LE TENSEUR D'IMPULSION-ÉNERGIE LIÉE ET LES SYSTÈMES RELATIVISTES À MASSE PROPRE VARIABLE (*)

ANTÓNIO C. DE SALES LUIS
Laboratoire de Physique, Instituto Superior Técnico, Lisbonne, Portugal

RÉSUMÉ — L'interprétation thermodynamique de l'effect Joule a amené l'auteur à introduire le «tenseur d'impulsion-énergie liée» :

$$S_{\alpha}^{\beta} = \frac{T^0 S^0}{c^2} u^{\alpha} u^{\beta} \tag{1}$$

et le «4-vecteur d'impulsion-entropique» :

$$G_{(s)}^{\alpha} = \frac{T^0 S^0}{c^2} u^{\alpha} . \tag{2}$$

Par conséquent, il faut attribuer à un système relativiste une masse m_s^0 telle que :

$$m_s^0 = \frac{T^0 S^0}{c^2} \tag{3}$$

tout à fait d'accord avec les idées d'Einstein. Alors, la masse propre d'un système est la somme de sa masse propre (usuelle) m^0 et de sa masse propre entropique m_s^0:

$$M^0 = m^0 + \frac{T^0 S^0}{c^2} . \tag{4}$$

Toutes les transformations dans la nature sont irréversibles et les phénomènes irréversibles créent effectivement de l'entropie et par conséquent de l'énergie liée. Alors, compte tenu de (4), les systèmes relativistes sont des systèmes à masse propre variable ; par l'intermédiaire d'un exemple (collision inélastique) on montre le rôle joué par le 4-vecteur d'impulsion-entropique et la cohérence des idées introduites.

(*) Reçu le 15 Décembre 1973.

Considérons un corps conducteur, homogène et isotrope, à température uniforme et à composition constante, parcouru par un courant électrique de densité $\vec{J}$. Il se produit un phénomène irréversible, l'effet Joule, (chaleur de Joule) qui, au point de vue de la thermodynamique, se caractérise par une production d'entropie essentiellement positive. On sait [1] que la production d'énergie liée (T S), par unité de temps et de volume s'exprime par la relation:

$$T\sigma = (\vec{J} \cdot \vec{E}) \tag{1}$$

où T est la température de l'élément de volume considéré, σ la production d'entropie par unité de temps et de volume et $\vec{E}$ le champ électrique; remarquons que $T\sigma$ représente la production d'énergie liée par unité de temps et de volume.

Dans la littérature, même contemporaine, on dit que l'effet Joule consiste dans le dégagement de la chaleur, produit par le passage du courant électrique ce qui, a notre avis, n'est pas du tout d'accord avec les deux principes de la thermodynamique. L'équation (1) suggére une interprétation plus cohérente au point de vue thermodynamique. En effet, considérons un corps conducteur en équilibre thermique avec le milieu extérieur; le passage du courant électrique donne lieu à un phénomène irréversible se caracterisant par une production d'entropie positive; cette énergie liée reste dans le système sous la forme d'énergie interne et, par conséquent, la température du conducteur augmente au fur et à mesure que l'électricité y circule. De cette façon, la température du conducteur devient supérieure à celle du milieu extérieur et, d'après le premier principe de la thermodynamique, il y a de la chaleur mise en jeu à travers la frontière du système, si (et seulement si) celui-ci n'est pas isolé. C'est-à-dire, il y a toujours un effet volumique (effet Joule) qui, au point de vue

[1] A. Sales Luis, «A expressão Relativista do Segundo Princípio da Termodinâmica», Lisboa (1965).

thermodynamique, se traduit par une production d'entropie au sein du système même; si le système n'est pas isolé, alors, il y aura aussi de la chaleur mise en jeu à travers la frontière du système.

Il nous semble qu'il faut distinguer nettement ce qui est échangé avec le monde extérieur par l'intermédiaire de la frontière de séparation et ce qui est produit au sein du système lui-même; l'effet Joule est un effet volumique relatif à ce qui se passe à l'intérieur du système, n'ayant aucun rapport direct avec la chaleur mise en jeu avec le monde extérieur. Que beaucoup de physiciens, moins avertis de toutes ces nuances thermodynamiques, se sentent quand même portés à regarder l'effet Joule comme «la chaleur», cela est facile à expliquer. D'une part il y a à considérer le poids de la tradiction, soit en regardant la chaleur comme «calorique» (fluide indestructible), soit en la regardant comme une forme d'énergie présente dans le système; d'autre part il est indéniable que c'est le passage du courant électrique qui est la seule cause de l'augmentation de la température du système (en vertu de la production d'entropie, toujours définie positive) et, par conséquent, de cette interaction avec le monde extérieur, dans le cas des systèmes qui ne sont pas isolés. Pourtant, si on coupe, le passage du courant électrique, l'effet Joule cessera tout de suite mais la chaleur mise en jeu (échange d'entropie) persistera jusque la température du système soit égale à celle du monde extérieur.

Considérons, alors, des milieux homogènes et isotropes, sans magnétisation permanente, non-ferro-magnétiques et peu dispersives ($\varepsilon\mu = 1$). En outre, considérons qu'il n'y a pas de champs appliqués et, par conséquent, que la température est toujours uniforme. Dans ces conditions-là, on a [2]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

dans tous les repères galiléens. Dans un système galiléen quelconque, on peu définir [2], le quadri-vecteur L_α:

$$L_\alpha = \frac{1}{c} F_{\alpha\beta} u^\beta \tag{2}$$

(2) M. A. Tonnelat, «Les Principes de la Théorie Electromagnétique et de la Relativité», Masson, 1959, O. Costa de Beauregard, «La Théorie de la Relativité Restreinte», Masson, 1949.

par contraction du tenseur électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ avec le quadri--vecteur u^{β} vitesse d'univers, dont les composantes sont:

$$(3) \qquad L_k = \frac{E_k^*}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad\qquad L_4 = \frac{i}{c}\,\frac{(\vec{E}^*\cdot\vec{u})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$(k = x, y, z)$$

et:

$$(4) \qquad \vec{E}^* = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{u}\wedge\vec{B}].$$

Par contraction du quadri-vecteur L_α avec le quadri-vecteur C^α, densité de courant électrique, on peut former l'invariant relativiste suivant:

$$(5) \qquad L_\alpha C^\alpha = \frac{(\vec{J}\cdot\vec{E}^*)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{u^2}}} = (\vec{J}^0\cdot\vec{E}^0).$$

M. Von Laue [3] a identifié la quantité $(\vec{J}\cdot\vec{E}^*)$ avec la chaleur de Joule et déduit la loi de transformation relativiste de la chaleur

$$Q = Q_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

ce qui, à notre avis, n'est pas valable, vis-à-vis de l'interprétation thermodynamique de l'effet Joule, que nous venons d'expliciter. Par contre, en tenant compte de (1), on peut écrire:

$$(6) \qquad T\sigma = (\vec{J}\cdot\vec{E}^*) \qquad T^0\sigma^0 = (\vec{J}^0\cdot\vec{E}^0)$$

ce qui, compte tenu de (5), nous a conduit [1] à la loi de transformation relativiste de la production d'énergie liée, par unité de temps et de volume:

---

[3] M. Von Laue, «La Théorie de la Relativité» (pg. 210), Gauthier--Villars, 1924.

$$\mathrm{T}\,\sigma = \mathrm{T}^0\,\sigma^0 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{7}$$

et nous a amené [1] a introduire le tenseur d'impulsion-énergie liée par l'équation:

$$\mathrm{S}_\alpha^\beta = \frac{\mathrm{T}^0\,s^0}{c^2}\,u_\alpha\,u^\beta \tag{8}$$

dont les composantes sont:

$$\mathrm{S}_\alpha^\beta = \left|\begin{array}{cccc} \mathrm{S}_{xx} & \mathrm{S}_{xy} & \mathrm{S}_{xz} & \frac{i}{c}\mathrm{T}\,s\,u_x \\ \mathrm{S}_{yx} & \mathrm{S}_{yy} & \mathrm{S}_{yz} & \frac{i}{c}\mathrm{T}\,s\,u_y \\ \mathrm{S}_{zx} & \mathrm{S}_{zy} & \mathrm{S}_{zz} & \frac{i}{c}\mathrm{T}\,s\,u_z \\ \frac{i}{c}\mathrm{T}\,s\,u_x & \frac{i}{c}\mathrm{T}\,s\,u_y & \frac{i}{c}\mathrm{T}\,s\,u_z & -\mathrm{T}\,s \end{array}\right| \tag{9}$$

où:

$$\mathrm{S}_{kk} = \frac{\mathrm{T}\,s}{c^2}\,u_k\,u_k \tag{10}$$

$$\mathrm{S}_{ki} = \frac{\mathrm{T}\,s}{c^2}\,u_k\,u_1\,. \tag{11}$$

Comme il est usuel, u_α et u^β sont les composantes covariantes et contrevariantes du 4-vecteur vitesse d'univers, $u_k (k = x, y, z)$ les composantes du 3-vecteur vitesse, T la température thermodynamique, s la densité d'entropie et Ts la densité d'énergie liée:

$$\mathrm{T}\,s = \frac{\mathrm{T}^0\,s^0}{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{12}$$

et par l'indice zéro on désigne que les grandeurs sont rapportées au système de référence propre, c'est-à-dire, celui par rapport auquel l'impulsion totale mécanique du système est nulle. De (8) résulte que le tenseur d'impulsion-énergie liée est un tenseur symétrique et que sa composante S_4^4 représente, au signe moins près, la densité d'énergie liée, ce qui est bien d'accord avec les idées d'Einstein (4). En outre, la loi de transformation de la composante S_4^4 conduit à l'équation (12).

De ce qui vient d'être dit, on définit naturellement le 3-vecteur densité de courant d'énergie liée par l'équation:

$$\vec{\sum}_s = \mathrm{T}\, s\, \vec{u} \tag{13}$$

et le 3-vecteur densité d'impulsion entropique:

$$\vec{g}_s = \frac{\vec{\sum}_s}{c^2} = \frac{\mathrm{T}\, s}{c^2}\, \vec{u}\,. \tag{14}$$

En outre, la 4^e-composante de la divergence du tenseur T_α^β prend la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\, S_4^\beta}{\partial\, x^\beta} &= \frac{i}{c}\left(\mathrm{div}\,(\mathrm{T}\, s\, \vec{u}) + \frac{\partial\,(\mathrm{T}\, s)}{\partial\, t}\right. \\ &= \frac{i}{c}\,\mathrm{T}\,\sigma\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Considérant que la température thermodynamique est positive, il découle de (15) que:

$$\frac{i}{c}\,\frac{\partial\, S_4^\beta}{\partial\, x^\beta} \angle\, 0 \tag{16}$$

expression qui traduit, d'une forme tout à fait indépendante du système galiléen consideré, le fait expérimental que la production d'entropie est toujours non-négative.

---

(4) A. Einstein, «The Meaning of Relativity» (pg. 47) Methuen and Co, 1950 («The energy per unit volume has the character of a tensor»).

De plus, on est naturellement amené à introduire le 4-vecteur d'impulsion-entropique, défini par:

$$G_s^\alpha = \frac{T^0 S^0}{c^2} u^\alpha \tag{17}$$

dont les composantes sont:

$$\vec{G}_s = \frac{T\,S}{c^2} \vec{u} \tag{18}$$

et

$$G_s^4 = \frac{i}{c} T\,S \tag{19}$$

tenant compte de:

$$T\,S = \frac{T^0 S^0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{20}$$

comme résulte de la loi de transformation de la composante G_s^4. On remarquera que la 4e composante du 4-vecteur G_s^α est, à part le facteur $\frac{i}{c}$, l'énergie liée. De cette façon, il faut attribuer à un système thermodynamique une inertie m_s^0 telle que:

$$m_s^0 = \frac{T^0 S^0}{c^2}. \tag{21}$$

C'est-à-dire, la masse propre d'un système thermodynamique est la somme de sa masse propre usuelle (mécanique) m^0 et de sa masse propre correspondant à l'énergie liée:

$$M^0 = m^0 + \frac{T^0 S^0}{c^2}. \tag{22}$$

Le 4-vecteur impulsion du système est, par conséquent, la somme du 4-vecteur impulsion-mécanique et du 4-vecteur impulsion-entropique:

$$G^\alpha = G_m^\alpha + G_s^\alpha. \tag{23}$$

A titre d'exemple, considérons un corps macroscopique de masse propre (mécanique) m_1^0, qui vient heurter, avec la vitesse $u_1=\beta_1 c$, un autre corps de masse propre m_2^0, primitivement au repos. Supposons que, à la suite du choc, les deux corps restent collés et sont finalement animés de la vitesse commune $u_3=\beta_3 c$, dans la même direction que u_1. Si nous écrivions l'équation de conservation du 4-vecteur impulsion mécanique, sous la forme qui paraîtrait naturelle:

$$(G_m^\alpha)_1 + (G_m^\alpha)_2 = (G_m^\alpha)_3 \tag{24}$$

dont la 1e composante conduit à.

$$\frac{m_1^0 u_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{(m_1^0+m_2^0)\, u_3}{\sqrt{1-\beta_3^2}} \tag{24 a}$$

et la 4e composante, à:

$$\frac{m_1^0 c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + m_2^0 c^2 = \frac{(m_1^0+m_2^0)\, c^2}{\sqrt{1-\beta_3^2}} \tag{24 b}$$

nous serions amenés à un système de deux équations, à une seule inconnue (u_3), qui sont incompatibles. On s'affranchit de cette difficulté en imposant que la masse propre m_3^0 des deux corps une fois collés est supérieure à la masse propre totale $(m_1^0+m_2^0)$ des deux corps primitifs. Si nous remplaçons, alors, la quantité connue $(m_1^0+m_2^0)$ par la quantité inconnue m_3^0, nous obtenons le système de deux équations à deux inconnues (m_3^0, u_3) suivant:

$$\frac{m_1^0 u_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{m_3^0 u_3}{\sqrt{1-\beta_3^2}} \tag{25 a}$$

$$\frac{m_1^0 c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + m_2^0 c^2 = \frac{m_3^0 c^2}{\sqrt{1-\beta_3^2}} \tag{25 b}$$

qui est soluble. Au point de vue qualitatif, on explique le remplacement de $(m_1^0 + m_2^0)$ par m_3^0 en disant que, le choc étant inélastique, il y a «dégagement de chaleur» et, par conséquent, la masse propre m_3^0 est supérieure à $(m_1^0 + m_2^0)$. Somme toute, il nous semble que la considération de la masse m_3^0 résulte, en dernier ressort, d'une raison purement formelle, reposant uniquement sur l'incompatibilité des équations (24 a, b) de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Comme nous allons montrer, l'introduction du 4-vecteur impulsion-entropique permet d'expliquer, au point de vue quantitatif, ce problème de collision inélastique d'une façon tout à fait claire et cohérente. Ecrivant, en effet, la conservation du 4-vecteur impulsion (totale), sous la forme:

$$(\mathrm{G}_m^\alpha + \mathrm{G}_s^\alpha)_1 + (\mathrm{G}_m^\alpha + \mathrm{G}_s^\alpha)_2 = (\mathrm{G}_m^\alpha + \mathrm{G}_s^\alpha)_3 \tag{26}$$

on obtient pour la première composante l'équation:

$$\frac{\mathrm{M}_1^0\, u_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{\mathrm{M}_3^0\, u_3}{\sqrt{1-\beta_3^2}} \tag{27 a}$$

et pour la 4[e] composante:

$$\frac{\mathrm{M}_1^0\, c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \mathrm{M}_2^0 c^2 = \frac{\mathrm{M}_3^0\, c^2}{\sqrt{1-\beta_3^2}} \tag{27 b}$$

L'équation (27 b) peut s'écrire:

$$\left(\frac{\mathrm{M}_1^0\, c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - \mathrm{M}_1^0 c^2\right) = \left(\frac{\mathrm{M}_3^0\, c^2}{\sqrt{1-\beta_3^2}} - \mathrm{M}_3^0 c^2\right) + \\ + \{\mathrm{M}_3^0 - (\mathrm{M}_1^0 + \mathrm{M}_0^2)\}\, c^2$$

c'est-à-dire:

$$(\mathrm{E}_{\mathrm{cin}})_1 = (\mathrm{E}_{\mathrm{cin}})_3 + \mathrm{L}' \tag{28}$$

où:

$$\mathrm{L}' = \{\mathrm{M}_3^0 - (\mathrm{M}_1^0 + \mathrm{M}_2^0)\}\, c^2 . \tag{29}$$

En tenant compte de (22):

$$M^0 = m^0 + \frac{T^0\, S^0}{c^2}$$

on obtient, à partir de (29):

$$L' = (T^0\, S^0)_3 - \{(T^0\, S^0)_1 + (T^0\, S^0)_2\} \tag{30}$$

en posant, naturellement:

$$m_3^0 = m_1^0 + m_2^0 \tag{31}$$

comme dans le cas des chocs élastiques. L'équation (30) montre que la diminuition de l'énergie cinétique du système est égale à la variation de l'énergie liée du système; la masse propre mécanique m^0 du système est ici conservative (comme elle l'est dans le cas d'un choc élastique) mais la masse propre totale M^0 varie en vertu de la production d'entropie qui caractérise les transformations irréversibles. Cet exemple montre clairement le rôle joué par le 4-vecteur d'impulsion entropique dans les transformations thermodynamiques relativistes pendant lesquelles la masse propre mécanique m^0 reste constante, et met en évidence la nécessité d'associer inertie à l'énergie liée ($T\,S$), d'une façon tout à fait cohérente avec l'idée introduite par Einstein dans son génial travail «Does the inertia of a body depend upon its energy-content?» [5]. On remarque, en passant, qu'on arrive naturellement à la proposition d'Einstein que la masse propre d'un corps «chaud» a une valeur supérieure à celle du même corps «froid».

De ce qui vient d'être dit, nous sommes conduits à la conclusion qu'un système thermodynamique est un système à masse propre variable. En utilisant l'équation bien connue de l'électromagnetisme relativiste:

$$f_\alpha = -\frac{\partial\, T_\alpha^\beta}{\partial\, x^\beta} \tag{32}$$

[5] A. Einstein, Ann. der Physik, 17, 1905 («The Principle of Relativity» (pg. 66), Dover Publ. (1923).

Où f_α est le 4-vecteur densité de force et T_α^β est le tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique et considérant l'équation bien connue de la mécanique relativiste à masse propre constante:

$$f_\alpha = \frac{\partial M_\alpha^\beta}{\partial x^\beta} \tag{33}$$

Où M_α^β est le tenseur d'impulsion-énergie mécanique, nous sommes arrivés [1] à écrire l'équation bien connue de la relativité restreinte, valable pour le vide:

$$\frac{\partial (T_\alpha^\beta + M_\alpha^\beta)}{\partial x^\beta} = 0 \tag{34}$$

sous la forme plus générale:

$$\frac{\partial (T_\alpha^\beta + M_\alpha^\beta + S_\alpha^\beta)}{\partial x^\beta} = 0 \tag{35}$$

valable pour les systèmes physiques à masse propre variable. En particulier, la 4e composante prend la forme:

$$\frac{\partial (T_4^\beta + M_4^\beta + S_4^\beta)}{\partial x^\beta} = 0 \tag{36}$$

ce qui, en liaison avec la condition (16), traduit le deuxième principe de la thermodynamique d'une façon tout à fait indépendante du système de coordonnées galiléen considéré.