(l_{1,2}) = |\Theta'(\theta)| e^{\pm i\beta(\theta)}$$

on a,

$$(3.8) \quad \sigma_{s.c.}(\theta) = \frac{2\pi |l(\theta)|}{k^2 \sin \theta |\Theta'|} \{ [1 - \sin(\alpha(\theta) - \beta(\theta))] Z_S^{1/2} A^2 i(Z_S) + [1 + \sin(\alpha(\theta) - \beta(\theta))] Z_S^{-1/2} A'^2 i(Z_S) \}, \quad \theta > \theta_r.$$

Dans (3.7) et (3.8) on a

$$(3.9) \quad \theta < \theta_r, \quad Z_L = \left(\frac{3}{4} \delta \right)^{2/5}$$

$$\theta > \theta_r, \quad Z_S = \left| \frac{3}{4} \text{Im } \delta \right|^{2/5}$$

δ étant défini par (3.5).

Ai et $A'i$ sont respectivement la fonction de Airy et sa dérivée. La fonction de Airy est définie par l'intégrale

$$(3.10) \quad Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu + \frac{1}{3}iu^3} du.$$

Du comportement de la fonction de Airy [8] pour des arguments négatifs ($\theta < \theta_r$) et positifs ($\theta > \theta_r$) on peut conclure de l'allure de $\sigma_{s.c.}(\theta)$. Celle-ci a un comportement oscillant pour $\theta < \theta_r$ et décroît (allure exponentielle) pour $\theta > \theta_r$.

Des expressions (3.7) et (3.8) on peut extraire deux résultats importants.

i. Le comportement pour $\theta \ll \theta_r$.

Dans ce cas, on a $Z_L \gg 1$ et l'on peut remplacer $Ai(x)$ et $A'i(x)$ par leurs expressions asymptotiques [8]. Il est alors facile de voir que (3.7) se réduit exactement à (3.4).

ii. Le comportement pour $\theta \rightarrow \theta_r$.

Au voisinage de $\theta = \theta_r$, on peut développer $\theta(l)$ en puissances de $l - l_r$. En gardant le terme quadratique, on a

$$(3.11) \quad \theta(l) = \theta_r - q(l - l_r)^2.$$

Dans ce cas le deuxième terme dans (3.7) et (3.8) est négligeable devant le premier qui se réduit lui, à

$$(3.12) \quad \sigma_{s.c.}(\theta) \sim \frac{2\pi l_r}{k^2 \sin \theta q^{2/5}} A^2 i(x), \quad \theta \sim \theta_r$$

$$x = \frac{\theta - \theta_r}{q^{1/5}}$$

C'est l'approximation de Airy de l'optique, utilisée pour la première fois par Ford et Wheeler en théorie semi-classique des collisions.

3.3. Diffusion en spirale

La diffusion en spirale (spiral scattering) se produit lorsque le potentiel effectif

$$(3.13) \quad V_{\text{eff}}(r, l) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)$$

possède, pour une valeur donnée de $l(l_1)$, un maximum relatif; c'est-à-dire lorsqu'on a (figure 2)

$$(3.14) \quad \left(\frac{dV_{\text{eff}}(l_1, r)}{dr} \right)_{r=r_1} = 0.$$

Dans ce cas l'énergie E est exactement égale à la hauteur de la «barrière» effective:

$$(3.15) \quad E = V_{\text{eff}}(r_1, l_1).$$

Enfin pour $l = l_1$, l'expression (2.4) montre que $\Theta(l)$ présente une singularité.

En termes de diffusion potentielle, à cette situation, correspond, pour le projectile, un mouvement en spirale autour du centre diffuseur. Ce mouvement en spirale se poursuit jusqu'à

ce que le projectile atteint une orbite circulaire. Des exemples de ce type de diffusion se rencontrent dans les collisions atomiques. Dans le contexte des collisions entre ions lourds, le moment angulaire l_1 correspondant au franchissement de la

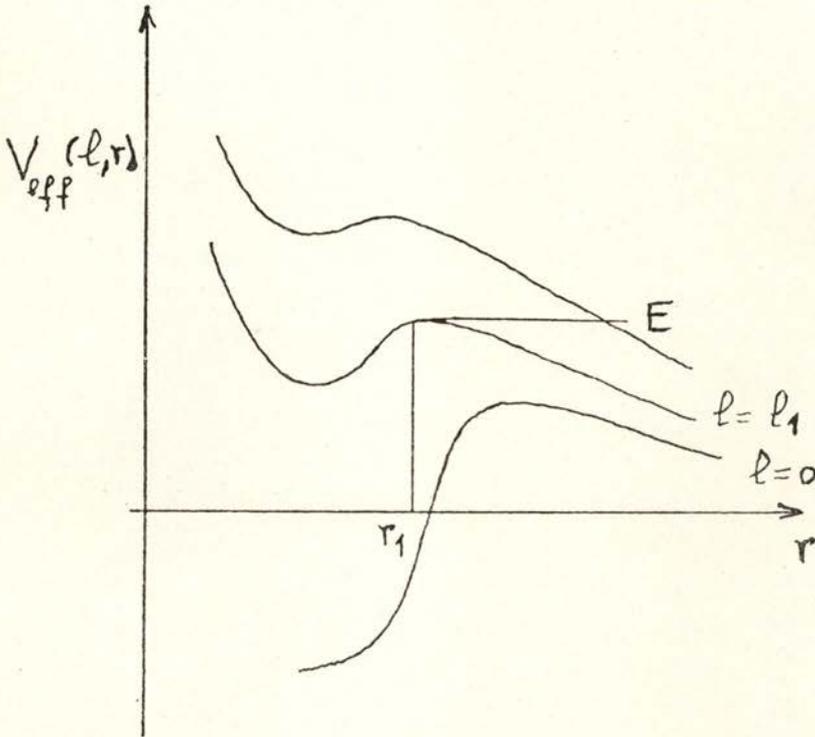


Fig. 2 — Le potentiel $V_{\text{eff}}(l, r)$ pour différentes valeurs de l . Pour $l = l_1$ on a $V_{\text{eff}}(l_1, r_1) = E$.

barrière effective doit, par conséquent, être rapproché du moment angulaire dit de forte absorption. Nous reviendrons au paragraphe 5.2 sur cette question.

4. ANALOGIES DANS LES COLLISIONS ATOMIQUES ET NUCLÉAIRES

Il est instructif de comparer les résultats des sections efficaces différentielles que l'on obtient pour les collisions atomiques et nucléaires lorsqu'on satisfait les conditions semi-classiques.

Dans les figures 3 et 4 on peut voir des résultats expérimentaux obtenus respectivement pour les collisions des atomes de K et Hg et pour la collision des noyaux de A et Se. Dans les deux cas on peut constater un comportement analogue de la section efficace différentielle aux grands angles; une allure oscillante, suivie d'une décroissance très rapide, telle qu'elle est prévue par les expressions (3. 7) et (3. 8).

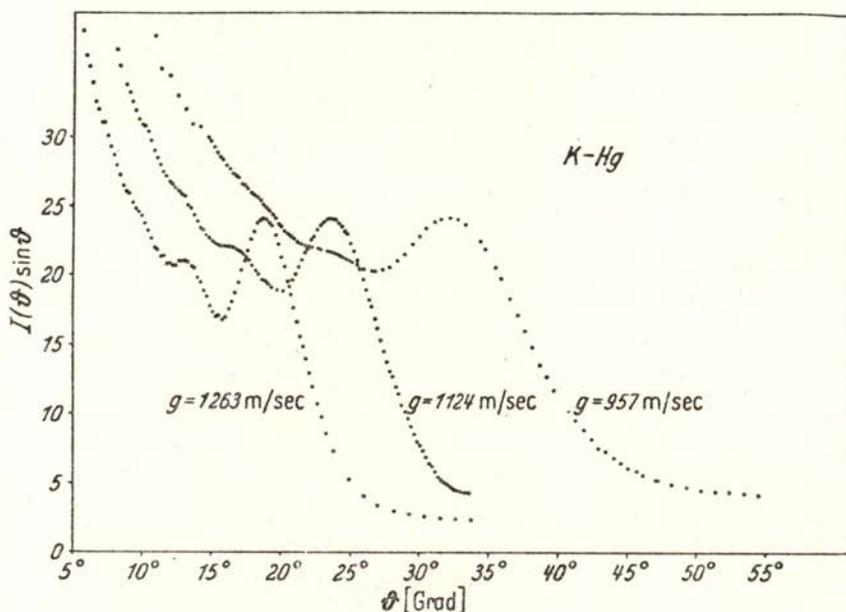


Fig. 3 — Résultats expérimentaux de diffusion élastique des atomes de K et Hg, pour trois énergies incidentes. La section efficace différentielle est multipliée par $\sin \theta$. Référence (9).

L'interprétation des résultats en physique atomique peut se faire à l'aide d'un potentiel du type Lenard Jones dont l'allure est dessinée dans la figure 5, où l'on a aussi fait figurer un potentiel (Wood Saxon + Coulomb) adapté lui, à la description des collisions noyau — noyau.

La différence essentielle dans le comportement de ces deux potentiels tient à ce que le deuxième présente une variation très rapide pour $R \sim R_1 + R_2$ (c'est à dire au voisinage du contact des noyaux) où R_1 et R_2 sont les rayons de deux noyaux en collision. Ceci se traduit, dans la fonction de déflexion des collisions

noyau — noyau, par une variation elle aussi très rapide pour des valeurs $l \gtrsim l_r$. Le moment angulaire l_r correspond par conséquent dans le cas nucléaire à une trajectoire tangentielle (grazing collision). Les figures 6 et 7 montrent des exemples de fonctions

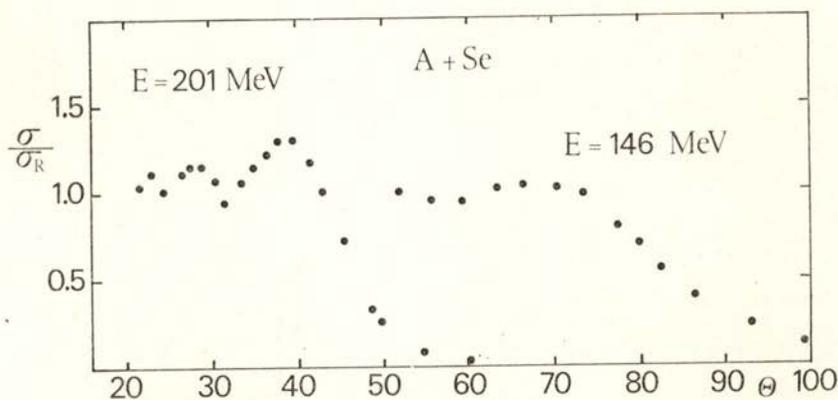


Fig. 4 — Résultats expérimentaux de diffusion élastique des noyaux de Ar et Se, pour deux énergies incidentes. La section efficace différentielle est divisée par σ_R . Référence (10).

de déflexion que l'on obtient avec, respectivement, un potentiel de Lenard Jones et un Wood Saxon + Coulomb.

Elles traduisent l'une et l'autre l'allure du potentiel; au voisinage de $l = l_r$ la première est quasi symétrique, l'autre, très fortement assymétrique. C'est pour cette raison que la formule

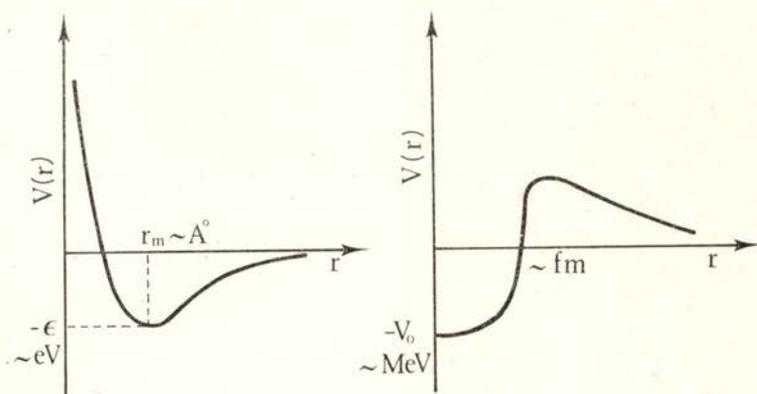


Fig. 5 — Allure des potentiels de Lennard—Jones (à gauche) et Wood Saxon + Coulomb (à droite).

de Airy, et lorsqu'on s'éloigne de $\theta = \theta_r$, donne de moins bons résultats en physique nucléaire. En effet l'expression (3.12) est obtenue avec le seul terme quadratique dans le développement de $\Theta(l)$ (3.11) et ce terme donne pour $\Theta(l)$ une forme symétrique de part et d'autre de $l = l_r$.

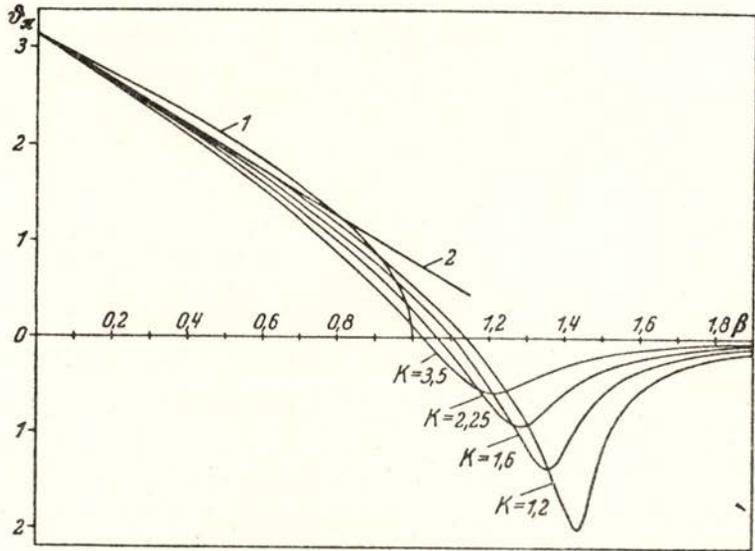


Fig. 6 — La fonction de déflexion $\Theta(l)$ pour un potentiel Lennard — Jones et pour différentes énergies. Référence (9).

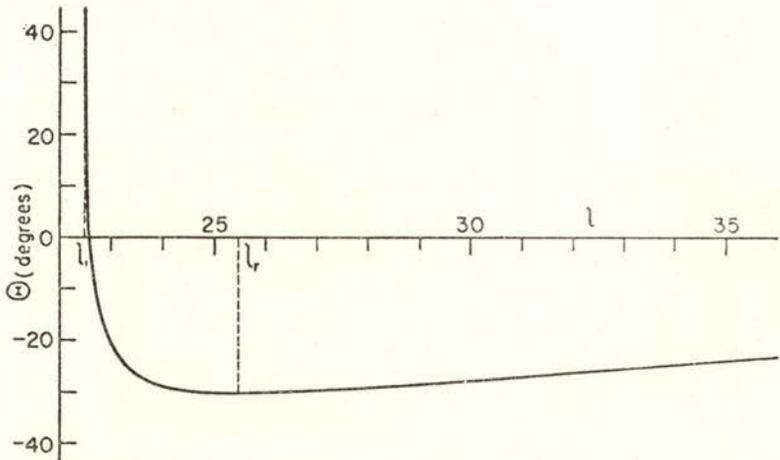


Fig. 7 — La fonction de déflexion $\Theta(l)$ pour un potentiel Wood Saxon + Coulomb dans le cas $\alpha + \text{Pb}$, $E = 48,2$ Mev. Référence (1).

L'examen de la fonction de déflexion à différentes énergies permet une interprétation qualitative simple des résultats expérimentaux. On constate, figure 6, que la «courbure» q de $\Theta(E, l)$ à $l=l_r$, est d'autant plus petite que l'énergie est grande.

Lorsque sur deux courbes à énergie différente on s'éloigne vers un angle θ distant de θ_r de la même quantité, la différence $|l_1(\theta) - l_2(\theta)|$ est d'autant plus grande que q est petit et E est grand. L'expression (3.6) montre alors que les oscillations de la figure d'interférence sont d'autant plus serrées que l'énergie augmente, ce qui est bien le comportement des résultats expérimentaux.

5. LA DIFFUSION ÉLASTIQUE D'IONS LOURDS

5.1. Usage d'une fonction de déflexion paramétrisée

Lorsque l'énergie incidente est au dessus de la barrière de Coulomb, on se trouve dans la situation où la fonction de déflexion a le comportement de celle de la figure 7. C'est de ce cas que nous allons nous occuper ici. Pour tester les expressions (3.7) et (3.8) de $\sigma_{s.c.}(\theta)$ lorsqu'on traite une situation expérimentale particulière, il faut se donner la fonction de déflexion $\Theta(E, l)$. Celle-ci s'obtient lorsqu'on se donne le potentiel $V(r)$ par l'expression (2.4). Mais, dans le but d'obtenir des expressions facilement maniables, plutôt que paramétriser $V(r)$ et en déduire $\Theta(l)$, nous allons nous donner directement celle-ci par une expression paramétrisée.

Nous utiliserons à cet effet l'expression proposée par Ford et Wheeler [1] qui s'écrit

$$(5.1) \quad \Theta(l) = \theta_r - \rho \ln^2 \left(\frac{l - l_1}{l_r - l_1} \right)$$

$$(5.2) \quad \rho = q(l_r - l_1)^2, \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \Theta}{dl^2} \right)_{l=l_r}$$

Dans (5.1), θ_r est l'angle «arc en ciel», l_1 est le moment angulaire qui satisfait l'équation (3.14) et q est comme en (3.11) la

«courbure» de $\Theta(l)$ à $l = l_r$ que l'on peut [1] arbitrairement relier à une largeur Δl de surface par

$$(5.3) \quad q = \frac{\theta_r}{(\Delta l)^2}.$$

Le moment angulaire l_r correspond à la trajectoire qui est déviée suivant l'angle θ_r et, comme celle-ci correspond approximativement à une collision tangentielle, on a, entre θ_r et l_r , la relation bien connue.

$$(5.4) \quad l_r = \eta \cotg \frac{\theta_r}{2}$$

de sorte que (5.1) a trois paramètres libres qui doivent être fixés par comparaison avec l'expérience. Pour $l > l_r$ les trajectoires deviennent des hyperboles caractéristiques du mouvement dans un champ de Coulomb pur. Toutefois l'expression (5.2) donne pour $l > l_r$ une décroissance trop rapide par rapport à la fonction de déflexion dans le champ de Coulomb, équation (3.1). Nous corrigerons partiellement ce défaut comme on le verra en 5.3.

5.2 Introduction de l'absorption dans le traitement semi-classique

La fonction de déflexion est déterminée par la donnée d'un potentiel $V(r)$ réel. Pour introduire dans la description semi-classique l'effet de l'ensemble des voies autres que l'élastique, il faut des hypothèses supplémentaires. Nous avons vu, en 3., que les trajectoires franchissant la barrière effective, $V_{\text{eff}}(l_1, r_1)$ (3.13), étaient celles de moment angulaire $l \leq l_1$ où l_1 satisfait (3.14). Si l'on suppose que l'effet d'absorption est total pour ces trajectoires (celles dont $l > l_1$ étant réfléchies) on doit alors couper la contribution de la fonction de déflexion pour les valeurs $l \leq l_1^{(5)}$. Dans ces conditions l'absorption est déterminée essentiellement par le potentiel réel. Dans le langage du potentiel optique ceci revient à dire que la seule caractéristique demandée à la partie imaginaire est d'être totalement absorbante.

Si ce n'est que sa portée est inférieure à r_1 , figure 2, sa forme particulière ne joue pas de rôle déterminant. Enfin le moment

angulaire de forte absorption (75%) obtenu dans les calculs conventionnels de potentiel optique, est à comparer à la valeur l_1 .

5.3 *Comparaison avec l'expérience. Diffusion élastique A + Se et N + Ag*

Les expériences de diffusion élastique A + Se, $E = 201$ Mev, [10] et N + Ag, $E = 113$ Mev [11], sont deux exemples où les conditions semi-classiques sont bien satisfaites; on a respectivement $\eta = 42.9$ et $\eta = 18.2$.

Compte tenu de (2.9) et (5.1), on a, pour les sections efficaces associées aux branches 1 et 2 de $\Theta(l)$, figures 8 et 9,

$$(5.5) \quad (\sigma_{ei})_{1,2} = (\sigma_{ei})_{-,+} = \\ = \frac{l_r - l_1}{2\zeta k^2 \sin \theta} \sqrt{\frac{\rho}{\theta_r - \theta}} e^{\pm \sqrt{\frac{\rho}{l_r - \theta}}} \left\{ l_1 + (l_r - l_1) e^{\pm \sqrt{\frac{\theta_r - \theta}{\rho}}} \right\}$$

pour $l \gg l_r$ le potentiel d'interaction des deux noyaux devient purement Coulombien et l'on peut écrire

$$(5.6) \quad (\sigma_{ei})_2 = \sigma_R = \frac{\eta^2}{4 k^2 \sin^4 \theta/2}, \quad l \gg l_r$$

(5.6) est la section efficace de Rutherford. Compte tenu de (5.1) (3.5) et (3.9) on a explicitement

$$(5.7) \quad Z_L = \left\{ \frac{3}{4} [(\Delta_2 - \Delta_1) - (l_2(\theta) - l_1(\theta)) \theta] \right\}^{2/3}$$

où

$$(5.8) \quad \Delta_{1,2} = -\frac{1}{2} \rho u_{1,2} \left\{ \ln^2 \frac{u_{1,2}}{u_r} - 2 \ln \frac{u_{1,2}}{u_r} + 2 \right\} + \frac{1}{2} \theta_r u_{1,2}$$

avec $u_{1,2} = l_{1,2}(\theta) - l_1$ et $u_r = l_r - l_1$.

Dans la zone d'ombre, $\theta > \theta_r$ les résultats expérimentaux s'étendent sur une plage d'angle relativement restreinte de sorte que l'on peut utiliser pour Z_S (3.9) l'expression approchée

$$(5.9) \quad Z_S \sim \frac{\theta - \theta_r}{q^{1/3}}, \quad \theta \sim \theta_r.$$

Les figures 8 et 9 montrent le résultat du calcul [5] comparé aux données expérimentales.

On y voit aussi le comportement de la section efficace classique au voisinage de $\theta = \theta_r$.

Sur la partie supérieure de ces figures on peut voir la fonction $\Theta(l)$ dont les paramètres sont donnés dans la tableau I.

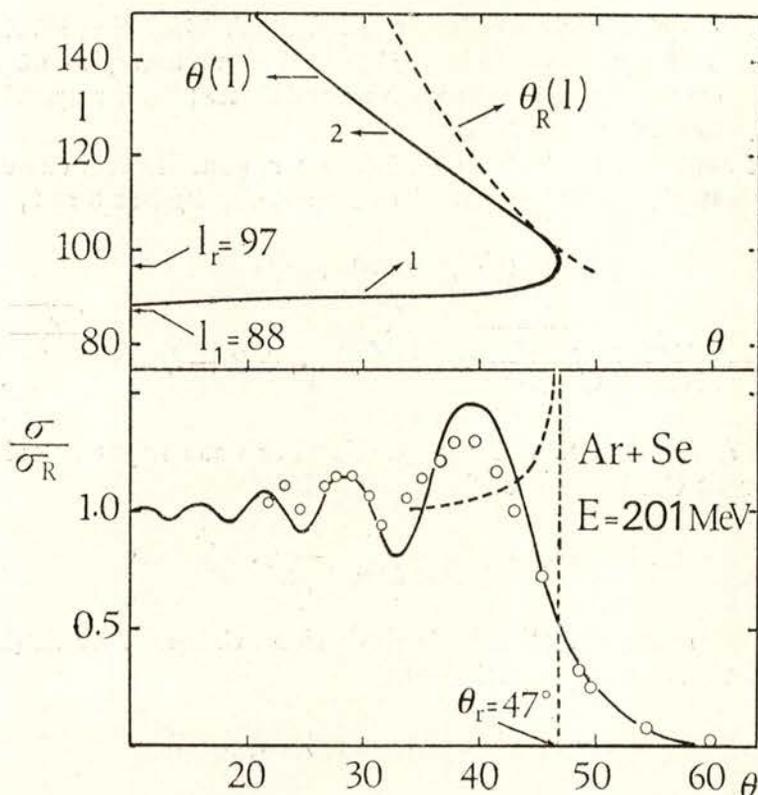


Fig. 8 — Diffusion élastique Ar + Se, $E = 201$ Mev. Comparaison des résultats, semi-classique (trait plein) et classique (trait discontinu) avec les données expérimentales [10]. La partie supérieure de la figure montre la fonction $\Theta(l)$ paramétrisée ainsi que $\Theta_R(l)$ [5].

La courbe en traits tirés, $\Theta_R(l)$, est la fonction de déflexion de Coulomb, donnée par (3.1).

L'accord est, dans l'ensemble, assez satisfaisant, mais on remarque que la figure d'interférence donnée par le calcul, oscille plus lentement que le résultat expérimental, dans la région

$\theta \ll \theta_r$. Ceci tient à la circonstance que l'on avait déjà signalé; la branche 2 de $\Theta(l)$ décroît plus rapidement que la fonction $\Theta_R(l)$. Or c'est l'expression (5.7) où l'on n'a pas fait de correction (celle-ci n'a été faite qu'en (5.6)) qui détermine la «longueur d'onde» des oscillations de la figure d'interférence. L'obtention

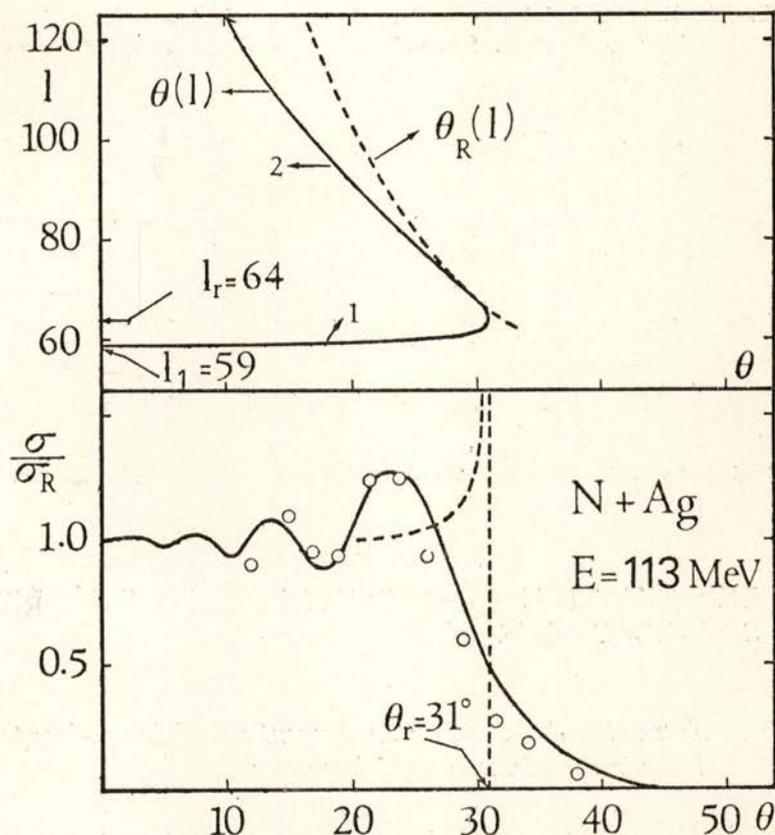


Fig. 9 — Diffusion élastique N + Ag, E = 113 Mev. Comparaison des résultats semi-classiques (trait plein) et classique (trait discontinu) avec les données expérimentales (11). La partie supérieure de la figure montre la fonction $\theta(l)$ paramétrisée ainsi que $\theta_R(l)$ [5].

d'un meilleur accord avec l'expérience passe, bien entendu, par le calcul de $\Theta(l)$ (2.4) en se donnant $V(r)$. Cette voie permet, par conséquent, de paramétriser l'interaction moyenne (réelle) entre les deux noyaux; c'est la démarche habituelle des analyses en potentiel optique. Dans celles-ci on calcule les déphasages

η_l , alors qu'ici on calcule la fonction de déflexion $\Theta(l)$. Les deux démarches sont équivalentes puisque l'on a entre η_l et $\Theta(l)$ la relation (2.3).

TABLEAU I

Energie E (dans le lab.) paramètre de Sommerfeld η et les trois paramètres ajustables θ_r, l_1 et q . Les valeurs de l_r et Δl sont obtenues de (5.4) et (5.3). La valeur de r_0 est déduite de

$$r_0 = d_{\min}/(A_1^{1/5} + A_2^{1/5}), \quad d_{\min} = \frac{\eta}{k} \left(1 + \sin^{-1} \frac{\theta_r}{2} \right)$$

	E (Mev)	η	θ_r	l_1	q	l_r	r_0 (fm)	$\Delta l/l_r$
A r + S e	201	42.9	47°	88 (89) (*)	1.510^{-5}	97	1.48	0.24
N + A g	113	18.2	31°	59	2.010^{-5}	64	1.56	0.25

(*) Moment angulaire d'absorption extrait d'une analyse en déphasages, référence 10.

6. EXPLOITATION QUALITATIVE DE LA THÉORIE SEMI-CLASSIQUE

6.1 *Extraction de la valeur du moment angulaire d'absorption à partir des résultats expérimentaux.*

Un raisonnement qualitatif [5] permet d'extraire directement des résultats expérimentaux une valeur approchée de l_1 , c'est à dire, du moment angulaire d'absorption (au sens défini en 5.2). Pour ce faire, on considère la région de la figure d'interférence dans la région $\theta \ll \theta_r$. Dans cette région la section efficace semi-classique est donnée par l'expression (3.4). D'autre part on a vu dans 3.1 que la distance angulaire $\Delta\theta$ entre deux maxima successifs était donnée par

$$\Delta\theta \sim \frac{2\pi}{|\bar{l}_1 - \bar{l}_2|}$$

Mais, pour $\theta \ll \theta_r$, la branche 1 de $\Theta(l)$ (figures 8 et 9) est quasiment perpendiculaire à l'axe l , en raison de la variation très rapide du potentiel nucléaire à la surface. Dans ces conditions, on a

$$(6.1) \quad \bar{l}_1 \sim l_1, \quad \theta \ll \theta_r.$$

D'autre part, pour $\theta \ll \theta_r$, le moment angulaire \bar{l}_2 correspond à la branche de $\Theta(l)$ qui est alors purement Coulombienne. Dans ces conditions on a

$$\bar{l}_2 = \bar{l}_R, \quad l_R = r \cotg \theta/2$$

de sorte que l'on a pour l_1

$$(6.2) \quad l_1 \sim \bar{l}_R - \frac{2\pi}{\Delta\theta}.$$

Si l'on prend dans les résultats expérimentaux les deux maxima qui suivent la première grande oscillation, on obtient pour $A+Se$, $\Delta\theta \sim 28^\circ - 24^\circ = 4^\circ$ et de (6.2) on déduit $l_1 \sim 96$, valeur qui est à comparer à celle obtenue par le calcul complet (voir tableau I). Un autre exemple où les deux oscillations en question sont relativement bien définies est donné par le résultat $C+Ta$, $E=124$ Mev [12], figure 10]. Dans ce cas on obtient $l_1 \sim 62$ alors que la valeur extraite d'une analyse en déphasages, donne 63,5 [voir la référence 12].

6.2. Le modèle à «bord franc»

On peut aisément obtenir une expression très simple de la section efficace semi-classique dans la région $\theta \ll \theta_r$ lorsqu'on considère la limite où le puit de potentiel nucléaire est à «bord franc». Le potentiel $V(r)$ s'écrit alors schématiquement

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \quad r \gtrsim R = R_1 + R_2$$

$$V(r) \sim -V_0, \quad r \gtrsim R.$$

Dans ces conditions les deux branches de $\Theta(l)$ immergeant de θ_r sont, l'une (la branche nucléaire) approximativement indé-

pendante de θ et l'autre, une branche de Coulomb pure. Par la même, on a aussi $l_1 \sim l_r$ ce qui signifie que le moment angulaire d'absorption se confond avec le moment angulaire correspondant à la trajectoire tangentielle comme il est caractéristique des modèles où l'on néglige le caractère diffus du potentiel à la surface.

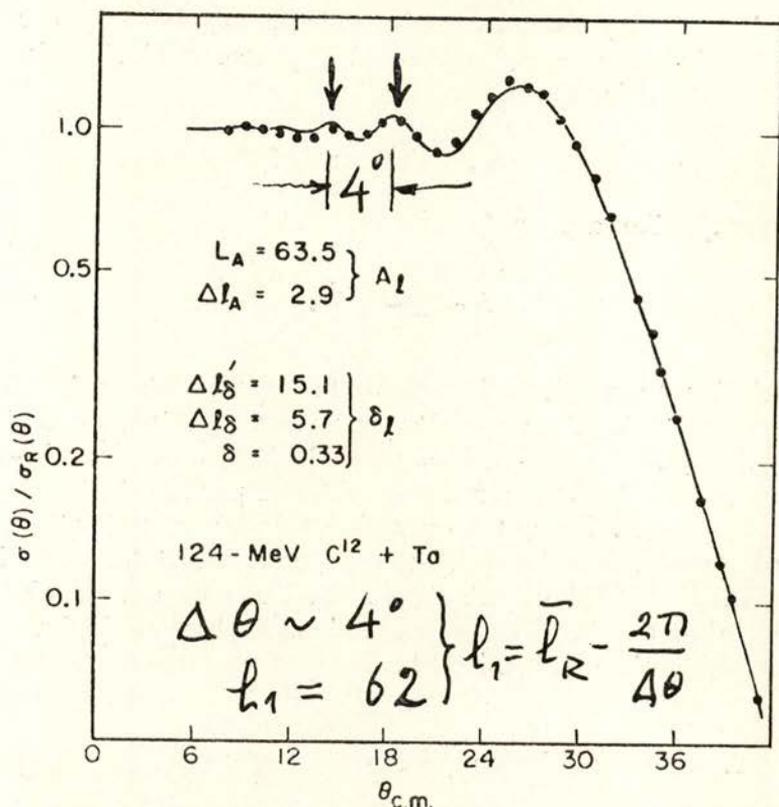


Fig. 10 — Diffusion élastique $C + Ta$, $E = 124$ Mev. [12]. Les flèches montrent les deux maximums utilisés pour calculer la valeur de l_1 à partir de l'expression (6.2).

Dans ces conditions on obtient [5] pour δ , [expression (3.5)] compte tenu de (3.1)

$$(6.3) \quad \delta = 2\gamma \ln(\sin \theta/2) + l_1 \theta + \Phi.$$

Lorsqu'on remplace (6.3) dans (3.4) on obtient pour $\sigma_{s.e.}(\theta)$ une expression qui reproduit bien les oscillations de la figure

d'interférence dans la région $\theta \ll \theta_r$. Cette expression est, essentiellement, le résultat obtenu par Greider [13] à partir d'un modèle phénoménologique.

Enfin, puisque l'on a $l_1 \sim l_r$, on peut comparer la valeur de l_1 extraite de (6.2) à la valeur de l qui correspond à une trajectoire tangentielle, l_r , obtenue par l'expression bien connue

$$l_r = l_{\theta_{1/4}} = r \cotg \frac{\theta_{1/4}}{2}$$

cette comparaison est donnée, pour les deux exemples considérés au paragraphe précédent, dans le Tableau II

TABLEAU II

	l_1	$l_{\theta_{1/4}}$
A + Se	96	92
C + Ta	62	66,5

6. 3. *Y a-t'il des oscillations de grande fréquence superposées à celles couramment obtenues?*

Dans tout ce qui a été fait nous nous sommes bornés à examiner l'interférence entre deux branches de la fonction de déflexion. En invoquant le rôle de l'absorption nous avons négligé la possibilité de l'interférence de ces deux branches avec la branche négative (positive, par inversion du dessein dans la figure 7) de $\Theta(l)$. Une situation analogue se rencontre en physique atomique. La figure 11 montre, dans le cas atomique, une situation où trois trajectoires de moment angulaire β_1 , β_2 et β_3 contribuent au même angle de diffusion. La figure 12 est un exemple de calcul où l'on a tenu compte de ces trois branches (voir expression 3.3). On y voit clairement les oscillations de grande fréquence superposées à celles qui résultent des deux branches qui émergent de θ_r .

En physique atomique on décèle expérimentalement ces oscillations. Dans le cas nucléaire la branche négligée contribue très peu (quasiment perpendiculaire à l'axe l) à la section efficace totale. Toutefois il n'est pas exclu que des expériences de grande résolution ne décelent des oscillations de grande fréquence (et de très faible amplitude) superposées à la figure d'interférence habituelle.

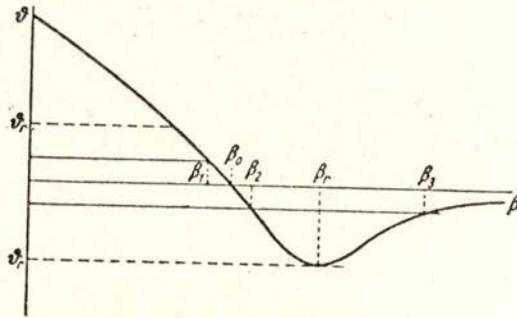


Fig. 11 — Fonction de déflexion atomique. La branche positive interfère avec les deux branches négatives; les trajectoires de moment angulaires β_1 , β_2 et β_3 sont diffusées suivant le même angle référence (9).

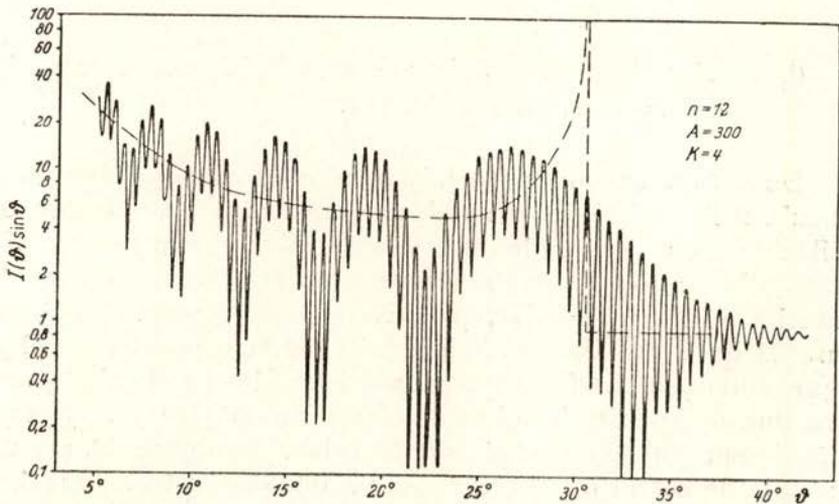


Fig. 12 — Calcul de la section efficace différentielle (multipliée par $\sin \theta$) lorsqu'on tient compte de la troisième branche de $\theta(I)$. Collision de deux atomes, référence (9)).

7. PRESPECTIVES ET CONCLUSIONS

Nous avons passé en revue quelques unes de possibilités qu'offre la théorie semi-classique pour l'étude de la diffusion élastique d'ions lourds.

Son intérêt pratique est, bien entendu, d'autant plus grand que la masse des deux noyaux en collision est élevée. Or, justement dans le cas de noyaux très lourds ($Kr + Th$) l'étude expérimentale [14] de la diffusion élastique est actuellement l'objet d'une attention particulière car il semble que l'effet d'une déformation due à la polarisation dans le champ de Coulomb, laisse sa signature dans les distributions angulaires.

L'intérêt de ce qui a été exposé ne se limite pas à la diffusion élastique.

L'utilisation de la fonction de déflexion devrait permettre une approche très naturelle de l'étude de l'interférence Coulombien-nucléaire, en diffusion inélastique, au dessus de la barrière.

Les résultats expérimentaux [15] semblent indiquer que les oscillations de la distribution angulaire inélastique, sont en opposition de phase avec celles de l'élastique [dans la région $\theta \ll \theta_r$, voir expression (3.4)] et ceci quelque soit la parité du niveau excité, contrairement à ce qui se passait avec la règle de Blair. Or, il faut avoir en vue que les oscillations qui satisfont la règle de Blair ne sont pas du même type que celles que nous avons étudiées ici.

Les premières se produisent lorsque l'énergie incidente est telle que l'effet du champ de Coulomb est négligeable ($\eta \ll kR$). On obtient alors des oscillations qui proviennent d'interférences dues à un effet de diffraction (de Fraunhofer) sur les bords du noyau considéré comme une sphère absorbante.

Par contre les oscillations que nous avons examinées trouvent leur origine dans un effet d'interférence du, lui, à la présence d'un terme nucléaire, et d'un terme Coulombien très important, vis à vis de l'énergie incidente ($\eta \sim kR$).

Si, dans un traitement semi-classique [16] de la diffusion inélastique on traite l'élastique en tennant compte de deux branches de la fonction de déflexion, le comportement relatif des oscillations en élastique et inélastique devrait être naturellement inclu [17].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. W. FORD et J. A. WHEELER, *Ann. of Phys.* **7** (1959) 259 et *Ann. of Phys.* **7** (1959) 287.
- [2] G. B. AIRY, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **6** (1838) 379.
- [3] M. L. HALBERT et A. ZUCKER, *Nucl. Phys.* **16** (1960) 158 A. ZUCKER, *Ann. Rev. of Nucl. Sc.* **10** (1960) 27.
- [4] M. V. BERRY, *Proc. Phys. Soc.* **89** (1966) 479.
- [5] R. da SILVEIRA, pre-print IPNO/TH 73-9. (Orsay).
- [6] N. F. MOTT et H. S. W. MASSEY, «The Theory of Atomic Collisions», Clarendon Press, Oxford.
- [7] R. G. NEWTON, «Scattering Theory of Waves and Particles», McGraw-Hill.
- [8] «Handbook of Mathematical Functions», 1964, Ed. M. Abramowitz et I. A. Stegun.
- [9] E. HUNDHANSEN et H. PAULY, *Z. Phys.* **187** (1965) 305.
- [10] J. GALIN, B. GATTY, D. GUERREAU, C. ROUSSET, U. C. SCHLITTHANER-Voos et X. TARRAGO, *Nucl. Phys.* (Sous presse).
- [11] J. GALIN, D. GUERREAU, M. LEFORT, J. PETER, X. TARRAGO et R. BASILE, *Nucl. Phys. A* **159** (1970) 461.
- [12] H. E. CONZETT, A. ISOYA et E. HADJIMICHAEL, Proc. of The Third Conf. on Reactions Between Complex Nuclei, Asilomar, (1963) 26.
- [13] K. R. GREIDER, *Ann. Rev. of Nucl. Sc.* **15** (1965) 291.
- [14] P. COLOMBANI, J. C. JACMART, N. POFFÉ, M. RION, C. STÉPHAN et J. TYS, *Phys. Letters*, **42 B** (1972) 197.
- [15] F. D. BECCHETTI, pre-print, LBL — 1652 (Berkeley).
- [16] R. A. BROGLIA, S. LAUDOWNE et A. WINTHER, *Phys. Lett.*, **40 B** (1972) 293.
- [17] R. da SILVEIRA et C. WILLAIN, Travail en cours.