

LA CORRESPONDANCE ENTRE MODELES MICROSCOPIQUES ET MACROSCOPIQUES (*)

E. MATAGNE

Bâtiment Maxwell Faculté des Sciences Appliquées
Louvain-la-Neuve

ABSTRACT— The purpose of this paper is to show how to derive macroscopic quantities by taking the average of microscopic quantities without using either vectorial type integrals or volume integrals.

In contrast with the usual methods [3], [8], [11], [12], it follows that the method developed here is compatible with theories referring to a curved space (e. g. general relativity). However, since these theories could not yet have been put in agreement with quantum theories, this study is achieved at a purely classical (non-quantified) level, in spite of an analogy with the quantum theories.

An approximate method of calculation, which is derived almost automatically from the definition of macroscopic quantities, is also developed.

By using a spherical approximation, an approximate calculation is finally carried out on three classical examples, which are

- the evaluation of the conductivity of an emulsion
- the calculus of the dielectric permeability of a polar gas, and
- the derivation of the properties of a «cold plasma» in the general relativity theory.

Although the results of these calculations are not very original, especially as far as the two first examples are concerned, we found it interesting to recalculate them by this method which is more deductive than usually presented methods, and which opens the way to more general results.

RESUMÉ— Le propos de cet article est de montrer comment l'on peut obtenir des grandeurs macroscopiques comme moyennes effectuées sur des grandeurs microscopiques *sans avoir recours* à des intégrales de type vectoriel, ni à des intégrales de volume.

La définition proposée présente dès lors l'avantage sur les méthodes habituelles [3], [8], [11], [12] d'être compatible avec les théories qui font intervenir un espace courbe (par exemple la relativité générale).

(*) Received 19 November 1976.

Par contre, ces dernières théories n'ayant pas encore pu être conciliées avec les théories quantiques, l'étude ci-dessous reste purement classique (non-quantique), ce qui n'empêchera pas de relever une analogie avec les théories quantiques.

Une méthode de calcul approchée, qui dérive presque trivialement de la définition des grandeurs macroscopiques, sera aussi présentée.

Finalement, en faisant usage d'une approximation sphérique, le calcul approché sera fait à propos de trois exemples classiques, à savoir le calcul de la conductivité d'une émulsion, le calcul de la perméabilité diélectrique d'un gaz polaire et le calcul des propriétés d'un «plasma froid» en relativité générale.

Bien que les résultats eux-mêmes manquent d'originalité, spécialement en ce qui concerne les deux premiers exemples, il nous a semblé intéressant de les retrouver par cette méthode plus déductive que ce qui est habituellement présenté et d'ouvrir ainsi la voie à une généralisation possible.

1. INTRODUCTION

Dans beaucoup de cas, un même phénomène peut être décrit par plusieurs modèles dont certains, dits microscopiques, entrent dans le détail d'inhomogénéités que d'autres, dits macroscopiques, ne considèrent pas.

En électromagnétisme, Maxwell lui-même [1] s'attacha à calculer la conductivité d'une émulsion. Il est clair que cette notion n'a de sens que si l'on considère l'émulsion comme un milieu homogène. Le calcul s'effectue en mettant ce modèle «macroscopique» en correspondance avec un modèle «microscopique» où le milieu comprend deux phases de conductivités différentes.

Lorsque Carter [2] [5] tint compte de l'influence des encoches dans une machine électrique en remplaçant l'entrefer par un entrefer moyen (et donc le champ magnétique microscopique par un champ macroscopique), il effectuait une démarche du même genre.

A une autre échelle, la théorie de l'électron [3] met en correspondance un modèle microscopique formé de particules et un modèle macroscopique des milieux électromagnétiques matériels.

Plus près de nous, l'électromécanique étudie couramment les machines à courant continu en utilisant non pas un modèle de circuits filiformes à commutation mais un modèle «macroscopique» de circuits à contacts glissants dont les phénomènes de commutation ont été exclus ainsi que les fluctuations des tensions de période inférieure à l'intervalle de commutation [15].

On le voit, les mots «macroscopique» et «microscopique» sont tout relatifs. Pour le cosmologue, l'univers est rempli d'une densité continue de matière et, si l'on veut déduire cette densité continue

d'un modèle «microscopique», c'est à l'échelle des amas de galaxies que la moyenne doit être faite [17].

A partir de cet extrême, on pourrait considérer de multiples intermédiaires dans la descente vers l'infiniment petit en considérant l'échelle des galaxies, des systèmes planétaires, des astres, des atomes (mot assez malheureux), des particules élémentaires (mot probablement tout aussi malheureux car le foisonnement de ces particules donne à penser qu'elles ne sont pas si élémentaires).

Finalement, on songe à un milieu «subquantique».

Nous pouvons donc seulement, puisque nous ne disposons pas d'un modèle «le plus microscopique possible», ordonner les modèles existants en disant que l'un est plus microscopique que l'autre.

Souvent, les deux modèles (l'un microscopique et l'autre macroscopique) que l'on souhaite mettre en correspondance font appel à une même théorie physique. Ainsi, Maxwell [1] utilise deux fois l'électromagnétisme quasistatique galvanique et Carter [2] utilise seulement l'électromagnétisme quasistatique magnétique.

D'autres fois, la théorie microscopique est un cas particulier de la théorie macroscopique. Ainsi Lorentz [3] utilise au niveau microscopique l'électromagnétisme dans le vide, où l'on peut identifier les champs et les inductions puisque ϵ_0 et μ_0 sont prises comme constantes universelles, alors que la théorie macroscopique utilise des perméabilités dépendant du milieu considéré.

On pourrait également imaginer que les théories microscopiques et macroscopiques n'aient que de lointains rapports (Wheeler 1970, repris en [17]).

2. LIMITATIONS DES DEFINITIONS COURANTES

Lorsque les deux modèles à mettre en correspondance font appel à des théories se déroulant dans un même cadre spatio-temporel plat, c'est à dire lorsqu'elles sont du niveau de la relativité galiléenne ou de la relativité restreinte d'Einstein, le passage peut s'effectuer d'une façon simple, au moins conceptuellement, en utilisant des moyennes obtenues par intégration spatiale et temporelle.

Cette méthode a été utilisée par Lorentz et portée à son apogée par de Groot [11] [12]. Elle est pourtant sujette à des critiques du point de vue conceptuel car on voit mal comment un effet microscopique *de volume* pourrait influencer un observateur macroscopique. Cela ne devrait jouer un rôle fondamental que pour une théorie

admettant l'action instantanée à distance, hypothèse peu fructueuse en physique.

La méthode est également limitée dans ses applications. Puisqu'elle fait appel à l'intégration de grandeurs vectorielles, elle ne peut pas être généralisée à un espace-temps courbe et se trouve donc en défaut à l'échelle de l'univers (red-shift) et de l'astrophysique (trous noirs).

Elle est également discutable à l'échelle des particules élémentaires. En effet, celles-ci apparaissent alors comme une simple idéalisation des sphères chargées dont se servaient les premiers expérimentateurs; tout au plus les réduit-on, par un passage à la limite, à des répartitions de source en delta de Dirac [8].

Or ce point de vue n'est pas exempt de contradictions; Lorentz lui-même faisant remarquer qu'une particule ponctuelle chargée serait entourée d'une énergie infinie.

En relativité spéciale, cette particule aurait alors une inertie infinie et il serait impossible de la faire dévier de sa trajectoire rectiligne. On peut donc supposer qu'il existe, au voisinage des particules, des densités d'énergie suffisantes pour incurver l'espace: c'est à la relativité générale qu'il faudrait alors avoir recours.

Ainsi, les géométries des modèles microscopique et macroscopique peuvent être différentes, la première présentant des courbures très fortes là où la seconde est presque plate.

3. ESSAI DE DEFINITION DE LA CORRESPONDANCE ENTRE MODELES

Considérons deux modèles décrivant un même phénomène physique. Ces modèles peuvent faire intervenir des géométries spatio-temporelles différentes: nous supposerons seulement que la dimension est 4 dans les deux modèles.

Divisons les espaces en cellules dont les frontières évitent les singularités éventuelles.

Ces frontières de cellules sont donc des sous-espaces à trois dimensions, ordinairement deux dimensions spatiales et une dimension temporelle.

Les frontières des cellules sont supposées avoir la même topologie dans les deux modèles (à deux cellules contigües dans un modèle correspondent deux cellules contigües de l'autre) et nous pouvons donc les mettre en correspondance biunivoque continue. Ces opérations

mathématiques peuvent s'interpréter physiquement comme le choix d'une échelle de grandeur.

Nous dirons que les deux modèles se correspondent à l'échelle des cellules considérées si tous le flux que l'on peut définir sur les interfaces séparant les cellules sont identiques, qu'ils soient calculés en suivant l'un ou l'autre modèle.

Cette définition suppose évidemment une définition de ce que nous appellons un flux sur un interface: il s'agira d'un nombre *scalaire* obtenu par intégration sur l'interface considéré de grandeurs intrinsèques à cet interface.

Ainsi, nous n'avons besoin ni de moyennes vectorielles, ni d'intégrales de volume. Ce point de vue est plus satisfaisant pour notre esprit anthropomorphique (on ne peut déplacer un objet qu'en le touchant, c'est-à-dire à travers une surface de séparation entre notre corps et l'objet considéré) qui nous conduit à nier l'action instantanée à distance.

Bien que les idées ci-dessus n'aient jamais fait l'objet, à notre connaissance, d'un exposé systématique, on peut en trouver les germes chez des auteurs aussi disparates que Carter [2] [5], Lorentz [3], Wigner-Seitz [6] et Lindquist-Wheeler [9].

Il reste à expliquer ce que nous appellerons une grandeur intrinsèque.

Tout d'abord, cette grandeur doit pouvoir être décrite en utilisant seulement la structure interne de l'interface; si nous admettons que cet interface est une variété différentiable de dimension 3, il s'agira donc d'objets géométriques sur cette variété, par exemple des vecteurs ou des tenseurs de dimension 3.

En outre, les grandeurs intrinsèques doivent pouvoir être calculées à partir des champs sur l'espace à 4 dimensions voisin de la frontière. Plus précisément, à partir de ceux de ces champs qui interviennent dans les conditions aux limites d'un problème de Cauchy. En effet, ces grandeurs doivent prendre une valeur unique, qu'elles soient calculées d'un côté ou de l'autre de la frontière.

Lorsque l'on considère une théorie dont le formalisme distingue nettement les équations d'évolution des relations constitutives (tel est par exemple le cas de l'électromagnétisme de Minkowski), nous dirons qu'une grandeur est intrinsèque à un interface si elle est astreinte *de par les équations d'évolution* à rester continue lors de la traversée de l'interface considéré.

Ainsi, le champ électrique E_1 perpendiculaire à une surface n'est pas une grandeur intrinsèque parce qu'il peut prendre des valeurs

différentes de part et d'autre de cette surface si celle-ci correspond à une discontinuité de la perméabilité diélectrique.

Même si l'on élimine du modèle ces discontinuités, nous ne considérerons pas E_1 comme une grandeur intrinsèque parce que sa continuité n'est alors garantie que par une relation constitutive. En fait, les relations d'évolution

$$(1) \quad \nabla \times \vec{E} + \partial \vec{B} / \partial t = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(2) \quad \nabla \times \vec{H} - \partial \vec{D} / \partial t = \vec{J} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

entraînent seulement la continuité de $\vec{E}_//$ et B_1 d'une part, D_1 et $\vec{H}_//$ de l'autre, ces grandeurs étant désormais considérées comme intrinsèques.

Le problème est plus confus lorsque l'on a affaire à une théorie comme la théorie de la gravitation d'Einstein où les relations d'évolution ne se dégagent pas entièrement des relations constitutives. On peut trouver des éléments de réponse dans les travaux de Lichnerowicz [7] et de Misner (par exemple [17]).

Selon Lichnerowicz, la condition de raccordement à vérifier en théorie d'Einstein est l'existence d'un système de coordonnées admissible au voisinage de la frontière et tel que la métrique $g_{\mu\nu}$ et ses dérivées premières y soient de classe C_1 . Les données de Cauchy sont donc les potentiels $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées premières.

Cette condition est fort concise mais souvent difficile à appliquer parce qu'elle impose la construction d'un tel système de coordonnées. Il est préférable de remplacer la condition de Lichnerowicz par l'existence de grandeurs intrinsèques que l'on puisse comparer de façon algébrique.

Soit donc $\{x^i\}$ ($i=1, 2, 3$) un système de coordonnées décrivant la frontière et le repère naturel

$$(3) \quad e_i^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^i}$$

On peut montrer en passant au système de coordonnées de Gauss (cfr par exemple [17]) que la donnée de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées revient à la donnée de la métrique intrinsèque

$$(4) \quad g_{ij} \stackrel{\text{d'éf}}{=} g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu$$

et du tenseur accélération-courbure extérieure

$$(5) \quad K_{ij} \underset{\text{déf}}{=} \hat{n}_\mu a_{ij}^\mu$$

où, n_μ étant la forme (de poids — 1) normale à la frontière

$$(6) \quad n_\mu \underset{\text{déf}}{=} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e_1^\nu e_2^\rho e_3^\sigma,$$

on a défini

$$(7) \quad \hat{n}_\mu = \frac{n_\mu}{\sqrt{g^{\varepsilon\eta} n_\varepsilon n_\eta}}$$

tandis que les a_{ij}^μ sont les accélérations-courbures associées aux x^i :

$$(8) \quad a_{ij}^\mu \underset{\text{déf}}{=} \frac{d^2 x^\mu}{d x^i d x^j} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu e_i^\nu e_j^\rho.$$

Nous n'avons considéré comme fondamentales, ni en électromagnétisme ni en gravitation, la continuité des sources, c'est à dire du courant perpendiculaire à la frontière dans le premier cas, du flux d'énergie (ou de matière?) et des tensions tangentielles dans le second.

Ces conditions sur les sources se trouvent en effet vérifiées automatiquement lorsque les conditions sur les champs le sont. Ainsi, en électromagnétisme, la continuité du champ magnétique et éventuellement du courant de déplacement suffit à garantir la continuité du courant.

En outre, la composante du vecteur de Poynting perpendiculaire à la surface, $\vec{E}_{//} \times \vec{H}_{//} \cdot \vec{n}$, est continue en même temps que $\vec{E}_{//}$ et $\vec{H}_{//}$.

De même, en théorie d'Einstein, Lichnerowicz [7] a montré que les données de Cauchy suffisent à déterminer la partie du tenseur d'Einstein normale à la frontière.

En pratique, il sera cependant souvent avantageux de remplacer certaines conditions sur les champs par des conditions sur les sources, procédé qui sera utilisé à la section VI.

4. DISTINCTION ENTRE MODELES MACROSCOPIQUE ET MICROSCOPIQUE

A l'échelle *d'une division en cellules donnée*, un modèle sera dit macroscopique si les grandeurs auxquelles il fait appel sont constantes

d'un point à l'autre de la cellule (en particulier, aucune singularité ne peut être contenue dans les cellules).

Dans certains cas, cette condition d'homogénéité n'est pas tout à fait respectée. Je me permettrai donc d'appeler macroscopique un modèle tel que les dimensions des cellules soient plus petites qu'une distance caractéristique de variation des champs (par exemple un quart de longueur d'onde).

Cependant, lorsque les dimensions des cellules sont comparables à la distance caractéristique, on arrive à ce résultat désagréable que les relations constitutives dépendent de la répartition des champs. C'est ainsi qu'aux petites longueurs d'onde, la perméabilité diélectrique varie rapidement en fonction de la fréquence jusqu'au moment où cette notion perd toute signification, la longueur d'onde étant inférieure aux dimensions des cellules.

De même, en ferromagnétisme, les domaines de magnétisation peuvent être de dimensions comparables à celles de l'échantillon: les dimensions de l'échantillon interviennent alors dans les relations constitutives.

En électromécanique, la distance entre deux encoches et la distance entre deux sections de bobinage ne sont inférieures que d'un ordre de grandeur aux dimensions de la machine. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que certains paramètres macroscopiques dépendent de la répartition des champs (c'est-à-dire, dans ce cas, du pas polaire).

Enfin, un modèle sera dit microscopique s'il n'est pas macroscopique.

A noter que la distinction entre modèles microscopiques et macroscopiques est indépendante de la distinction faite en physique entre les théories corpusculaires et celles de type «continuum». En particulier, un modèle microscopique peut être basé sur une théorie de type milieu continu comme ce sera d'ailleurs le cas pour l'exemple de la section 6.

5. PROCÉDES DE CALCUL

Les définitions données aux sections précédentes ne permettent guère en général d'effectuer de façon exacte le calcul des grandeurs macroscopiques en fonction des grandeurs microscopiques, car on ne dispose pas d'une méthode générale permettant de choisir une disposition des cellules rendant possible la mise en correspondance avec un modèle macroscopique.

Trouver le découpage en cellules adéquat est en fait la plus grande difficulté rencontrée dans l'application des définitions ci-dessus.

Pratiquement, on supposera que le modèle microscopique présente de fortes symétries. Le découpage en cellules pourra alors se faire en fonction d'un nombre réduit de paramètres, après quoi il ne restera plus qu'à écrire les grandeurs macroscopiques en fonction d'un certain nombre (heuristique) de paramètres et à déterminer tous ces paramètres en identifiant les flux calculés selon les deux modèles.

Il est clair que l'on ne peut découper l'espace en cellules sphériques, mais l'approximation sphérique constitue néanmoins une bonne approximation dans les cas isotropes. On se permet même de prendre un modèle microscopique à symétrie sphérique (par exemple un corpuscule au centre d'une cellule sphérique comme à la section 7).

On trouve dans les articles de Wigner-Seitz [6] et Lindquist-Wheeler [9] des considérations permettant de se faire une idée de la gravité des erreurs dues à l'approximation sphérique.

Pour traiter les cas légèrement anisotropes, nous proposerions l'utilisation de cellules ellipsoïdales, le découpage en cellules permettant alors d'introduire deux ou trois paramètres (au lieu d'un seul rayon pour une cellule sphérique).

Pour ces cellules, sphériques ou ellipsoïdales, à haut degré de symétrie, il peut arriver que les grandeurs intrinsèques à la surface de la cellule coïncident point par point dans les deux modèles (et non plus seulement par leurs intégrales de flux).

En pareil cas, on peut d'ailleurs concevoir le problème comme un problème de raccordement entre une solution microscopique valable à l'intérieur de la cellule et une solution macroscopique valable à l'extérieur.

Nous examinerons aux sections suivantes des exemples de ce type où le calcul analytique sera possible.

6. CONDUCTIVITE D'UNE EMULSION

Proposons nous de calculer «la conductivité d'un milieu homogène comportant une phase continue de conductivité σ_1 et une phase dispersée sous forme de sphères de conductivité σ_2 , en fonction du taux de la seconde phase, soit α ».

Tel est le programme défini par Maxwell dès 1891.

6. 1. *Modèle microscopique*

Ce modèle utilise l'électromagnétisme au niveau galvanique. Considérons une cellule sphérique de rayon a , dont l'intérieur comprend les deux phases de conductivité σ_1 et σ_2 . Pour permettre le calcul analytique, nous supposons que la phase dispersée occupe une sphère située au centre de la cellule. Afin que le volume de cette phase soit bien une fraction α du volume total de la cellule, il faut lui donner un rayon $a\sqrt[3]{\alpha}$.

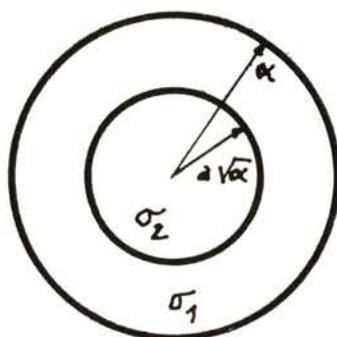


Fig. 1

En phase continue, nous allons essayer un potentiel comportant un terme dipolaire :

$$(11) \quad \phi = (A r + B r^{-2}) \cos \theta .$$

Par contre, en phase dispersée, nous devons adopter un potentiel dépourvu de singularité en $r=0$. Soit donc un champ homogène

$$(12) \quad \phi = e r \cos \theta .$$

Comme ces potentiels doivent coïncider en $r = a\alpha^{1/3}$ on obtient une première relation entre les paramètres :

$$(13) \quad e = A + B/(\alpha a^3) .$$

La conservation du courant normal à la frontière, que nous utiliserons à la place de la continuité du champ magnétique tangentiel, fournit une seconde relation :

$$(14) \quad \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a \sqrt[3]{\alpha}} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a \sqrt[3]{\alpha}}$$

dont on tire

$$(15) \quad \sigma_1 (A - 2B/(\alpha a^3)) = \sigma_2 e.$$

On peut éliminer B et e entre (13) et (15) et obtenir le potentiel en phase continue en fonction d'un seul paramètre A :

$$(16) \quad \phi = A \left(r + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \alpha a^3 / r^2 \right) \cos \theta.$$

A la frontière ($r = a$), on a donc un potentiel

$$(17) \quad \phi = A a \left(1 + \alpha \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \right) \cos \theta$$

et une densité de courant radiale :

$$(18) \quad J_r = \sigma_1 A \left(1 - 2\alpha \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \right) \cos \theta.$$

6. 2. Modèle macroscopique

Macroscopiquement, l'émulsion sera considérée comme un milieu isotrope, de conductivité σ . La théorie macroscopique est donc la même que la théorie microscopique, à savoir l'électromagnétisme galvanique.

Nous supposons un champ uniforme (ce qui est normal pour une théorie macroscopique considérée à l'échelle des cellules) :

$$(19) \quad \phi = E r \cos \theta.$$

Le choix de l'échelle ne pose aucune difficulté ici : on peut en effet adopter la même géométrie et le même système de coordonnées pour les modèles microscopique et macroscopique, ainsi que la même cellule sphérique de rayon a (pour être strict, il faudrait ne procéder à l'identification qu'au paragraphe suivant).

Le potentiel sur la frontière est

$$(20) \quad \phi = E a \cos \theta$$

et la densité de courant radiale :

$$(21) \quad J_r = \sigma E \cos \theta .$$

6. 3. Mise en correspondance

Il est possible, en éliminant E et A , d'identifier les potentiels (17) et (20), ainsi que les courants (18) et (21).

Le fait que cette identification soit possible justifie d'ailleurs à posteriori le choix de l'expression (11) pour le potentiel microscopique.

L'identification impose la valeur de la conductivité macroscopique

$$(22) \quad \sigma = \sigma_1 \frac{1 - 2\alpha(\sigma_1 - \sigma_2)/(2\sigma_1 + \sigma_2)}{1 + \alpha(\sigma_1 - \sigma_2)/(2\sigma_1 + \sigma_2)}$$

indépendamment de la taille des cellules.

6. 4. Commentaire

La loi (22) a été obtenue par Maxwell [1] en suivant une méthode différente, mais faisant également appel à une approximation sphérique. Elle rend compte de l'expérience dans une large plage de variation du taux α [16].

Signalons que la méthode de calcul utilisée ici pourrait se généraliser facilement au cas anisotrope où la phase dispersée ne se présente plus sous forme sphérique.

Cette situation se rencontre lorsque l'une des deux phases est soumise à un gradient de pression auquel l'autre phase échappe. Ainsi, si une émulsion composée de phases de densités différentes est soumise à l'action d'un champ de gravitation (ou, ce qui revient au même, à un champ d'accélération), la phase dispersée sera en mouvement relatif par rapport à la phase continue et ce mouvement se traduira par un aplatissement des bulles.

Une situation analogue se rencontre dans les machines magnétohydrodynamiques à émulsion, car la phase la plus conductrice subira alors davantage la force de Lorentz

$$(23) \quad \vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$$

où \vec{F} est la densité de force, \vec{J} la densité de courant et \vec{B} l'induction magnétique.

Ces anisotropies peuvent s'étudier en ajoutant aux potentiels (11) des termes supplémentaires du développement en harmoniques sphériques et en modifiant la forme des cellules de façon à pouvoir encore identifier les différentes expressions des potentiels et des courants normaux sur les frontières. Pour des taux de phase dispersée importants, il faut abandonner ces formes ellipsoïdales au profit de formes polygonales.

Ces différentes généralisations feront l'objet d'une autre étude.

7. PERMEABILITE DIELECTRIQUE

Dans cette section, nous nous proposons de calculer la perméabilité diélectrique d'un milieu homogène, composé de dipôles identiques, orientés dans la même direction et répartis au hasard.

L'historique de cet ancien problème peut être trouvée dans le livre d'Elliott [14].

7. 1. Modèle microscopique

Ce modèle utilise l'électromagnétisme quasistatique électrique du vide; la perméabilité diélectrique y est donc une constante ϵ_0 permettant d'éliminer l'induction \vec{D} en fonction du champ \vec{E} .

Au voisinage d'un dipôle, nous adopterons une solution du type (11), qui superpose un champ uniforme au champ propre du dipôle :

$$(24) \quad \phi := \left(e r - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{p}{r^2} \right) \cos \theta$$

où e est le champ «local» vu par le dipôle et p la valeur du dipôle, supposé orienté dans la direction \vec{a}_z .

En ce qui concerne le choix de l'échelle, nous nous tournons à nouveau vers une cellule sphérique de rayon a , contenant un seul dipôle situé en son centre.

A la frontière, on obtient donc un potentiel

$$(25) \quad \phi = \left(e a - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{p}{a^2} \right) \cos \theta$$

et une composante radiale de l'induction électrique :

$$(26) \quad D_r = \epsilon_0 \left(e + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{a^3} \right) \cos \theta .$$

7. 2. Modèle macroscopique

A l'extérieur de la cellule, le modèle utilisé sera celui de Maxwell-Minkowski, qui fait appel comme variables électriques à la fois au champ \vec{E} et à l'induction \vec{D} .

Ces grandeurs sont évidemment supposées homogènes à l'échelle des cellules, de sorte que le champ dérivera d'un potentiel

$$(27) \quad \phi = E r \cos \theta$$

et nous supposons à cause de l'isotropie du problème l'introduction orientée comme le champ selon l'axe des z .

La cellule est bien entendu une sphère de rayon a dont nous pouvons maintenant donner l'expression :

$$(28) \quad a = \left(\frac{3}{4 r n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

n étant la densité de cellules (supposées identiques) donc finalement de dipôles.

Le potentiel à la surface de la cellule vaut évidemment

$$(29) \quad \phi = E a \cos \theta$$

tandis que la composante radiale de l'induction est

$$(30) \quad D_r = D \cos \theta .$$

7. 3. Mise en correspondance

L'identification de (25) et (27) fournit, compte tenu de (28) :

$$(31) \quad E = e - \frac{1}{3} \frac{n p}{\epsilon_0} .$$

Paradoxalement, c'est Lorentz lui-même qui obtint le premier cette relation [3] en utilisant également une approximation sphérique. Mais Lorentz utilisait comme intermédiaire de calcul une densité de charge de surface à la frontière de la cellule et il effectuait le calcul en supposant la cellule vide. Cette manipulation consistant à enlever le dipôle pour calculer le champ local n'est licite que parce que la théorie électromagnétique du vide utilisée ici est linéaire.

De l'identification de (26) et (30) on déduit en tenant compte de (28) la valeur de l'induction :

$$(32) \quad D = \varepsilon_0 \left(e + \frac{2}{3} \frac{np}{\varepsilon_0} \right).$$

On notera que, contrairement à ce qui est affirmé par certains auteurs, le champ macroscopique E n'a pas à être égal au champ local e .

7. 4. *Obtention des relations macroscopiques*

De (31) et (32), on peut tirer

$$(33) \quad D = \varepsilon_0 (E + np/\varepsilon_0)$$

à laquelle on peut donner l'apparence d'une relation macroscopique en posant

$$(34) \quad \vec{P} = np \vec{a}_s$$

ce qui permet de réécrire (33) :

$$(35) \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Cette expression, souvent considérée comme une définition de \vec{D} , est ici obtenue par voie déductive dans le cas particulier qui nous occupe.

En fait, elle fait intervenir plus de grandeurs macroscopiques que nécessaire, \vec{P} étant superflue.

Pour obtenir une relation macroscopique entre \vec{E} et \vec{D} seulement, on doit ajouter à (31) et (32) une relation microscopique entre e et p .

La plus simple est l'approximation linéaire due à Mossotti (1847) qui suppose p proportionnel au champ local, soit

$$(37) \quad p = \alpha e.$$

On peut alors obtenir l'expression classique

$$(38) \quad \frac{D}{E} = \epsilon = \epsilon_0 \frac{1 + 2\alpha n/3}{1 - \alpha n/3}$$

de la perméabilité diélectrique macroscopique.

La dépendance de α en fonction de la température a été introduite par Debye (1945) dans la relation (38) et le résultat est actuellement connu sous le nom de relation de Clausius-Mossotti.

8. PROPRIETES D'UN PLASMA FROID

Les exemples précédents faisaient intervenir des modèles microscopiques et macroscopiques se déroulant dans un cadre spatio-temporel commun.

Comme annoncé dans l'introduction, ceci n'est pas nécessaire avec les conceptions adoptées ici; je vais illustrer ce fait tout en généralisant légèrement un calcul dû à Lindquist et Wheeler [7] pour l'étendre au cas de particules chargées.

8. 1. Modèle microscopique

Ce modèle utilisera la théorie d'Einstein en schéma électromagnétique pur.

L'univers est supposé peuplé de corpuscules à symétrie sphérique. Cette symétrie impose à la métrique d'être, au voisinage d'un corpuscule, la métrique de Reissner-Nordström qui se trouve rattachée à l'annexe II :

$$(41) \quad d\sigma^2 = \Delta dt^{*2} - \frac{1}{c^2 \Delta} dr^2 - \frac{r^2}{c^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

où

$$(42) \quad \Delta = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}.$$

La variable temporelle est notée t^* pour éviter toute confusion avec le temps macroscopique.

Il nous faut maintenant définir une échelle. Nous supposons chaque corpuscule au centre d'une cellule à symétrie sphérique. En fait, ce n'est qu'à l'intérieur de cette cellule que (41) (42) sont valables.

Compte tenu de la symétrie sphérique, le mouvement de la frontière est décrit par une relation entre r et t^* que nous utiliserons sous forme paramétrique :

$$(43) \quad r = r(\tau)$$

$$(44) \quad t^* = t^*(\tau).$$

La frontière doit donc être vue comme un sous-espace à trois dimensions de coordonnées τ, θ, φ . Nous imposerons à τ d'être un temps propre, c'est à dire :

$$(45) \quad \Delta \left(\frac{dt^*}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2 \Delta} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = 1$$

de sorte que la métrique du sous-espace frontière est simplement :

$$(46) \quad d\sigma^2 = d\tau^2 - \frac{r^2}{c^2} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

On remarquera que r a la dimension d'une longueur et est lié aux dimensions de la paroi. En effet, la circonférence vaut dans la métrique (46) $2\pi r$ et la surface $4\pi r^2/3$.

Par analogie avec les formules euclidiennes, on peut dire que $r(\tau)$ est le rayon de la cellule.

La normale à la frontière est

$$(47) \quad n_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\varphi\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\varphi}{d\theta} \frac{dx^\sigma}{d\varphi} = \left(\frac{dr}{d\tau}, -\frac{dt^*}{d\tau}, 0, 0 \right)$$

que nous utiliserons normée

$$(48) \quad \hat{n}_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{dr}{d\tau}, -\frac{1}{c} \frac{dt^*}{d\tau}, 0, 0 \right).$$

L'accélération vaut

$$(49) \quad a_{\tau\tau}^{\mu} = \frac{de_{\tau}}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} e_{\tau}^{\nu} e_{\tau}^{\rho} = (a_{\tau\tau}^{t^*}, a_{\tau\tau}^r, 0, 0)^T.$$

Or, puisque τ est un temps propre, l'accélération est perpendiculaire à la quadrivitesse

$$(50) \quad a_{\tau\tau}^{t^*} \Delta \frac{dt^*}{d\tau} - a_{\tau\tau}^r \frac{dr}{d\tau} \frac{1}{c^2 \Delta} = 0$$

ce qui permet d'éliminer les dérivées secondes de t^* :

$$(51) \quad a_{\tau\tau}^{\mu} = a_{\tau\tau}^r \left(\frac{1}{c^2 \Delta^2} \frac{dr/d\tau}{dt^*/d\tau}, 1, 0, 0 \right)^T.$$

Quant à la composante $a_{\tau\tau}^r$, on obtient facilement

$$(52) \quad a_{\tau\tau}^r = \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma_{t^*t^*}^r \left(\frac{dt^*}{d\tau} \right)^2 + 2 \Gamma_{t^*r}^r \frac{dt^*}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2$$

qui s'écrit en utilisant les valeurs de la connexion affine données en annexe II et en simplifiant par (42)

$$(53) \quad a_{\tau\tau}^r = \frac{d^2 r}{d\tau^2} + c^2 \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} \right).$$

Les autres «accélération-courbures» sont plus simples:

$$(54) \quad a_{\tau\theta}^{\mu} = \left(0, 0, \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau}, 0 \right)^T$$

$$(55) \quad a_{\theta\theta}^{\mu} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \right)^T$$

$$(56) \quad a_{\theta\theta}^{\mu} = (0, -r \Delta, 0, 0)^T$$

$$(57) \quad a_{\theta\varphi}^{\mu} = (0, -r \Delta \sin^2 \theta, -\sin \theta \cos \theta, 0)^T$$

$$(58) \quad a_{\theta\varphi}^{\mu} = (0, 0, 0, \text{ctg } \theta)^T.$$

En contractant les expressions (51) (54) (55) (56) (57) (58) avec (48), on obtient la grandeur intrinsèque K_{ij} :

$$(59) \quad K_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{\tau\tau}^r}{c \Delta dt^*/d\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r \Delta dt^*}{c d\tau} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r \Delta dt^*}{c d\tau} \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

On peut écrire cette expression de telle sorte que la dérivée $dt^*/d\tau$ n'intervienne que par l'expression de $K_{\theta\theta}$

$$(60) \quad K_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{r a_{\tau\tau}^r}{c^2 K_{\theta\theta}} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$(61) \quad K_{\theta\theta} = \frac{r \Delta dt^*}{c d\tau}.$$

Or, on peut facilement éliminer t^* de (61) en utilisant (45):

$$(62) \quad K_{\theta\theta} = \frac{r}{c^2} (c^2 \Delta + (dr/d\tau)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Quant à $K_{\tau\tau}$, on peut lui donner une expression plus condensée que celle qu'il a en (60). On trouve en effet facilement

$$(63) \quad K_{\tau\tau} = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{dr/d\tau} \frac{d}{d\tau} (K_{\theta\theta}/r).$$

8. 2. Modèle macroscopique

La théorie utilisée sera cette fois la théorie d'Einstein avec terme de matière (appelée paradoxalement cas intérieur par Lichnerowicz), (cf. annexe IV).

La métrique sera isotrope et homogène :

$$(64) \quad d\sigma^2 = \frac{a^2}{c^2} (d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))$$

$$(65) \quad a = a(\eta).$$

Définissons maintenant une cellule à symétrie sphérique de coordonnées τ, φ, θ

$$(66) \quad \chi = \chi(\tau)$$

$$(67) \quad \eta = \eta(\tau).$$

Puisque nous avons supposé le plasma «froid», il faut que les différentes cellules soient immobiles les unes par rapport aux autres et nous supposerons pour que le modèle macroscopique soit homogène qu'elles ont toutes le même volume à l'instant η donné.

Les parois des cellules sont donc immobiles :

$$(68) \quad \chi = \chi_0 = \text{constante}$$

donc

$$(69) \quad d\chi/d\tau = 0.$$

Dans ces conditions, imposer à τ d'être un temps propre entraîne

$$(70) \quad c d\tau = a d\eta$$

de sorte que la métrique de la frontière sera

$$(71) \quad d\sigma^2 = d\tau^2 - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \chi_0 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

La normale à la cellule sera simplement

$$(72) \quad n_\mu = \left(0, -\frac{d\eta}{d\tau}, 0, 0 \right)$$

qui devient, une fois normée :

$$(73) \quad \hat{n}_\mu = (0, -a/c, 0, 0).$$

Les accélérations-courbures se calculent facilement à partir de (68) et des expressions de la connexion affine données en annexe :

$$(74) \quad a_{\tau\tau}^{\mu} = 0$$

$$(75) \quad a_{\tau\theta}^{\mu} = \left(0, 0, \frac{\dot{a} d\eta}{a d\tau}, 0 \right)^T$$

$$(76) \quad a_{\tau\varphi}^{\mu} = \left(0, 0, 0, \frac{\dot{a} d\eta}{a d\tau} \right)^T$$

$$(77) \quad a_{\theta\theta}^{\mu} = \left(\frac{\dot{a}}{a} \sin^2 \chi, -\sin \chi \cos \chi, 0, 0 \right)^T$$

$$(78) \quad a_{\theta\varphi}^{\mu} = \left(\frac{\dot{a}}{a} \sin^2 \chi \sin^2 \theta, -\sin \chi \cos \chi \sin^2 \theta, -\sin \theta \cos \theta, 0 \right)^T$$

$$(79) \quad a_{\varphi\varphi}^{\mu} = (0, 0, 0, \text{ctg } \theta)^T.$$

En contractant ces expressions avec (73), on obtient la grandeur intrinsèque

$$(80) \quad K_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{c} \sin \chi \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{c} \sin \chi \cos \chi \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

8.3. Identification

La première condition découle de l'identité des métriques intrinsèques (46) (71) :

$$(81) \quad r = a \sin \chi_0.$$

L'identification des expressions de $K_{\tau\tau}$ fournit une seconde condition, à savoir, utilisant (59) ou (60)

$$(82) \quad a_{\tau\tau}^r = 0$$

c'est-à-dire que les parois de la cellule sont en chute radiale libre.

Le mouvement de chute libre dans le potentiel de Reissner-Nordström est étudié en annexe, mais il n'est pas nécessaire de connaître la solution pour exploiter l'identité des K_{rr} . On peut en effet partir de l'expression (63) de K_{rr} qui, puisqu'elle est nulle pour des raisons macroscopiques, fournit l'intégrale première :

$$(83) \quad K_{t\theta}/r = \text{constante}$$

que l'on peut avantageusement paramétrer de la façon suivante :

$$(84) \quad K_{t\theta}/r = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{M}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

car le paramètre r_0 a une interprétation simple en termes du mouvement de chute libre (cf annexe III).

Les deux conditions (81) et (82) ou (84) sont connues dans la littérature [9] mais elles ne sont pas suffisantes. Aussi les complète-t-on par une relation constitutive macroscopique qui est facile à deviner dans le cas de particules neutres, à savoir la nullité de la pression. Le cas de particules chargées serait plus difficile à traiter par cette méthode heuristique.

La méthode développée dans ce texte a l'avantage de fournir automatiquement une troisième relation, obtenue par identification des $K_{\theta\theta}$, ce qui permettra finalement de dériver les relations macroscopiques avec assurance.

L'identification des $K_{\theta\theta}$ donnés par les expressions (84) et (80) fournit compte tenu de (81) :

$$(85) \quad \left(1 - \frac{M}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos \chi_0$$

soit

$$(86) \quad r_0 = M / \sin^2 \chi_0.$$

Il est intéressant de remarquer que cette relation joue vis-à-vis du mouvement microscopique le rôle d'une règle de sélection. En effet, parmi tous les mouvements microscopiques qui obéissent à la loi d'inertie classique (82), seuls sont permis ceux dont le paramètre r_0 prend la valeur (86). Il γ a là une analogie avec les théories quantiques ; peut-être le modèle macroscopique joue-t-il le rôle d'un « observateur » vis-à-vis du modèle microscopique.

8. 4. Mouvement et relations macroscopiques

Comme montré en annexe, le mouvement microscopique est hypocycloïdal. En introduisant (81) (86) dans les équations du mouvement microscopique, on obtient le mouvement macroscopique :

$$(87) \quad a = a_0(1 + \alpha \cos \xi)$$

$$(88) \quad \tau = \frac{a_0}{c} (\xi + \alpha \sin \xi)$$

$$(89) \quad \alpha = \left(1 - \frac{Q^2}{Mr_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

où l'on a posé

$$(90) \quad a_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{r_0}{\sin \chi_0}$$

En dérivant (88) et en utilisant (87), il vient

$$(91) \quad c d\tau = a d\xi$$

qu'il suffit de comparer à (70) pour constater que l'on peut, par un choix convenable des origines, identifier ξ et η .

Notons, à l'intention de ceux qui croient à la cosmologie, que la solution (87) ne contient pas de «big bang» originel, le rayon de l'univers ne pouvant descendre en dessous de la valeur limite.

$$(92) \quad a_{\min} = a_0(1 - \alpha)$$

qui est strictement positive dans le cas de particules chargées.

En vue d'obtenir les valeurs de l'énergie et de la pression, calculons tout d'abord les dérivées de a :

$$(93) \quad \dot{a} = \frac{da}{d\eta} = -a_0 \alpha \sin \xi$$

donc

$$(94) \quad \dot{a}^2 = (a_0 \alpha)^2 - (a_0 - a)^2$$

$$(95) \quad \ddot{a} = -a_0 \alpha \cos \xi = a_0 - a$$

Il suffit d'introduire ces valeurs dans les expressions du tenseur d'Einstein données à l'annexe IV pour obtenir :

$$(96) \quad G_{\eta}^{\eta} = \frac{3c^2}{a^4} (2aa_0 - a_0^2(1 - \alpha^2))$$

$$(97) \quad G_{\chi}^{\chi} = G_{\theta}^{\theta} = G_{\varphi}^{\varphi} = \frac{c^2}{a^4} a_0^2 (1 - \alpha^2).$$

Nous pouvons interpréter (96) (97) en utilisant le volume de l'univers [13],

$$(98) \quad V = 2\pi^2 a^3$$

donc

$$(99) \quad dV = 6\pi^2 a^2 da$$

on obtient alors facilement :

$$(100) \quad d(G_{\eta}^{\eta} V) = G_{\chi}^{\chi} dV$$

qui n'est autre que la conservation de l'énergie, et

$$(101) \quad \left(G_{\chi}^{\chi} + \frac{1}{3} G_{\eta}^{\eta}\right) V = (2\pi a_0 c)^2 = \text{constante}$$

à rapprocher de la loi de Boyle-Mariotte.

ANNEXE I: COURBURE D'UN ESPACE-TEMPS
A SYMETRIE SPHERIQUE

Nous reprenons ici une partie du théorème de Birkhoff (1923) (cf. [17]) mais sans faire l'hypothèse d'un espace vide. Cette présentation est à peine différente de celle de Landau-Lifchitz [13].

La symétrie sphérique suffit pour garantir l'existence d'un système de coordonnées où l'on puisse écrire la métrique sous la forme

$$(1) \quad d\sigma^2 = A dt^2 - (B dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2))/c^2$$

σ et t seront tous deux mesurés en secondes, de sorte que A est sans dimensions. Il en est évidemment de même de B . c sera une constante dimensionnelle, et donc universelle, à laquelle on pourrait attribuer par définition une valeur proche de $3 \cdot 10^8$ m/sec, de sorte que la coordonnée r a la dimension d'une longueur (mesurée en mètres).

Nous désignerons par $\dot{}$ la dérivée temporelle $\partial/\partial t$ par \prime la dérivée radiale $\partial/\partial r$.

Par un choix judicieux de la coordonnée t , il est toujours possible de rendre A indépendant de t .

$$(2) \quad \dot{A} = 0.$$

Par contre, B dépend en général à la fois de t et de r .

A cause de la symétrie sphérique, aucun coefficient ne dépend de θ ni de φ .

Afin de faciliter les écritures, il est d'usage de poser

$$(3) \quad A = e^{2\nu(r)}$$

$$(4) \quad B = e^{2\lambda(r,t)}.$$

Les seules composantes non nulles de la métrique sont alors:

$$(5 a) \quad g_{tt} = e^{2\nu}$$

$$(5 b) \quad g_{rr} = -(e^{2\lambda})/c^2$$

$$(5 c) \quad g_{\theta\theta} = -r^2/c^2$$

$$(5d) \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \theta / c^2$$

et la racine de son déterminant est donnée par

$$(6) \quad \sqrt{-g} = e^{\nu+\lambda} r^2 |\sin \theta| / c^3.$$

Les seules composantes non nulles de la connexion affine sont

$$(7) \quad \begin{array}{ll} \Gamma_{tt}^r = c^2 \nu' e^{2\nu-2\lambda} & \Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = \nu' \\ \Gamma_{rr}^t = \dot{\lambda} (e^{2\lambda-2\nu}) / c^2 & \Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \dot{\lambda} \\ \Gamma_{rr}^r = \lambda' & \\ \Gamma_{\theta\theta}^r = -r e^{-2\lambda} & \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = r^{-1} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r e^{-2\lambda} \sin^2 \theta & \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = r^{-1} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cotg \theta \end{array}$$

donc

$$(8) \quad \begin{array}{l} \Gamma_t = \dot{\lambda} \\ \Gamma_r = \nu' + \lambda' + 2r^{-1} \\ \Gamma_\theta = \cotg \theta \\ \Gamma_\varphi = 0. \end{array}$$

Les relations (8) auraient d'ailleurs pu être tirées directement de (6).

A partir de (7) et en s'aidant éventuellement de (8) on peut calculer le tenseur de Ricci. Les seules composantes non nulles de celui-ci sont :

$$(9) \quad \begin{array}{l} R_{tt} = \dot{\lambda}'' + \dot{\lambda}'^2 - c^2 e^{2\nu-2\lambda} (\nu'' + \nu'^2 - \nu' \lambda' + 2\nu' r^{-1}) \\ R_{rt} = R_{tr} = -2\dot{\lambda}' r^{-1} \\ R_{rr} = \nu'' + \nu'^2 - \lambda' \nu' - 2\lambda' r^{-1} - e^{2\lambda-2\nu} (\lambda'' + \lambda'^2) / c^2 \\ R_{\theta\theta} = -1 + e^{-2\lambda} (+1 - r \lambda' + r \nu') \\ R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta (-1 + e^{-2\lambda} (+1 - r \lambda' + r \nu')) \end{array}$$

soit, en montant le premier indice :

$$\begin{aligned}
 (10) \quad R_t^t &= e^{-2\nu}(\lambda'' + \lambda'^2) - c^2 e^{-2\lambda}(\nu' + \nu'^2 - \nu' \lambda' + 2\nu' r^{-1}) \\
 R_t^r &= 2c^2 e^{-2\lambda} \lambda' r^{-1} \\
 R_r^t &= -e^{-2\nu} \left(\frac{2\lambda'}{r} \right) \\
 R_r^r &= -c^2 e^{-2\lambda} \left(\nu' + \nu'^2 - \lambda' \nu' - 2 \frac{\lambda'}{r} \right) + e^{-2\nu} (\lambda'' + \lambda'^2) \\
 R_\theta^\theta &= R_\varphi^\varphi = c^2 r^{-2} - c^2 e^{-2\lambda} (r^{-2} - \lambda' r^{-1} + \nu' r^{-1}).
 \end{aligned}$$

La courbure scalaire vaut donc

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \frac{1}{2} R &= e^{-2\nu}(\lambda'' + \lambda'^2) - c^2 e^{-2\lambda}(\nu' + \nu'^2 - \nu' \lambda' + \\
 &\quad + 2\nu' r^{-1} - 2\lambda' r^{-1} + r^{-2}) + c^2 r^{-2}.
 \end{aligned}$$

Le tenseur d'Einstein de poids 1, à savoir

$$(12) \quad G_\nu^\mu = \sqrt{-g} \left(R_\nu^\mu - \frac{1}{2} R \right)$$

vaut alors

$$\begin{aligned}
 (13) \quad G_t^t &= |\sin \theta| (e^{\nu-\lambda} (1 - 2\lambda' r) - e^{\nu+\lambda}) / c \\
 G_t^r &= |\sin \theta| e^{\nu-\lambda} 2\lambda' r / c \\
 G_r^t &= -|\sin \theta| e^{\lambda-\nu} 2\lambda' r / c^3 \\
 G_r^r &= |\sin \theta| (e^{\nu-\lambda} (1 + 2\nu' r) - e^{\nu+\lambda}) / c \\
 G_\theta^\theta &= G_\varphi^\varphi = -r^2 c^{-3} |\sin \theta| e^{\lambda-\nu} (\lambda'' + \\
 &\quad + \lambda'^2) + c^{-1} |\sin \theta| r^2 e^{\nu-\lambda} (\nu' + \nu'^2 - \nu' \lambda' + (\nu' - \lambda') r^{-1}).
 \end{aligned}$$

En divisant (13) par la constante d'Einstein, on obtient de G_t^t une densité d'énergie, de G_t^r un flux d'énergie, de G_r^t un moment et les trois autres composantes sont des tensions.

Parfois, on cherche à obtenir des relations supplémentaires en faisant usage de la conservation de l'énergie. Le procédé, rigoureusement appliqué, ne conduit en fait à aucune relation nouvelle car (13) vérifie automatiquement une loi de conservation de par l'identité de Bianchi.

D'ailleurs, aussi longtemps que la métrique dépend du temps ($\lambda' \neq 0$), il n'y a pas de raison pour que l'énergie soit une intégrale première.

ANNEXE II: LA METRIQUE DE REISSNER-NORDSTROM

Nous allons reprendre la métrique à symétrie sphérique de l'annexe I avec la condition supplémentaire d'une courbure interprétable comme due uniquement à un champ électromagnétique dans le vide.

Cette condition entraîne (Rainich [4])

$$(1) \quad R = 0$$

$$(2) \quad R_{\alpha}^{\mu} R_{\nu}^{\alpha} = k \delta_{\nu}^{\mu}$$

Compte tenu de l'annulation de nombreuses composantes par suite de la symétrie sphérique, l'équation (2) se réduit dans notre système de coordonnées à

$$(3) \quad R_t^t + R_r^t R_t^r = R_t^r R_r^t + R_r^r = R_0^0 = R_{\phi}^{\phi}$$

$$(4) \quad R_t^t R_r^t + R_r^t R_r^r = R_r^t (R_t^t + R_r^r) = 0$$

$$(5) \quad R_t^r (R_t^t + R_r^r) = 0.$$

De (3), on tire

$$(6) \quad R_t^t = \pm R_r^r$$

Limitons nous au premier cas (signe +), qui correspond à l'électromagnétisme classique.

Alors, la condition (1) entraîne

$$(7) \quad R_t^t = R_r^r = -R_0^0 = -R_{\phi}^{\phi}$$

de sorte que, par (3), R_r^t et R_t^r doivent être nuls, ce qui annule identiquement (4) et (5) et donne, par les expressions de l'annexe I:

$$(8) \quad \lambda^* = 0$$

Ainsi, la première solution de (6) est stationnaire.

En utilisant (7), on obtient aisément

$$(9) \quad \nu' + \lambda' = 0$$

ainsi que

$$(10) \quad r^2 e^{-2\lambda} (-\lambda'' + 2\lambda'^2 - 4\lambda' r^{-1} + r^{-2}) = 1$$

que l'on peut écrire

$$(11) \quad \left(\frac{1}{2} r^2 e^{-2\lambda}\right)'' = 1.$$

L'intégration de (11) est triviale et fournit

$$(12) \quad e^{-2\lambda} = 1 - 2M r^{-1} + Q^2 r^{-2} = \Delta$$

où M et Q sont des longueurs caractéristiques de la singularité centrale. Pour ne pas préjuger en écrivant (12) du signe du dernier terme, il faudrait admettre que Q puisse être purement imaginaire.

Par (9), $e^{2\nu}$ ne peut différer de (12) que par une constante multiplicative. Cette dernière peut être réduite à l'unité par un choix convenable de la coordonnée temporelle t , de sorte que l'on obtient la métrique de Reissner-Nordström :

$$(13) \quad d\sigma^2 = \Delta dt^2 - c^{-2} \Delta^{-1} dr^2 - c^{-2} r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Dans cette métrique, on a

$$(14) \quad e^{-2\lambda} = e^{2\nu} = \Delta$$

donc

$$(15) \quad \lambda' = 0$$

$$(16) \quad \lambda' = (-M r^{-2} + Q^2 r^{-3})/\Delta$$

$$(17) \quad \nu' = (M r^{-2} - Q^2 r^{-3})/\Delta$$

En introduisant ces valeurs dans les expressions de l'annexe I, on obtient :

$$(18) \quad \Gamma_{tt}^r = c^2 (M r^{-2} + Q^2 r^{-3}) \Delta$$

$$(19) \quad \Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = (M r^{-2} - Q^2 r^{-3})/\Delta$$

$$(20) \quad \Gamma_{rr}^r = (-M r^{-2} + Q^2 r^{-3})/\Delta$$

$$(21) \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r \Delta$$

$$(22) \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = r^{-1}$$

$$(23) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \Delta \sin^2 \theta$$

$$(24) \quad \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = r^{-1}$$

$$(25) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$$

$$(26) \quad \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = c t g \theta$$

Les autres composantes de la connexion sont nulles.

ANNEXE III: MOUVEMENT RADIAL DANS LA METRIQUE DE REISSNER-NORDSTROM

Nous nous intéressons au mouvement d'une particule test *neutre* dont le mouvement est donc donné par la nullité de l'accélération (par rapport au temps propre τ)

$$(1) \quad a_{\tau\tau}^{\mu} = 0.$$

En utilisant les expressions de la connexion données à l'annexe II, on obtient cette accélération

$$(2) \quad 0 = \frac{d^2 r}{d\tau^2} + c^2 (M r^{-2} - Q^2 r^{-3}) \left(\Delta \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2 \Delta} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \right)$$

soit, puisque τ est un temps propre et le mouvement radial,

$$(3) \quad 0 = \frac{d^2 r}{d\tau^2} + c^2 (M r^{-2} - Q^2 r^{-3}).$$

L'équation (3) fournit facilement l'intégrale première :

$$(4) \quad \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + c^2 (-2M r^{-1} + Q^2 r^{-2} + c^2 \epsilon) = 0.$$

Lorsque $Q=0$, c'est-à-dire pour un potentiel purement gravitationnel, on sait que le mouvement est cycloïdal.

Aussi est-il tentant d'essayer une solution hypo- ou épi-cycloïdale de (3). Posons

$$(5) \quad r = r_0 (1 + \alpha \cos \xi)$$

$$(6) \quad \tau = \tau_0 (\xi + \alpha \sin \xi).$$

On tire de (5) (6) :

$$(7) \quad \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr/d\xi}{d\tau/d\xi} = - \frac{r_0 \alpha \sin \xi}{\tau_0 (1 + \alpha \cos \xi)}.$$

On pourrait dériver une seconde fois et introduire le résultat en (3), mais il est plus facile d'éliminer ξ de (7) en utilisant (5) (6)

$$(8) \quad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = - \left(\frac{r_0}{\tau_0}\right)^2 + \frac{2 r_0^3}{\tau_0^2 r} - \frac{(1 - \alpha^2) r_0^4}{\tau_0^2 r^2}$$

et de constater que l'on peut identifier (8) et (4), ce qui élimine deux paramètres sur trois :

$$(9) \quad \tau_0 = \frac{r_0}{c} \left(\frac{r_0}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(10) \quad \alpha = \left(1 - \frac{Q^2}{M r_0}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans tous les cas «physiques», le rapport $\frac{Q^2}{M r_0}$ est petit de sorte que l'expression (10) a un sens.

Lorsque $Q=0$, $\alpha=1$ et le mouvement est cycloïdal.

Si Q est réel et différent de 0, $\alpha < 1$ et le mouvement est hypo-cycloïdal.

Si Q était imaginaire pur, le mouvement serait épi-cycloïdal.

Notons encore que l'identification de (8) et (4) fixe la valeur de la constante utilisée en (4), qui devient ainsi :

$$(11) \quad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -c^2 (M r_0^{-1} - 2 M r^{-1} + Q^2 r^{-2}).$$

Contrairement à ce qui se passe lorsque $Q=0$, une solution statique est possible. Il suffit pour cela d'avoir en (5) et (6)

$$(12) \quad \alpha = 0.$$

En ce cas, r_0 et τ_0 sont imposés par (10) et (9):

$$(13) \quad r = r'_0 = Q^2/M$$

$$(14) \quad \tau = \tau'_0 \xi = \frac{Q^5}{c M^2} \xi.$$

r'_0 n'est autre que le rayon classique d'une particule chargée. Quant à τ'_0 , il s'agit de la période des oscillations au voisinage du point d'équilibre.

A titre indicatif, on aurait pour un proton

$$r'_0 = 1.55 \cdot 10^{-18} \text{ m}$$

$$\tau'_0 = 3.61 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$$

et pour un électron

$$r'_0 = 2.84 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

$$\tau'_0 = 0.121 \text{ sec}.$$

ANNEXE IV : METRIQUE D'UN MILIEU ISOTROPE ET HOMOGENE

La forme générale de cette métrique est, du moins dans le modèle fermé (cf. [13])

$$(1) \quad d\sigma^2 = dt^2 - a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]/c^2$$

avec

$$(2) \quad a = a(t).$$

Cette métrique est à symétrie sphérique et est donc étudiable par les méthodes de l'annexe I.

Malheureusement, l'expression (1) prend alors une forme très compliquée de sorte qu'il est préférable de recommencer entièrement l'étude. Auparavant, on effectue souvent le changement de variable

$$(3) \quad d\eta = c dt/a$$

qui fait de la métrique :

$$(4) \quad d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 - d\eta^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]/c^2$$

$$(5) \quad a = a(\eta)$$

soit

$$(6) \quad g_{\eta\eta} = a^2/c^2$$

$$(7) \quad g_{\chi\chi} = -a^2/c^2$$

$$(8) \quad g_{\theta\theta} = -a^2 \sin^2 \chi / c^2$$

$$(9) \quad g_{\varphi\varphi} = -a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta / c^2$$

$$(10) \quad \sqrt{-g} = a^4 \sin^2 \chi |\sin \theta| / c^4.$$

Les seules composantes non nulles de la connexion affine sont alors, le \cdot dénotant une dérivation selon η :

$$(11) \quad \Gamma_{\eta\eta}^{\eta} = \dot{a}/a$$

$$(12) \quad \Gamma_{\chi\chi}^{\eta} = \dot{a}/a$$

$$(13) \quad \Gamma_{\chi\eta}^{\chi} = \Gamma_{\eta\chi}^{\chi} = a/a$$

$$(14) \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\eta} = \dot{a} \sin^2 \chi / a$$

$$(15) \quad \Gamma_{\theta\eta}^{\theta} = \Gamma_{\eta\theta}^{\theta} = \dot{a}/a$$

$$(16) \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\chi} = -\sin \chi \cos \chi$$

$$(17) \quad \Gamma_{\theta\chi}^{\theta} = \Gamma_{\chi\theta}^{\theta} = \cotg \chi$$

$$(18) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\eta} = \dot{a} \sin^2 \chi \sin^2 \theta / a$$

$$(19) \quad \Gamma_{\varphi\eta}^{\varphi} = \Gamma_{\eta\varphi}^{\varphi} = \dot{a}/a$$

$$(20) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\chi} = -\sin \chi \cos \chi \sin^2 \theta$$

$$(21) \quad \Gamma_{\varphi\chi}^{\varphi} = \Gamma_{\chi\varphi}^{\varphi} = \cotg \chi$$

$$(22) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$$

$$(23) \quad \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \cotg \theta$$

donc

$$(24) \quad \Gamma_r = 4 \dot{a}/a$$

$$(25) \quad \Gamma_\lambda = 2 \cotg \lambda$$

$$(26) \quad \Gamma_\theta = \cotg \theta$$

$$(27) \quad \Gamma_\varphi = 0$$

que l'on aurait pu tirer directement de (10).

Les seules composantes non nulles du tenseur de Ricci sont:

$$(28) \quad R_r^r = -3 c^2 (a \ddot{a} - \dot{a}^2)$$

$$(29) \quad R_\lambda^\lambda = R_\theta^\theta = R_\varphi^\varphi = -c^2 (a \ddot{a} + \dot{a}^2 + 2 a^2)/a^4.$$

La courbure scalaire vaut donc

$$(30) \quad R = -6 c^2 (a + \ddot{a})/a^3$$

et le tenseur d'Einstein (de poids nul)

$$(31) \quad G_r^r = 3 c^2 (\dot{a}^2 + a^2)/a^4$$

$$(32) \quad G_\lambda^\lambda = G_\theta^\theta = G_\varphi^\varphi = c^2 (2 a \ddot{a} - \dot{a}^2 + a^2)/a^4.$$

REFERENCES

- [1] MAXWELL, J. C.: A treatise on electricity and magnetism *Clarendon Press* (1891).
- [2] CARTER, F. W.: Air-gap induction *Electrical World and Engineer* Vol. 35, 22, 884-888 (1901).
- [3] LORENTZ, H. A.: The theory of electrons (sect. 117), Teubner Leipzig (1906) Reprinted by Dover Publications, Inc. N. Y. 1952.
- [4] RAINICH, G. Y.: Electrodynamics in the general relativity theory *Trans. Am. Math. Soc.* 27, 106 (1925).
- [5] CARTER, F. W.: The magnetic field of the dynamo electric machine *J. of the Inst. of Electrical Engineers* Vol. 64, 1115-1118 (1926).
- [6] WIGNER, E. P., SEITZ, F.: On the constitution of metallic sodium *Physical Rev.* 43, 804 (1933).
- [7] LICHNEROWICZ, A.: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme Masson (1955).
- [8] MAZUR, P., DE GROOT, S. R.: On pressure and ponderomotive force in a dielectric *Physica* 22, 657-669 (1956).

- [9] LINDQUIST, R. W., WHEELER, J. A.: Dynamics of a lattice universe by the Schwarzschild cell method *Rev. Mod. Phys.* **29**, 432-433 (1957).
- [10] MISNER, C., WHEELER, J. A.: Classical physics as geometry *Ann. Phys.* (U. S. A.) **2**, 525-603 (1957).
- [11] DE GROOT, S. R., VLEIGER, J.: Derivation of Maxwell equations *Physica* **31**, 125-140, 254-268 (1965).
- [12] DE GROOT, S. R.: The Maxwell equations: non-relativistic multipole expansion of all orders *Physica* **31**, 953-958 (1965).
- [13] LANDAU, L., LIFCHITZ, E.: Théorie du champ Ed. Mir U. R. S. S. (1966).
- [14] ELLIOT, R. S.: Electromagnetics Mc Graw-Hill (1966).
- [15] GARRIDO, M. S.: Contribution à la théorie dynamique des systèmes électromécaniques. Thèse, Nancy (1968).
- [16] HANSEN, J. P.: Contribution à l'étude de la production magnétohydrodynamique d'énergie électrique en veine liquide. Thèse présentée à l'université de Paris VI (1974).
- [17] MISNER, C., THORNE, K., WHEELER, J. A.: Gravitation. Freeman (1974).